Matemáticas I

Farith Briceño - 2016

Material en revisión

Indice

Matemática I - Guía 1

Números reales : Operaciones.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-CD.1

- Conjunto de los números reales. Leyes de los números reales.
- Operaciones con números reales.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 1.1 *: Realizar las siguientes operaciones*

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{7}{20}-4.$$

Solución : Buscamos el denominador común, para ello descomponemos en factores primos los números del denominador

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2\cdot 3 \qquad 5=5 \qquad 4=2^2 \qquad 20=2^2\cdot 5,$$

así, el mínimo común múltiplo (términos comunes y no comunes con su mayor exponente) viene dado por

$$m.c.m.\,(12,5,4,20) = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60.$$

Tenemos que

$$\frac{5}{12}-\frac{3}{5}+\frac{1}{4}-\frac{7}{20}-4 = \frac{25-36+15-21-240}{60} = \frac{40-297}{60} = -\frac{257}{60}.$$

★

Ejemplo 1.2 *: Efectuar y simplificar la siguiente operación*

$$\frac{\dfrac{12}{121}-\dfrac{6}{55}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{13}{110}-\dfrac{6}{11}}{\dfrac{15}{121}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{11}+\dfrac{9}{22}}.$$

Solución : Para el numerador : Buscamos el denominador común, para ello descomponemos en factores primos los números del denominador

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 110 & 2 \\ 55 & 5 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$121 = 11^2 \qquad 55 = 5\cdot 11 \qquad 2=2 \qquad 110 = 2\cdot 5\cdot 11 \qquad 11 = 11$$

así, el mínimo común múltiplo (términos comunes y no comunes con su mayor exponente) viene dado por

$$m.c.m.\,(121,55,2,110,11) = 11^2\cdot 5\cdot 2.$$

Entonces, el numerador es igual a

$$\begin{aligned} \frac{12}{121}-\frac{6}{55}+\frac{1}{2}-\frac{13}{110}-\frac{6}{11} &= \frac{12}{(11)(11)}-\frac{6}{(5)(11)}+\frac{1}{2}-\frac{13}{(11)(5)(2)}-\frac{6}{11} \\ &= \frac{(12)(5)(2)-(6)(11)(2)+(1)(11)(11)(5)-(13)(11)-(6)(11)(5)(2)}{(11)(11)(5)(2)} \\ &= \frac{120-132+605-143-660}{(11)(11)(5)(2)} = -\frac{210}{(11)(11)(5)(2)}. \end{aligned}$$

Para el denominador : Buscamos el denominador común, para ello descomponemos en factores primos los números del denominador

$$\begin{array}{r|l} 121 & 11 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 2 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$121 = 11^2 \qquad 2 = 2 \qquad 11 = 11 \qquad 22 = 2 \cdot 11$$

así, el mínimo común múltiplo (términos comunes y no comunes con su mayor exponente) viene dado por

$$m.c.m.\,(121, 2, 11, 22) = 11^2 \cdot 2.$$

Entonces, el denominador es igual a

$$\frac{15}{121} - \frac{1}{2} - \frac{4}{11} + \frac{9}{22} = \frac{15}{(11)(11)} - \frac{1}{2} - \frac{4}{11} + \frac{9}{(2)(11)} = \frac{(15)(2) - (1)(11)(11) - (4)(2)(11) + (9)(11)}{(2)(11)(11)}$$

$$= \frac{30 - 121 - 88 + 99}{(2)(11)(11)} = -\frac{80}{(2)(11)(11)},$$

de aquí,

$$\frac{\dfrac{12}{121} - \dfrac{6}{55} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{13}{110} - \dfrac{6}{11}}{\dfrac{15}{121} - \dfrac{1}{2} - \dfrac{4}{11} + \dfrac{9}{22}} = \frac{-\dfrac{210}{(11)(11)(5)(2)}}{-\dfrac{80}{(2)(11)(11)}} = \frac{(210)(2)(11)(11)}{(80)(11)(11)(5)(2)} = \frac{210}{(80)(5)} = \frac{210}{400} = \frac{21}{40}.$$

★

Ejemplo 1.3 *: Simplificar*

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{\frac{3}{2} + 2}} - 1} + 1.$$

Solución : Tenemos que

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{\frac{3}{2} + 2}} - 1} + 1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{\left(\frac{3}{2} + 2\right)}} - 1} + 1,$$

donde,

$$\frac{3}{2} + 2 = \frac{(1)(3) + (2)(2)}{2} = \frac{3 + 4}{2} = \frac{7}{2}$$

así,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}}{1 + \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{\left(\frac{3}{2} + 2\right)}} - 1} + 1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}}{1 + \left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}}\right) - \left(\dfrac{2}{\frac{7}{2}}\right)} - 1} + 1,$$

donde,

$$\frac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}} = \frac{(1)\,(3)}{(2)\,(2)} = \frac{3}{4} \qquad \text{y} \qquad \frac{2}{\dfrac{7}{2}} = \frac{\dfrac{2}{1}}{\dfrac{7}{2}} = \frac{4}{7},$$

con lo que,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}}{1+\left(\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}\right)-\left(\dfrac{2}{\dfrac{7}{2}}\right)}-1}+1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}}{\left(1+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{7}\right)}-1}+1,$$

donde,

$$1+\frac{3}{4}-\frac{4}{7} = \frac{(28)\,(1)+(7)\,(3)-(4)\,(4)}{28} = \frac{28+21-16}{28} = \frac{49-16}{28} = \frac{33}{28},$$

entonces,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}}{\left(1+\dfrac{3}{4}-\dfrac{4}{7}\right)}-1}+1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)}{\dfrac{33}{28}}-1}+1,$$

donde,

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3} = \frac{1+2}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

así,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\right)}{\dfrac{33}{28}}-1}+1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{1}{\dfrac{33}{28}}\right)-1}+1,$$

donde,

$$\frac{1}{\dfrac{33}{28}} = \frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{33}{28}} = \frac{(1)\,(28)}{(33)\,(1)} = \frac{28}{33},$$

con lo que,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{1}{\dfrac{33}{28}}\right)-1}+1 = \frac{\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{28}{33}-1\right)}+1,$$

donde,

$$\frac{28}{33}-1 = \frac{(1)\,(28)-(33)\,(1)}{33} = \frac{28-33}{33} = -\frac{5}{33},$$

entonces,

$$\frac{\dfrac{2}{3}}{\left(\dfrac{28}{33}-1\right)}+1 = \left(\frac{\dfrac{2}{3}}{-\dfrac{5}{33}}\right)+1,$$

donde,

$$\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{33}} = -\frac{(2)\,(33)}{(3)\,(5)} = -\frac{(2)\,(11)}{(5)} = -\frac{22}{5},$$

así,

$$\left(\frac{\frac{2}{3}}{-\frac{5}{33}}\right) + 1 = -\frac{22}{5} + 1 = \frac{(1)\,(-22) + (5)\,(1)}{5} = \frac{-22+5}{5} = -\frac{17}{5},$$

luego

$$\frac{\frac{2}{3}}{\dfrac{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}{1+\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} - \dfrac{2}{\frac{3}{2}+2}} - 1} + 1 = -\frac{17}{5}.$$

★

Ejemplo 1.4 *: Responda* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA*** *las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.*

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$
2. $\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^4} = 3 + 2\sqrt{2}$

Solución : 1. Tenemos que

$$(a+b)^2 = (a+b)\,(a+b) = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2 \neq a^2 + b^2.$$

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

2. Tenemos que

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^4} = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^{4/2} = \left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^2 = \left(1+\sqrt{2}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

Por lo tanto, la proposición es **VERDADERA**. ★

Ejemplo 1.5 *: Hallar el valor del polinomio* $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x + 3$ *en* $x = -\frac{1}{3}$.

Solución : Tenemos que, el valor numérico del polinomio p en $x = -\frac{1}{3}$ viene dado por

$$p\left(-\frac{1}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 7\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 12\left(-\frac{1}{3}\right) + 3 = -3\left(\frac{1}{3^3}\right) - 7\left(\frac{1}{3^2}\right) - 12\left(\frac{1}{3}\right) + 3$$

$$= -\frac{1}{3^2} - \frac{7}{3^2} - \frac{12}{3} + 3 = -\frac{8}{9} - 4 + 3 = -\frac{8}{9} - 1 = \frac{-8-9}{9} = -\frac{17}{9},$$

luego, el valor numérico del polinomio $p(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x + 3$ en $x = -\frac{1}{3}$ es $p\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{17}{9}$. ★

Ejemplo 1.6 *: Diga si* $x = -\frac{2}{3}$ *es raíz del polinomio* $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7x - 2$.

Solución : El valor $x = -\frac{2}{3}$ es raíz del polinomio si el valor numérico de p en $x = -\frac{2}{3}$ es igual a cero, es decir, al sustituir $x=-\dfrac{2}{3}$ en la expresión de p obtenemos como resultado el valor cero, así,

$$p\left(-\frac{2}{3}\right)=3\left(-\frac{2}{3}\right)^4+2\left(-\frac{2}{3}\right)^3-6\left(-\frac{2}{3}\right)^2-7\left(-\frac{2}{3}\right)-2=3\left(\frac{2^4}{3^4}\right)-2\left(\frac{2^3}{3^3}\right)-6\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^2+7\left(\frac{2}{3}\right)-2$$

$$=\frac{2^4}{3^3}-\frac{2^4}{3^3}-\frac{2^3}{3}+\frac{14}{3}-2=\left(-\frac{8}{3}+\frac{14}{3}\right)-2=\frac{-8+14}{3}-2=\frac{6}{3}-2=2-2=0,$$

por lo tanto, $x=-\dfrac{2}{3}$ es una raíz de $p(x)=3x^4+2x^3-6x^2-7x-2$. ★

Ejemplo 1.7 *: Diga si $x=2$ es raíz del polinomio $p(x)=x^4+3x^2-x-5$.*

Solución : El valor $x=2$ es raíz del polinomio si el valor numérico de p en $x=2$ es igual a cero, es decir, al sustituir $x=2$ en la expresión de p obtenemos como resultado el valor cero, así,

$$p(2)=(2)^4+3(2)^2-(2)-5=16+(3)(4)-2-5=16+12-7=21\neq 0,$$

por lo tanto, $x=2$ no es una raíz de $p(x)=x^4+3x^2-x-5$. ★

Ejemplo 1.8 *: Factorizar la siguiente expresión en productos de factores reales irreducibles*

$$3mp-n+m^2-nm+m-3np.$$

Solución : Agrupando convenientemente, se tiene

$$3mp-n+m^2-nm+m-3np=\left(3mp+m^2+m\right)+\left(-nm-n-3np\right),$$

observemos que la expresión en el primer paréntesis tiene como elemento común a m, mientras que la expresión del segundo paréntesis tiene como elemento común a $-n$, así,

$$3mp-n+m^2-nm+m-3np=m(3p+m+1)-n(m+1+3p),$$

ahora la nueva expresión tiene como elemento común a $m+1+3p$, así,

$$m(3p+m+1)-n(m+1+3p)=(3p+m+1)(m-n).$$

Luego, la expresón dada puede ser escrita como producto de factores irreducibles

$$3mp-n+m^2-nm+m-3np=(3p+m+1)(m-n).$$

★

Ejemplo 1.9 *: Factorizar el siguiente polinomio en productos de factores reales irreducibles*

$$p(t)=2t^2+7t-4.$$

Solución : En virtud que, el polinomio dado es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a=2$, $b=7$ y $c=-4$,

$$t=\frac{-(7)\pm\sqrt{(7)^2-4(2)(-4)}}{2(2)}=\frac{-7\pm\sqrt{49+32}}{4}=\frac{-7\pm\sqrt{81}}{4}=\frac{-7\pm 9}{4}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} t=\dfrac{-7+9}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \\[2ex] t=\dfrac{-7-9}{4}=\dfrac{-16}{4}=-4\end{cases}$$

así, el polinomio p tiene dos raíces reales, $t=\dfrac{1}{2}$ y $t=-4$, luego, la factorización de p es

$$p(t)=2\left(t-\frac{1}{2}\right)(t+4).$$

★

Ejemplo 1.10 : *Factorizar el siguiente polinomio en productos de factores reales irreducibles*

$$p(x) = 3x^2 + 2x + 4.$$

Solución : Puesto que, el polinomio dado es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 3$, $b = 2$ y $c = 4$,

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-48}}{6} = \frac{-2 \pm \sqrt{-44}}{6} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

así, el polinomio p **no** tiene raíces reales, por lo tanto, es un polinomio **irreducible** y su factorización es el mismo polinomio p. ★

Ejemplo 1.11 : *Factorizar el siguiente polinomio en productos de factores reales irreducibles*

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24.$$

Solución : En virtud que, el grado del polinomio es 3 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización.

Los divisores del término independiente, $a_0 = 24$, son ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 8, ± 12 y ± 24.

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ -1 & & -1 & 4 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & -6 & 30 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = -1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ 1 & & 1 & -2 & -12 \\ \hline & 1 & -2 & -12 & 12 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ -2 & & -2 & 10 & 0 \\ \hline & 1 & -5 & 0 & 24 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = -2$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ 2 & & 2 & -2 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

  Por lo tanto, $x = 2$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24 = (x-2)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -10 & 24 \\ 2 & & 2 & -2 & -24 \\ \hline & 1 & -1 & -12 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $q(x) = x^2 - x - 12$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -12$,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+7}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\[2ex] x = \dfrac{1-7}{2} = \dfrac{-6}{2} = -3 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene dos raíces reales, $x = 4$ y $x = -3$, luego, la factorización de q es

$$q(x) = (x-4)(x+3).$$

Luego, la factorización del polinomio p viene dada por

$$p(x) = (x-2)\,q(x) = (x-2)(x-4)(x+3).$$

★

Ejemplo 1.12 : *Factorizar el siguiente polinomio en productos de factores reales irreducibles*

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 32x^2 + 59x - 30.$$

Solución : En virtud que, el grado del polinomio es 4 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización

Los divisores del término independiente, $a_0 = 30$, son ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 15 y ± 30

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\ -1 & & -2 & 1 & 31 & -90 \\ \hline & 2 & -1 & -31 & 90 & -120 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = -1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\ 1 & & 2 & 3 & -29 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & -29 & 30 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 32x^2 + 59x - 30 = (x-1)\underbrace{\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Polinomio de } 3^{\text{er}} \text{ grado}}}},$$

donde el polinomio de tercer grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\
1 & & 2 & 3 & -29 & 30 \\
\hline
 & 2 & 3 & -29 & 30 & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \boxed{d} &
\end{array}$$

Factorizamos el polinomio $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30$, por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini. Volvemos a buscar las raíces en los divisores, excepto con $x = -1$.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -29 & 30 \\
1 & & 2 & 5 & -24 \\
\hline
 & 2 & 5 & -24 & 6
\end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **no** vuelve a ser raíz del polinomio.

- Para $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -29 & 30 \\
-2 & & -4 & 2 & 54 \\
\hline
 & 2 & -1 & -27 & 84
\end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = -2$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -29 & 30 \\
2 & & 4 & 14 & -30 \\
\hline
 & 2 & 7 & -15 & 0
\end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

  Por lo tanto, $x = 2$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio q se puede escribir como

$$q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30 = (x-2)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 2 & 3 & -29 & 30 \\
2 & & 4 & 14 & -30 \\
\hline
 & 2 & 7 & -15 & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} &
\end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = 2x^2 + 7x - 15$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 7$ y $c = -15$,

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-7+13}{4} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-7-13}{4} = -5 \end{cases}$$

así, el polinomio r tiene dos raíces reales, $x = \dfrac{3}{2}$ y $x = -5$, luego, la factorización de r es

$$r(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5).$$

Por lo tanto, el polinomio q, se factoriza como

$$q(x) = (x-2)\, r(x) = 2(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5).$$

Finalmente, la factorización del polinomio p viene dada por

$$p(x) = (x-1)\, q(x) = 2(x-1)(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5),$$

que es equivalente a

$$p(x) = (x-1)(x-2)(2x-3)(x+5).$$

★

Ejemplo 1.13 : *Factorizar el siguiente polinomio en productos de factores reales irreducibles*

$$p(t) = 2t^4 + 4t^2 - 6.$$

Solución : Observemos que el trinomio dado es de cuarto grado con la particularidad que los términos dados son de potencias pares, así, podemos proponer el cambio de variable

$$t^2 = z \qquad \Longrightarrow \qquad t^4 = z^2,$$

con lo que, el polinomio dado de cuarto grado en variable t se transforma en un polinomio de segundo grado en la nueva variable z, es decir,

$$p(z) = 2z^2 + 4z - 6,$$

puesto que, el polinomio es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$,

$$z = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} = \frac{-4 \pm 8}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{-4+8}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\[2ex] z = \dfrac{-4-8}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

así, el polinomio p en variable z tiene dos raíces reales, $z = 1$ y $z = -3$, luego, la factorización de p en variable z es

$$p(z) = 2(z-1)(z+3),$$

pero, $z = t^2$, luego, el polinomio p en variable t queda escrito como

$$p(t) = 2\left(t^2 - 1\right)\left(t^2 + 3\right),$$

como nos pide factorizar el polinomio en productos de factores reales irreducibles, veamos si las expresiones $\left(t^2 - 1\right)$ y $\left(t^2 + 3\right)$, son irreducibles.

- Para t^2-1 : Observemos que esta expresión es un producto notable de la forma suma por su diferencia, es decir, es de la forma
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
ya que,
$$t^2-1=(t)^2-(1)^2=(t+1)(t-1),$$
luego, t^2-1 se factoriza como
$$t^2-1=(t+1)(t-1).$$

- Para t^2+3 : Por ser un polinomio de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende su factorización. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=3$,
$$t=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-12}}{2}\longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$
esto implica que, la expresión t^2+3 es un polinomio **irreducible**, luego no se puede factorizar más de lo que ya está.

Finalmente, el polinomio $p(t)=2\left(t^2-1\right)\left(t^2+3\right)$, se factoriza como
$$p(t)=2t^4+4t^2-6=2(t+1)(t-1)\left(t^2+3\right).$$

★

Ejemplo 1.14 : *Factorizar* $a^4-x^2+2x-1.$

Solución : Observemos que la expresión a factorizar se puede escribir como
$$a^4-x^2+2x-1=a^4+\underbrace{\left(-x^2+2x-1\right)}_{\uparrow\ \boxed{\text{Factor común } -1}}=a^4-\left(x^2-2x+1\right),$$
y la expresión dentro del paréntesis es un cuadrado perfecto
$$x^2-2x+1=(x-1)^2,$$
por lo tanto,
$$a^4-\left(x^2-2x+1\right)=a^4-(x-1)^2,$$

Por otra parte, el término a^4 lo podemos escribir como $\left(a^2\right)^2$, y obtenemos
$$a^4-(x-1)^2=\left(a^2\right)^2-(x-1)^2,$$
lo cual representa el producto notable suma por su diferencia,
$$x^2-y^2=(x+y)(x-y),$$
de aquí ,
$$\left(a^2\right)^2-(x-1)^2=\left(a^2+(x-1)\right)\left(a^2-(x-1)\right)=\left(a^2+x-1\right)\left(a^2-x+1\right).$$

Luego, la factorización es
$$a^4-x^2+2x-1=\left(a^2+x-1\right)\left(a^2-x+1\right).$$

★

Ejemplo 1.15 *: Sean* $p(x) = 2x^2 - x - 30$ *y* $q(x) = x^2 - x - 6$. *Hallar* $p(x) \div q(x)$.

Solución : Puesto que, el grado del polinomio de numerador es igual al grado del polinomio del denominador se puede realizar la operación indicada.

Dividimos los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x - 30 & x^2 - x - 6 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 2x + 12 & 2 \\ \cline{1-1} x - 18 & \end{array}$$

de aquí,

$$2x^2 - x - 30 = (2)\left(x^2 - x - 6\right) + (x - 18),$$

dividimos cada término de la igualdad por el polinomio del denominador $q(x) = x^2 - x - 6$ y obtenemos

$$\frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6} = \frac{(2)\left(x^2 - x - 6\right)}{x^2 - x - 6} + \frac{x - 18}{x^2 - x - 6},$$

es decir,

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6} = 2 + \frac{x - 18}{x^2 - x - 6}.$$

★

Ejemplo 1.16 *: Sean* $p(x) = 3x - 4x^2 + 4x^3 - 4$ *y* $q(x) = 1 - 2x^2 - x$. *Hallar* $p(x) \div q(x)$.

Solución : Observemos que el grado del polinomio de numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, por lo tanto se puede realizar la operación indicada.

Dividimos los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 4x^3 - 4x^2 + 3x - 4 & -2x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} -4x^3 - 2x^2 + 2x \phantom{{}-4} & -2x + 3 \\ \cline{1-1} -6x^2 + 5x - 4 & \\ 6x^2 + 3x - 3 & \\ \cline{1-1} 8x - 7 & \end{array}$$

de aquí,

$$4x^3 - 4x^2 + 3x - 4 = (-2x + 3)\left(-2x^2 - x + 1\right) + (8x - 7),$$

dividimos cada término de la igualdad por el polinomio del denominador $q(x) = -2x^2 - x + 1$ y obtenemos

$$\frac{4x^3 - 4x^2 + 3x - 4}{-2x^2 - x + 1} = \frac{(-2x + 3)\left(-2x^2 - x + 1\right)}{-2x^2 - x + 1} + \frac{8x - 7}{-2x^2 - x + 1},$$

es decir,

$$p(x) \div q(x) = \frac{4x^3 - 4x^2 + 3x - 4}{1 - 2x^2 - x} = -2x + 3 + \frac{8x - 7}{1 - 2x^2 - x}.$$

★

Ejemplo 1.17 *: Descomponer en fracciones simples la siguiente expresión* $\dfrac{1 - x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 - x + 3}$.

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios. Factorizamos el polinomio del denominador, en virtud que, el grado del polinomio es 3 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización.

Los divisores del término independiente, $a_0 = 3$, son ± 1 y ± 3.

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = -1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x+1)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ -1 & & -1 & 4 & -3 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = x^2 - 4x + 3$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -4$ y $c = 3$,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{4+2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \\ x = \dfrac{4-2}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \end{array} \right.$$

así, el polinomio r tiene dos raíces reales, $x = 1$ y $x = 3$, luego, la factorización de r es

$$r(x) = (x-1)(x-3).$$

Luego, la factorización del polinomio $q(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ viene dada por

$$x^3 - 3x^2 - x + 3 = (x-1)(x+1)(x-3).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{1 - x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{1 - x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1 - x^2 - 8x}{x^3 - 3x^2 - x + 3} = \frac{A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-3)},$$

de aquí,

$$1 - x^2 - 8x = A(x+1)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x+1).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=1$, sustituimos en la igualdad $1-x^2-8x=A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)$ y se tiene

$$1-(1)^2-8(1)=A((1)+1)((1)-3)+B((1)-1)((1)-3)+C((1)-1)((1)+1)$$

$$\Longrightarrow \quad -8=A(2)(-2)+B(0)(-2)+C(0)(2) \quad \Longrightarrow \quad -8=-4A \quad \Longrightarrow \quad A=2,$$

de aquí $\boxed{A=2}$

Si $x=-1$, sustituimos en la igualdad $1-x^2-8x=A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)$ y se tiene

$$1-(-1)^2-8(-1)=A((-1)+1)((-1)-3)+B((-1)-1)((-1)-3)+C((-1)-1)((-1)+1)$$

$$\Longrightarrow \quad 8=A(0)(-4)+B(-2)(-4)+C(-2)(0) \quad \Longrightarrow \quad 8=8B \quad \Longrightarrow \quad B=1,$$

de aquí $\boxed{B=1}$

Si $x=3$, sustituimos en la igualdad $1-x^2-8x=A(x+1)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x+1)$ y se tiene

$$1-(3)^2-8(3)=A((3)+1)((3)-3)+B((3)-1)((3)-3)+C((3)-1)((3)+1)$$

$$\Longrightarrow \quad -32=A(4)(0)+B(2)(0)+C(2)(4) \quad \Longrightarrow \quad -32=8C \quad \Longrightarrow \quad C=-4,$$

de aquí $\boxed{C=-4}$

Entonces

$$\frac{1-x^2-8x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-x^2-8x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{x-3}.$$

Luego, la descomposición en fracciones simples viene dada por

$$\frac{1-x^2-8x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x-3}.$$

★

Ejemplo 1.18 *: Descomponer en fracciones simples la siguiente expresión* $\dfrac{x+x^2+1}{x^3+x}$.

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios. Factorizamos el polinomio del denominador, observemos que el término x es factor común en dicho polinomio, por lo tanto factorizamos usando factor común

$$x^3+x=x\left(x^2+1\right).$$

Para $r(x)=x^2+1$: Por ser un polinomio de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende su factorización. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=1$,

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

esto implica que, la expresión x^2+1 es un polinomio irreducible, luego no se puede factorizar más de lo que ya está.

Finalmente, el polinomio $q(x)=x^3+x$, se factoriza como

$$q(x)=x^3+x=x\left(x^2+1\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x}{x\left(x^2+1\right)},$$

de aquí,

$$x+x^2+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x=0$, sustituimos en la igualdad $x+x^2+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x$ y se tiene

$$(0)+(0)^2+1=A\left((0)^2+1\right)+(B(0)+C)(0) \quad \Longrightarrow \quad 1=A(1)+(0+C)(0) \quad \Longrightarrow \quad 1=A,$$

de aquí $\boxed{A=1}$

Si $x=1$, sustituimos en la igualdad $x+x^2+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x$ y se tiene

$$(1)+(1)^2+1=A\left((1)^2+1\right)+(B(1)+C)(1) \quad \Longrightarrow \quad 3=A(2)+(B+C)(1) \quad \Longrightarrow \quad 3=2A+B+C,$$

como $A=1$, obtenemos

$$3=2(1)+B+C \qquad \Longrightarrow \qquad 3=2+B+C,$$

de aquí $\boxed{B+C=1}$

Si $x=-1$, sustituimos en la igualdad $x+x^2+1=A\left(x^2+1\right)+(Bx+C)\,x$ y se tiene

$$(-1)+(-1)^2+1=A\left((-1)^2+1\right)+(B(-1)+C)(-1) \quad \Longrightarrow \quad 1=A(2)+(-B+C)(-1)$$

$$\Longrightarrow \quad 1=2A+B-C,$$

como $A=1$, obtenemos

$$1=2(1)+B-C \qquad \Longrightarrow \qquad 1=2+B-C,$$

de aquí $\boxed{B-C=-1}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} B+C=1 \\ B-C=-1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{B=0} \quad \text{y} \quad \boxed{C=1.}$$

Entonces

$$\frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}.$$

Luego, la descomposición en fracciones simples viene dada por

$$\frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}.$$

★

Ejemplo 1.19 *: Descomponer en fracciones simples la siguiente expresión* $\dfrac{13x+x^2+48}{119x+19x^2+x^3+245}$.

Solución : Como el grado del polinomio de numerador es menor que el grado del polinomio del denominador no se dividen los polinomios. Factorizamos el polinomio del denominador, en virtud que, el grado del polinomio es 3 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización

Los divisores del término independiente, $a_0 = 245$, son ± 1, ± 5, ± 7, ± 35, ± 49, y ± 245

- Para $x=-1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 19 & 119 & 245 \\ -1 & & -1 & -18 & -101 \\ \hline & 1 & 18 & 101 & 144 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x=-1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x=1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 19 & 119 & 245 \\ 1 & & 19 & 38 & 157 \\ \hline & 1 & 38 & 157 & 402 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x=1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x=-5$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 19 & 119 & 245 \\ -5 & & -5 & -70 & -245 \\ \hline & 1 & 14 & 49 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x=-5$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$q(x)=x^3+19x^2+119x+245=(x+5)\underbrace{\left(ax^2+bx+c\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 19 & 119 & 245 \\ -5 & & -5 & -70 & -245 \\ \hline & 1 & 14 & 49 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = x^2 + 14x + 49$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 14$ y $c = 49$,

$$x = \frac{-(14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(1)(49)}}{2(1)} = \frac{-14 \pm \sqrt{196-196}}{2} = \frac{-14 \pm \sqrt{0}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{-14+0}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \\ \\ x = \dfrac{-14-0}{2} = \dfrac{-14}{2} = -7 \end{array} \right.$$

así, el polinomio r tiene dos raíces reales, $x = -7$ y $x = -7$, luego, la factorización de r es

$$r(x) = (x+7)(x+7) = (x+7)^2 .$$

Luego, la factorización del polinomio $q(x) = x^3 + 119x + 19x^2 + 245$ viene dada por

$$x^3 + 119x + 19x^2 + 245 = (x+5)\, r(x) = (x+5)(x+7)^2 .$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B y C, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)}{(x+7)^2 (x+5)},$$

de aquí,

$$13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5) .$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = -5$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(-5) + (-5)^2 + 48 = A((-5)+7)^2 + B((-5)+5)((-5)+7) + C((-5)+5)$$

$$\Longrightarrow \quad -65 + 25 + 48 = A(2)^2 + B(0)(2) + C(0) \quad \Longrightarrow \quad 8 = 4A,$$

de aquí $\boxed{A = 2.}$

Si $x = -7$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(-7) + (-7)^2 + 48 = A((-7)+7)^2 + B((-7)+5)((-7)+7) + C((-7)+5)$$

$$\Longrightarrow \quad -91 + 49 + 48 = A(0)^2 + B(-2)(0) + C(-2) \quad \Longrightarrow \quad 6 = -2C,$$

de aquí $\boxed{C = -3.}$

Si $x = 0$, sustituimos en la igualdad $13x + x^2 + 48 = A(x+7)^2 + B(x+5)(x+7) + C(x+5)$ y se tiene

$$13(0) + (0)^2 + 48 = A((0)+7)^2 + B((0)+5)((0)+7) + C((0)+5)$$

$$\Longrightarrow \quad 0 + 0 + 48 = A(7)^2 + B(5)(7) + C(5) \quad \Longrightarrow \quad 48 = 49A + 35B + 5C,$$

como $A = 2$ y $C = -3$, se tiene que

$$48 = 49(2) + 35B + 5(-3) \qquad \Longrightarrow \qquad 48 = 98 + 35B - 15 \qquad \Longrightarrow \qquad -35 = 35B,$$

de aquí $\boxed{B = -1.}$

Entonces

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x+7} + \frac{C}{(x+7)^2}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x+7} + \frac{-3}{(x+7)^2}.$$

Luego, la descomposición en fracciones simples viene dada por

$$\frac{13x + x^2 + 48}{119x + 19x^2 + x^3 + 245} = \frac{2}{x+5} + \frac{-1}{x+7} + \frac{-3}{(x+7)^2}.$$

★

Ejemplo 1.20 *: Descomponer en fracciones simples la siguiente expresión* $\dfrac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6}$.

Solución : Observemos que el grado del polinomio de numerador es igual al grado del polinomio del denominador, así, debemos dividir los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - x - 30 & x^2 - x - 6 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 2x + 12 & 2 \\ \cline{1-1} x - 18 & \end{array}$$

es decir,

$$\frac{2x^2 - x - 30}{x^2 - x - 6} = 2 + \frac{x - 18}{x^2 - x - 6}.$$

Descomponemos en fracciones simples a la expresión $\dfrac{x - 18}{x^2 - x - 6}$, para ello factorizamos el polinomio del denominador $q(x) = x^2 - x - 6$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -6$,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+5}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\[2ex] x = \dfrac{1-5}{2} = \dfrac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene dos raíces reales, $x = 3$ y $x = -2$, luego, la factorización del polinomio $q(x) = x^2 - x - 6$ viene dada por

$$x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

Buscamos los valores de las constantes A y B, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x - 18}{x^2 - x - 6} = \frac{A(x-3) + B(x+2)}{(x+2)(x-3)},$$

de aquí,

$$x - 18 = A(x-3) + B(x+2).$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = 3$, sustituimos en la igualdad $x - 18 = A(x-3) + B(x+2)$ y se tiene

$$(3) - 18 = A((3)-3) + B((3)+2) \quad \Longrightarrow \quad -15 = A(0) + B(5) \quad \Longrightarrow \quad -15 = 5B,$$

de aquí $\boxed{B = \dfrac{-15}{5} = -3}$

Si $x = -2$, sustituimos en la igualdad $x - 18 = A(x-3) + B(x+2)$ y se tiene

$$(-2) - 18 = A((-2)-3) + B((-2)+2) \quad \Longrightarrow \quad -20 = A(-5) + B(0) \quad \Longrightarrow \quad -20 = -5A,$$

de aquí $\boxed{A = \dfrac{-20}{-5} = 4}$

Entonces

$$\frac{x-18}{x^2-x-6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x-18}{x^2-x-6} = \frac{4}{x+2} + \frac{-3}{x-3}.$$

Luego, la descomposición en fracciones simples viene dada por

$$\frac{2x^2-x-30}{x^2-x-6} = 2 + \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x-3}.$$

★

Ejemplo 1.21 : *Descomponer en fracciones simples la siguiente expresión* $\dfrac{2x^5-7x^4+6x^3-5x^2-2x+2}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}$.

Solución : Observemos que el grado del polinomio de numerador es igual al grado del polinomio del denominador, así, debemos dividir los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2x^5-7x^4+6x^3-5x^2-2x+2 & x^4-2x^3+2x^2-2x+1 \\ \cline{2-2} -2x^5+4x^4-4x^3+4x^2-2x & 2x-3 \\ \cline{1-1} -3x^4+2x^3-x^2-4x+2 & \\ 3x^4-6x^3+6x^2-6x+3 & \\ \cline{1-1} -4x^3+5x^2-10x+5 & \end{array}$$

es decir,

$$\frac{2x^5-7x^4+6x^3-5x^2-2x+2}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1} = 2x - 3 + \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}.$$

Descomponemos en fracciones simples a la expresión

$$\frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1},$$

para ello factorizamos el polinomio del denominador $q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$, en virtud que, el grado del polinomio es 4 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización.

Los divisores del término independiente, $a_0 = 1$, son ± 1

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & & -1 & 3 & -5 & 7 \\ \hline & 1 & -3 & 5 & -7 & 8 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = -1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = 1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$q(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)\underbrace{\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Polinomio de } 3^{\text{er}} \text{ grado}}}},$$

donde el polinomio de tercer grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \boxed{d} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = x^3 - x^2 + x - 1$, por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini. Volvemos a buscar las raíces en los divisores, excepto con $x = -1$.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = 1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio r se puede escribir como

$$r(x) = x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $w(x) = x^2 + 1$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 1$ y $c = -15$,

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

esto implica que, el polinomio $w(x) = x^2 + 1$ es un polinomio **irreducible**, luego no se puede factorizar más de lo que ya está. Por lo tanto, el polinomio r, se factoriza como

$$r(x) = (x-1)\, w(x) = (x-1)\left(x^2+1\right).$$

Finalmente, la factorización del polinomio q viene dada por

$$q(x) = (x-1)\, r(x) = (x-1)(x-1)\left(x^2+1\right),$$

que es equivalente a

$$q(x) = (x-1)^2\left(x^2+1\right),$$

es decir,

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2\left(x^2+1\right).$$

Escribimos las fracciones simples correspondientes

$$\frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}.$$

Buscamos los valores de las constantes A, B, C y D, para los cuales la igualdad se satisfaga, para ello aplicamos el método de los coeficientes indeterminados

$$\frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{5x^2 - 10x - 4x^3 + 5}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = \frac{A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)},$$

de aquí,

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2.$$

Para obtener los valores de las constantes le damos valores arbitrarios a x.

Si $x = 1$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5(1)^2 - 10(1) - 4(1)^3 + 5 = A((1)-1)\left((1)^2+1\right) + B\left((1)^2+1\right) + (C(1)+D)((1)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 5 - 10 - 4 + 5 = A(0)(2) + B(2) + (C+D)(0)^2 \quad \Longrightarrow \quad -4 = 2B,$$

de aquí $\boxed{B = -2.}$

Si $x = 0$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2 - 10x - 4x^3 + 5 = A(x-1)\left(x^2+1\right) + B\left(x^2+1\right) + (Cx+D)(x-1)^2$$

y se tiene

$$5\,(0)^2-10\,(0)-4\,(0)^3+5=A\,((0)-1)\left((0)^2+1\right)+B\left((0)^2+1\right)+(C\,(0)+D)\,((0)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 0-0-0+5=A\,(-1)\,(1)+B\,(1)+(D)\,(-1)^2 \quad \Longrightarrow \quad 5=-A+B+D,$$

como $B=-2$, se tiene que

$$5=-A+(-2)+D \qquad \Longrightarrow \qquad 7=-A+D,$$

de aquí $\boxed{-A+D=7.}$

Si $x=-1$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2-10x-4x^3+5=A\,(x-1)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\,(x-1)^2$$

y se tiene

$$5\,(-1)^2-10\,(-1)-4\,(-1)^3+5=A\,((-1)-1)\left((-1)^2+1\right)+B\left((-1)^2+1\right)+(C\,(-1)+D)\,((-1)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 5+10+4+5=A\,(-2)\,(2)+B\,(2)+(-C+D)\,(-2)^2 \quad \Longrightarrow \quad 24=-4A+2B-4C+4D,$$

como $B=-2$, se tiene que

$$24=-4A+2\,(-2)-4C+4D \qquad \Longrightarrow \qquad 28=-4A-4C+4D,$$

de aquí $\boxed{-4A-4C+4D=28.}$

Si $x=2$, sustituimos en la igualdad

$$5x^2-10x-4x^3+5=A\,(x-1)\left(x^2+1\right)+B\left(x^2+1\right)+(Cx+D)\,(x-1)^2$$

y se tiene

$$5\,(2)^2-10\,(2)-4\,(2)^3+5=A\,((2)-1)\left((2)^2+1\right)+B\left((2)^2+1\right)+(C\,(2)+D)\,((2)-1)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 20-20-32+5=A\,(1)\,(5)+B\,(5)+(2C+D)\,(1)^2 \quad \Longrightarrow \quad -27=5A+5B+2C+D,$$

como $B=-2$, se tiene que

$$-27=5A+5\,(-2)+2C+D \qquad \Longrightarrow \qquad -17=5A+2C+D,$$

de aquí $\boxed{5A+2C+D=-17.}$

Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} -A+D=7 \\ -4A-4C+4D=28 \\ 5A+2C+D=-17 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{A=-4} \ \boxed{C=0} \ \boxed{D=3}$$

Entonces

$$\frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{5x^2-10x-4x^3+5}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}=\frac{-4}{x-1}+\frac{-2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x^2+1}.$$

Luego, la descomposición en fracciones simples viene dada por

$$\frac{2x^5 - 7x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 2x + 2}{2x^2 - 2x - 2x^3 + x^4 + 1} = 2x - 3 - \frac{4}{x-1} - \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{3}{x^2+1}.$$

★

Ejemplo 1.22 *: Completar cuadrado en el polinomio* $p(x) = x^2 + 4x - 6.$

Solución : Es conocido que, si se tiene el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c,$ para obtener la completación de cuadrado de dicho polinomio debemos sacar factor común a y sumar y restar la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, en nuestro caso, $a = 1,$ $b = 4$ y $c = -6,$ así, debemos sumar y restar

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{(4)}{2(1)}\right)^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 = (2)^2 = 4,$$

se tiene

$$x^2 + 4x - 6 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Sumamos y restamos } 4}}}{=} x^2 + 4x - 6 + 4 - 4 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Ley asociativa}}}}{=} \left(x^2 + 4x + 4\right) + (-6 - 4) = \underbrace{\left(x^2 + 2(x)(2) + (2)^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Cuadrado perfecto} \\ a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2}}}} - 10 = (x+2)^2 - 10.$$

Luego,

$$x^2 + 4x - 6 = (x+2)^2 - 10.$$

★

Ejemplo 1.23 *: Completar cuadrado en el polinomio* $p(x) = 3x^2 - 5x + 7.$

Solución : Es conocido que, si se tiene el polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c,$ para obtener la completación de cuadrado de dicho polinomio debemos sacar factor común a y sumar y restar la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$, en nuestro caso, $a = 3,$ $b = -5$ y $c = 7,$ así, debemos sumar y restar

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{(-5)}{2(3)}\right)^2 = \left(\frac{-5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36},$$

se tiene

$$3x^2 - 5x + 7 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } 3}}}{=} 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{3}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Sumamos y restamos } \frac{25}{36}}}}{=} 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{7}{3} + \frac{25}{36} - \frac{25}{36}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Ley asociativa}}}}{=} 3\left(\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \left(\frac{7}{3} - \frac{25}{36}\right)\right)$$

$$= 3\left(\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{84-25}{36}\right) = 3\left(\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{59}{36}\right) = 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + 3\left(\frac{59}{36}\right)$$

$$= 3\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{59}{12} = 3\left(x^2 - \frac{2}{2}\frac{5}{3}x + \frac{25}{36}\right) + \frac{59}{12} = 3\underbrace{\left(x^2 - 2\,\frac{5}{6}\,x + \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Cuadrado perfecto} \\ a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2}}}} + \frac{59}{12}$$

$$= 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{12}.$$

Luego,

$$3x^2 - 5x + 7 = 3\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{59}{12}.$$

★

Ejemplo 1.24 *: Demuestre que si* a *y* b *son números reales arbitrarios, entonces* $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

Demostración : Tenemos que, la expresión $a - b$ se puede escribir como

$$\underbrace{a-b}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } -1}}} = -\left(-a+b\right) = -\left(b-a\right),$$

es decir,

$$a - b = -\left(b-a\right),$$

elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$(a-b)^2 = \left(-\left(b-a\right)\right)^2 = (-1)^2\left(b-a\right)^2 = \left(b-a\right)^2.$$

Luego,

$$(a-b)^2 = (b-a)^2.$$

★

Ejemplo 1.25 *: Demuestre que si* a *y* b *son números reales arbitrarios, entonces* $(a-b)^3 = -(b-a)^3$.

Demostración : Tenemos que, la expresión $a - b$ se puede escribir como

$$\underbrace{a-b}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } -1}}} = -\left(-a+b\right) = -\left(b-a\right),$$

es decir,

$$a - b = -\left(b-a\right),$$

elevando al cubo a ambos lados de la igualdad, se obtiene

$$(a-b)^3 = \left(-\left(b-a\right)\right)^3 = (-1)^3\left(b-a\right)^3 = -\left(b-a\right)^3.$$

Luego,

$$(a-b)^3 = -(b-a)^3.$$

★

Ejemplo 1.26 *: Simplificar la expresión* $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$.

Solución : Aplicamos la conjugada

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)} = \frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{(x-2)\left(\sqrt{x}+\sqrt{2}\right)}{x-2} = \sqrt{x}+\sqrt{2}.$$

Por lo tanto,

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \sqrt{x}+\sqrt{2}.$$

★

Ejemplo 1.27 : *Simplificar la expresión* $\dfrac{6x - x^2 - 8}{\sqrt{x} + 2}$.

Solución : Aplicamos la conjugada

$$\frac{6x - x^2 - 8}{\sqrt{x} + 2} = \frac{6x - x^2 - 8}{\sqrt{x} + 2}\,\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\left(6x - x^2 - 8\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{\left(\sqrt{x} + 2\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)} = \frac{\left(6x - x^2 - 8\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - (2)^2}$$

$$= \frac{\left(6x - x^2 - 8\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{x - 4}.$$

Factorizamos el polinomio $p(x) = 6x - x^2 - 8$, por ser un polinomio de grado 2, aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = 6$ y $c = -8$, para obtener sus raíces y así, su factorización

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-6 + 2}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\[2ex] x = \dfrac{-6 - 2}{-2} = \dfrac{-8}{-2} = 4 \end{cases}$$

así, el polinomio p tiene dos raíces reales, $x = 2$ y $x = 4$, luego, la factorización de p es

$$p(x) = -(x - 2)(x - 4).$$

Entonces

$$\frac{\left(6x - x^2 - 8\right)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{x - 4} = \frac{-(x - 2)(x - 4)\left(\sqrt{x} - 2\right)}{x - 4} = -(x - 2)\left(\sqrt{x} - 2\right).$$

Luego,

$$\frac{6x - x^2 - 8}{\sqrt{x} + 2} = -(x - 2)\left(\sqrt{x} - 2\right).$$

★

Ejemplo 1.28 : *Racionalizar* $\dfrac{3x - 3}{(10x + 17)^{1/3} - 3}$.

Solución : Aplicando la conjugada

$$\frac{3x - 3}{(10x + 17)^{1/3} - 3} = \frac{(3x - 3)}{\left((10x + 17)^{1/3} - 3\right)}\,\frac{\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}{\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}$$

$$= \frac{(3x - 3)\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}{\left((10x + 17)^{1/3}\right)^3 - (3)^3} = \frac{(3x - 3)\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}{10x + 17 - 27}$$

$$= \frac{(3x - 3)\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}{10x - 10} = \frac{3(x - 1)\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right)}{10(x - 1)}$$

$$= \frac{3}{10}\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right).$$

Luego,

$$\frac{3x - 3}{(10x + 17)^{1/3} - 3} = \frac{3}{10}\left((10x + 17)^{2/3} + 3(10x + 17)^{1/3} + 9\right).$$

★

Ejemplo 1.29 : *Efectuar la operación indicada, factorizar y simplificar, si es posible*

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}.$$

Solución : Observemos que x^2-25 es un producto notable de la forma suma por su diferencia, ya que,

$$x^2-25=(x)^2-(5)^2=(x+5)(x-5),$$

con lo que se factoriza como

$$x^2-25=(x+5)(x-5)$$

así,

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}=\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{(x+5)(x-5)}$$

por lo tanto, el denominador común es $(x+5)(x-5)$, entonces,

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{(x+5)(x-5)}&=\frac{-(x+5)(x+3)-(x-5)(x-5)+(1)\left(2x^2+30\right)}{(x+5)(x-5)}\\&=\frac{-\left(x^2+8x+15\right)-\left(x^2-10x+25\right)+\left(2x^2+30\right)}{(x+5)(x-5)}\\&=\frac{-x^2-8x-15-x^2+10x-25+2x^2+30}{(x+5)(x-5)}\\&=\frac{2x-10}{(x+5)(x-5)}=\frac{2(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{2}{x+5}\qquad \text{si } x\neq 5.\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}=\frac{2}{x+5}\qquad \text{si } x\neq 5.$$

★

Ejemplo 1.30 : *Resolver la siguiente ecuación* $\frac{1}{2}-2x=3-\frac{2}{3}x.$

Solución : Se tiene

$$\frac{1}{2}-2x=3-\frac{2}{3}x \implies -2x+\frac{2}{3}x=3-\frac{1}{2} \implies \left(-2+\frac{2}{3}\right)x=3-\frac{1}{2}$$

$$\implies \left(\frac{-6+2}{3}\right)x=\frac{6-1}{2} \implies \frac{-4}{3}x=\frac{5}{2} \implies x=\frac{5}{2}\,\frac{-3}{4} \implies x=-\frac{15}{8}.$$

Así, la solución de la ecuación es $x=-\frac{15}{8}$. ★

Ejemplo 1.31 : *Resolver la siguiente ecuación* $x^3+5x^2-x=5.$

Solución : Observemos que resolver la ecuación dada es equivalente a resolver la ecuación

$$x^3+5x^2-x-5=0,$$

es decir, debemos encontrar los valores x para los cuales el valor numérico del polinomio $p(x)=x^3+5x^2-x-5$ sea cero. Por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0=-5$, son ± 1, y ± 5.

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & & -1 & -4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = -1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x) = x^3 + 5x^2 - x - 5 = (x+1)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini donde se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 5 & -1 & -5 \\ -1 & & -1 & -4 & 5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = x^2 + 4x - 5$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 4$ y $c = -5$,

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ \\ x = \dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene dos raíces reales, $x = 1$ y $x = -5$.

Luego, las soluciones de la ecuación $x^3 + 5x^2 - x = 5$ son $x = -1$, $x = 1$ y $x = -5$. ★

Ejemplo 1.32 : *Resolver la siguiente ecuación* $5x^2 - x + 5 = 0$.

Solución : Por ser una ecuación de segundo grado usamos la resolvente para $a = 5$, $b = -1$ y $c = 5$, para obtener la solución de la misma,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{1 \pm \sqrt{1-100}}{10} = \frac{1 \pm \sqrt{-99}}{10} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

así, la ecuación no tiene solución en los números reales, por lo tanto, la solución es vacía. ★

Ejemplo 1.33 : *Resolver la siguiente ecuación* $\dfrac{1}{a^2-4} + \dfrac{3}{a-2} = \dfrac{2}{a+2}$.

Solución : La ecuación dada es equivalente a

$$\frac{1}{a^2-4} + \frac{3}{a-2} - \frac{2}{a+2} = 0.$$

Buscamos el(los) valor(es) de la incognita a para el(los) cual(es) se cumpla la igualdad dada.

Observemos que $a^2 - 4$ es un producto notable de la forma suma por su diferencia, ya que,

$$a^2 - 4 = (a)^2 - (2)^2 = (a+2)(a-2),$$

con lo que se factoriza como

$$a^2 - 4 = (a+2)(a-2),$$

así,

$$0 = \frac{1}{a^2-4} + \frac{3}{a-2} - \frac{2}{a+2} = \frac{1}{(a+2)(a-2)} + \frac{3}{a-2} - \frac{2}{a+2},$$

por lo tanto, el denominador común es $(a+2)(a-2)$, entonces,

$$0 = \frac{1}{(a+2)(a-2)} + \frac{3}{a-2} - \frac{2}{a+2} = \frac{1+3(a+2)-2(a-2)}{(a+2)(a-2)} = \frac{1+3a+6-2a+4}{(a+2)(a-2)} = \frac{a+11}{(a+2)(a-2)},$$

es decir,

$$\frac{a+11}{(a+2)(a-2)} = 0,$$

de aquí, un cociente es igual a cero, si el numerador es igual a cero, para todo aquellos valores que hacen que el denominador sea diferente de cero, esto significa

$$\frac{a+11}{(a+2)(a-2)} = 0 \qquad \text{si} \qquad a+11=0, \qquad \text{siempre y cuando} \qquad (a+2)(a-2) \neq 0,$$

por lo tanto,

$$a = -11.$$

Luego, la solución de la ecuación es $a = -11$. ★

Ejemplo 1.34 *: Sean a y b constantes. Resuelva la ecuación literal*

$$\frac{a}{2y} + \frac{a}{3y} + \frac{a}{y} = \frac{b}{3}.$$

Solución : Observemos que el lado derecho de la igualdad tiene como factor común a a, por lo tanto

$$\frac{a}{2y} + \frac{a}{3y} + \frac{a}{y} = \frac{b}{3} \quad \Longrightarrow \quad a\left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{y}\right) = \frac{b}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2y} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{y} = \frac{b}{3a},$$

para $a \neq 0$, resolvemos la suma del lado derecho de la igualdad, donde el denominador común es $6y$

$$\frac{1}{2y} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{y} = \frac{3+2+6}{6y} = \frac{11}{y},$$

con lo que la igualdad queda

$$\frac{11}{y} = \frac{b}{3a},$$

despejando y

$$\frac{11}{y} = \frac{b}{3a} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{11} = \frac{3a}{b} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{33a}{b},$$

para $b \neq 0$, luego, $y = \dfrac{33a}{b}$. ★

Ejemplo 1.35 *: Despejar R_i de la ecuación*

$$I = \frac{E}{R_\epsilon - R_i}.$$

Solución : Tenemos que

$$I = \frac{E}{R_\epsilon - R_i} \quad \Longrightarrow \quad I(R_\epsilon - R_i) = E \quad \Longrightarrow \quad R_\epsilon - R_i = \frac{E}{I} \quad \Longrightarrow \quad R_\epsilon = \frac{E}{I} + R_i,$$

de aquí,

$$R_i = R_\epsilon - \frac{E}{I}$$

★

Ejemplo 1.36 *: Despejar m de la ecuación*

$$\triangle E_c = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

Solución : Tenemos que,

$$\triangle E_c = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \Longrightarrow \quad \triangle E_c = \frac{m}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\triangle E_c}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{m}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{2\,\triangle E_c}{v_2^2 - v_1^2} = m.$$

Por lo tanto,

$$m = \frac{2\,\triangle E_c}{v_2^2 - v_1^2}.$$

★

Ejemplo 1.37 *: Dadas las siguientes proposiciones, escribir su contrarrecíproco*

1. *Si el cuadrado de un número entero es un número par, entonces este número entero es par.*
2. *Si la suma de las cifras de un entero no es múltiplo de tres, el entero tampoco es múltiplo de tres.*
3. *Sean a, b y c números reales, si $a + c \neq b + c$. Entonces $a \neq b$.*

Solución : 1. **Proposición :** Si el cuadrado de un número entero es un número par, entonces este número entero es par.

Contrarrecíproco : Si un entero no es par, entonces su cuadrado no es par.

2. **Proposición :** Si la suma de las cifras de un entero no es múltiplo de tres, el entero tampoco es múltiplo de tres.

Contrarrecíproco : Si un entero es múltiplo de tres, la suma de sus cifras es múltiplo de tres.

3. **Proposición :** Sean a, b y c números reales, si $a + c \neq b + c$. Entonces $a \neq b$.
Contrarrecíproco : Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$. ★

Ejemplo 1.38 *: Demuestre que si n es un entero y n^2 es un número par, entonces n es un número par.*

Demostración : Demostremos esta proposición por **contradicción**, es decir, supongamos que n^2 es un número par, pero n es un número impar.

Si n es un número impar, entonces existe un $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$n = 2k + 1,$$

por lo tanto, el cuadrado de n viene dado por

$$n^2 = (2k+1)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

lo cual se puede escribir como

$$n^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad n^2 = 2k_1 + 1,$$

donde $k_1 = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, es decir, n^2 es impar, pero esto es una contradicción, ya que n^2 es un número par.

Por lo que concluimos que si n es un entero y n^2 es un número par, entonces n tiene que ser un número par. ★

Ejemplo 1.39 *: Demuestre que* $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

Demostración : Demostremos esta proposición por **contradicción**, supongamos que $\sqrt{2}$ no es un número irracional, es decir, supongamos que $\sqrt{2}$ es un número racional.

Entonces existen dos enteros primos positivos, a y b, tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}, \qquad \text{es decir,} \qquad 2 = \frac{a^2}{b^2}, \qquad \text{con lo que,} \qquad 2b^2 = a^2,$$

puesto que $a^2 = 2b^2$, se tiene que a^2 es un número par, de aquí, por el ejemplo 1.38, se concluye que a es un número par, por lo que existe un entero positivo $k \in \mathbb{Z}$, tal que

$$a = 2k,$$

en virtud que,

$$2b^2 = a^2 \quad \Longrightarrow \quad 2b^2 = (2k)^2 \quad \Longrightarrow \quad 2b^2 = 4k^2 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = 2k^2,$$

es decir, b^2 es un nḿero par, por lo que b también es un número par, ver ejemplo 1.38.

Se tiene que a y b son números pares, es decir, que son múltiplos de 2, pero esto contradice que sean números primos, por lo tanto, $\sqrt{2}$ es un número irracional. ★

Ejemplo 1.40 *: Demuestre que* $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$.

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n = 1$, así,

$$1 \stackrel{?}{=} \frac{(1)\,((1)+1)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 \stackrel{?}{=} \frac{(1)\,(2)}{2} \quad \Longrightarrow \quad 1 = 1 \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + h = \frac{h\,(h+1)}{2}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n = h + 1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + h + \overbrace{(h+1)}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}} \stackrel{?}{=} \frac{(h+1)\,((h+1)+1)}{2}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + h}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}} + (h+1) = \frac{h\,(h+1)}{2} + (h+1) = \frac{h\,(h+1) + 2\,(h+1)}{2}$$

$$\stackrel{\boxed{\text{Factor común } h+1}}{=} \frac{(h+1)\,(h+2)}{2} = \frac{(h+1)\,((h+1)+1)}{2},$$

por lo tanto,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + h + (h+1) = \frac{(h+1)\,((h+1)+1)}{2} \qquad \text{se cumple}$$

entonces, queda demostrado que

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

★

Ejemplo 1.41 *: Demuestre que* $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$\frac{1}{(3(1)-2)(3(1)+1)}\overset{?}{=}\frac{(1)}{3(1)+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1\cdot 4}\overset{?}{=}\frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n=h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}=\frac{h}{3h+1}.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la igualdad para $n=h+1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}+\overbrace{\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}}^{\boxed{\text{Nuevo término en la suma}}}\overset{?}{=}\frac{(h+1)}{3(h+1)+1}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$\overbrace{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h}{3h+1}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}=\frac{h}{3h+1}+\frac{1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{h(3(h+1)+1)+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{h(3h+4)+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{3h^2+4h+1}{(3h+1)(3(h+1)+1)}$$

$$=\frac{(h+1)(3h+1)}{(3h+1)(3(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3(h+1)+1},$$

por lo tanto,

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3h-2)(3h+1)}+\frac{1}{(3(h+1)-2)(3(h+1)+1)}=\frac{(h+1)}{3(h+1)+1},$$

se cumple la igualdad, entonces, queda demostrado que

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}.$$

★

Ejemplo 1.42 *: Demuestre que la suma*

$$A_n=3^{2n+1}+2^{n+2}$$

es múltiplo de 7*, para cualquiera número entero* $n\geq 1$.

Demostración : Usando inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la igualdad se cumple para $n=1$, así,

$$3^{2(1)+1}+2^{(1)+2}=3^3+2^3=27+8=35=7(5) \qquad \Longrightarrow \qquad 3^{2(1)+1}+2^{(1)+2} \text{ es múltiplo de } 7 \quad \leftarrow \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir, la siguiente igualdad es cierta

$$3^{2h+1} + 2^{h+2} = 7k, \qquad \text{donde } k \text{ es un entero.}$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple para $n = h + 1$, es decir, debemos verificar que la siguiente igualdad es cierta

$$3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} \overset{?}{=} 7m, \qquad \text{para algún } m \in \mathbb{Z},$$

así, por hipótesis inductiva

$$3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} = 3^{2h+2+1} + 2^{h+1+2} = 3^{2h+1}\left(3^2\right) + 2^{h+2}(2) = 9 \cdot 3^{2h+1} + 2 \cdot 2^{h+2}$$

$$= (7+2)\, 3^{2h+1} + 2 \cdot 2^{h+2} = 7 \cdot 3^{2h+1} + 2 \cdot 3^{2h+1} + 2 \cdot 2^{h+2} \overset{\boxed{\text{Factor común } 2}}{=} 7 \cdot 3^{2h+1} + 2 \cdot \overbrace{\left(3^{2h+1} + 2^{h+2}\right)}^{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}}}$$

$$= 7 \cdot 3^{2h+1} + 2 \cdot (7k) = 7 \cdot 3^{2h+1} + 7 \cdot (2k) \overset{\boxed{\text{Factor común } 7}}{=} 7 \cdot \left(3^{2h+1} + 2k\right) = 7m,$$

donde $m = 3^{2h+1} + 2k$.

Por lo tanto,

$$3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} = 7m \quad \text{donde } m \in \mathbb{Z},$$

es decir, se cumple que

$$3^{2(h+1)+1} + 2^{(h+1)+2} \quad \text{es múltiplo de } 7,$$

con lo que se demuestra que

$$A_n = 3^{2n+1} + 2^{n+2}$$

es múltiplo de 7, para cualquiera número entero $n \geq 1$. ★

Ejercicios

1. Coloque dentro del paréntesis una V si la proposición es **VERDADERA** o una F si es **FALSA**.

1.	$-\sqrt{4} \in \mathbb{N}$	( )	2.	$\pi \in \mathbb{Q}$	( )
3.	$\pi = 3,14$	( )	4.	$3 + \sqrt{5} = 3\sqrt{5}$	( )
5.	$a + b = b + a$	( )	6.	$a - b = b - a$	( )
7.	$a - b = -b + a$	( )	8.	$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	( )
9.	$\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = -1$	( )	10.	$\dfrac{-3}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{2}-2}$	( )
11.	$\sqrt{7} + \sqrt{2} = \sqrt{9} = 3$	( )	12.	$10 - (7-3) = (7-3) - 10$	( )
13.	$\dfrac{4}{\frac{2}{3}} = \dfrac{8}{3}$	( )	14.	$ab = \dfrac{a}{\frac{1}{b}}$	( )
15.	$ab = \dfrac{b}{\frac{1}{a}}$	( )	16.	$\dfrac{a}{\frac{1}{b}} = \dfrac{b}{\frac{1}{a}}$	( )
17.	$(-x)(-x)(-x) = -x^3$	( )	18.	$(-x)(-x)(-x)(-x) = x^4$	( )
19.	$2^3 \cdot 3^2 = 6^3$	( )	20.	$(16 \div 8) \div 2 = 16 \div (8 \div 2)$	( )

21. $2^6 + 8^2 = 10^8$ ( )

22. $a - (b - c) = -(-c + b) + a$ ( )

23. $\underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n-\text{veces}} = x^n$ ( )

24. $\underbrace{(-x)(-x)(-x)\cdots(-x)}_{n-\text{veces}} = -x^n$ ( )

25. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ ( )

26. $\sqrt{\left(1+\sqrt{1+\sqrt{1}}\right)^4} = 3 + 2\sqrt{2}$ ( )

27. $a = \sqrt{a^2}$ ( )

28. $a = \sqrt[3]{a^3}$ ( )

29. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$ ( )

30. $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$ ( )

31. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}} = \dfrac{\sqrt[3]{a}}{a}$ ( )

32. $\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}\right)\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right) = a - b$ ( )

33. $\dfrac{1}{a^{-n}} = a^n$ ( )

34. $\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ( )

35. $\dfrac{3}{25} + 2 = \dfrac{1}{5}$ ( )

36. $\dfrac{13}{24} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{1}{8}$ ( )

2. Hallar la suma algebraica de cada uno de las siguientes expresiones

1. $3a + 2a$
2. $-5b - 7b$
3. $-a^2 - 9a^2$
4. $3a^{x-2} + 5a^{x-2}$
5. $\dfrac{1}{2}ab + \dfrac{2}{3}ab$
6. $-\dfrac{1}{3}xy - \dfrac{2}{3}xy$
7. $5x + x + 2x$
8. $\dfrac{1}{2}x^2y + \dfrac{1}{4}x^2y + \dfrac{1}{8}x^2y$

3. Realizar las siguientes operaciones

1. $\dfrac{5}{14} - \dfrac{3}{7}$
2. $\dfrac{3}{14} + \dfrac{2}{21}$
3. $-\dfrac{5}{12} - \dfrac{2}{15}$
4. $\dfrac{1}{16} + \dfrac{1}{24}$
5. $-\dfrac{1}{21} + \dfrac{2}{28}$
6. $1 - \dfrac{7}{5}$
7. $2 + \dfrac{5}{4}$
8. $\dfrac{11}{2} - 5$
9. $\dfrac{2}{5} - \dfrac{5}{2}$
10. $10 + \dfrac{2}{3}$
11. $\dfrac{1}{18} + \dfrac{5}{9} - \dfrac{3}{2}$
12. $\dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} - \dfrac{7}{12}$
13. $\dfrac{5}{12} + \dfrac{7}{36} + \dfrac{3}{4}$
14. $-\dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{20}$
15. $\dfrac{5}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{2}{9}$
16. $\dfrac{5}{5} - \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{15}$
17. $\dfrac{5}{2} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{9}$
18. $\dfrac{15}{121} - \dfrac{9}{2} - \dfrac{24}{11}$
19. $\dfrac{41}{80} - \dfrac{84}{10} + \dfrac{7}{12}$
20. $\dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{15} - \dfrac{2}{75}$
21. $\dfrac{7}{240} - \dfrac{11}{25} - \dfrac{18}{25}$
22. $\dfrac{3}{30} + \dfrac{5}{15} - \dfrac{6}{60}$
23. $-\dfrac{1}{121} + \dfrac{1}{1210} - \dfrac{1}{605}$
24. $-\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{3}{16} - \dfrac{5}{32}$
25. $\dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{7}{6}$
26. $-\dfrac{7}{2} - \dfrac{5}{3} + \dfrac{11}{5} + \dfrac{21}{6}$
27. $\dfrac{15}{3} + \dfrac{10}{4} - \dfrac{4}{10} - \dfrac{3}{15}$
28. $2 + \dfrac{5}{3} + \dfrac{11}{24} + \dfrac{17}{18}$
29. $\dfrac{2}{11} - \dfrac{3}{5} + \dfrac{14}{25} + \dfrac{21}{15}$
30. $\dfrac{10}{4} - \dfrac{5}{10} + \dfrac{10}{15} - \dfrac{10}{20} - \dfrac{5}{30}$
31. $\dfrac{2}{13} + \dfrac{5}{52} + \dfrac{11}{4} - \dfrac{15}{24}$
32. $\dfrac{7}{2} + \dfrac{5}{3} + \dfrac{11}{24} + \dfrac{17}{18}$
33. $-\dfrac{3}{2} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{5}{18} + \dfrac{1}{36}$
34. $-\dfrac{6}{55} + \dfrac{12}{121} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{13}{110} - \dfrac{6}{11}$
35. $\dfrac{51}{120} - \dfrac{26}{21} - \dfrac{53}{4} + \dfrac{14}{3}$
36. $-\dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{20} + \dfrac{3}{40} - \dfrac{3}{80}$
37. $\dfrac{3}{130} + \dfrac{2}{40} + \dfrac{-2}{3} + \dfrac{10}{13} - \dfrac{4}{5}$

38. $\dfrac{17}{120}+\dfrac{5}{60}-\dfrac{11}{4}+\dfrac{51}{12}$ 39. $\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}-\dfrac{3}{21}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{2}{70}$ 40. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{7}{18}-\dfrac{11}{2}+\dfrac{13}{4}+\dfrac{23}{5}+5$

4. Efectuar y simplificar las siguientes operaciones

1. $\dfrac{\dfrac{12}{121}-\dfrac{6}{55}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{13}{110}-\dfrac{6}{11}}{\dfrac{15}{121}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{11}+\dfrac{9}{22}}$ 2. $\dfrac{\dfrac{10}{4}-\dfrac{5}{10}+\dfrac{10}{15}-\dfrac{10}{20}-\dfrac{5}{30}}{2}$

3. $\dfrac{\dfrac{4}{7}-\dfrac{1}{49}+\dfrac{12}{14}-\dfrac{5}{28}-2}{\dfrac{5}{98}-\dfrac{5}{49}-\dfrac{1}{2}}$ 4. $\dfrac{\dfrac{5}{72}+\dfrac{1}{16}-3-\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{144}-\dfrac{2}{3}}{\dfrac{15}{3}+\dfrac{10}{4}-\dfrac{4}{12}-3}$

5. $\dfrac{\dfrac{17}{120}+\dfrac{5}{60}-\dfrac{11}{4}+\dfrac{51}{12}}{\dfrac{2}{7}-\dfrac{1}{14}-\dfrac{3}{21}+\dfrac{1}{35}+\dfrac{2}{70}}$ 6. $\dfrac{\dfrac{27}{169}+\dfrac{35}{26}+\dfrac{3}{2}-\dfrac{25}{13}+\dfrac{61}{52}-2}{\dfrac{211}{104}-\dfrac{3}{4}-\dfrac{5}{13}-1}$

7. $\dfrac{\dfrac{8}{35}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{16}{5}-2-\dfrac{1}{2}}{3}$ 8. $\dfrac{-\dfrac{12}{4}+\dfrac{5}{2}+1-\dfrac{7}{2}+\dfrac{36}{12}}{\dfrac{10}{3}-\dfrac{2}{5}+\dfrac{11}{6}-\dfrac{12}{21}}$

9. $\dfrac{\dfrac{57}{64}+\dfrac{1}{16}-\dfrac{24}{12}-\dfrac{7}{2}+4}{\dfrac{11}{48}+\dfrac{2}{9}-\dfrac{5}{12}+\dfrac{5}{18}+3}$

5. Calcular aplicando las propiedades de los números reales

1. $(6+5+4)\dfrac{3}{2}$ 2. $\left(3+\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{2}{4}+\dfrac{5}{3}\right)$ 3. $(20-14)\left(\dfrac{8}{4}-\dfrac{12}{2}\right)$

4. $\left(\dfrac{8}{6}+\dfrac{6}{3}+\dfrac{4}{9}\right)2$ 5. $\left(8+\dfrac{5}{3}+3\right)\left(6-\dfrac{8}{2}\right)$ 6. $\left(20-\dfrac{5}{3}+2\right)\left(\dfrac{16}{2}-3+\dfrac{2}{6}-\dfrac{1}{4}\right)$

7. $(5-2)\dfrac{3}{2}+6\left(\dfrac{4}{6}-\dfrac{1}{5}\right)$ 8. $3\left(8-\dfrac{1}{3}\right)+4\left(3+\dfrac{2}{3}\right)-3\left(\dfrac{5}{4}-\dfrac{4}{2}\right)$

9. $\left(\dfrac{20}{4}-\dfrac{15}{2}+\dfrac{30}{2}-\dfrac{10}{2}\right)\dfrac{15}{5}$ 10. $\left(5-\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{4}{2}-2\right)+(7-3)\left(\dfrac{4}{4}-1\right)$

11. $\dfrac{6}{2}\left[3+\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{2}\right)2\right]$ 12. $(7-5)\,4+3\left(\dfrac{4}{2}-2\right)+\left(\dfrac{8}{4}-2\right)\dfrac{5}{2}-2\left(11-\dfrac{10}{2}\right)$

13. $(8-2)\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{3}(5+4)+3\left(\dfrac{6}{3}-1\right)$ 14. $\left(11-\dfrac{4}{2}\right)5-4\left(\dfrac{6}{3}+2\right)+4\,(5-3)-2\left(\dfrac{8}{4}-\dfrac{6}{3}\right)$

15. $\dfrac{8}{4}\left[\left(5-\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{4+2}{3}\right)\right]$ 16. $\left(\dfrac{3}{4}-2\right)(4-1)+\dfrac{6}{2}\left(\dfrac{8-4}{2}\right)+\left(7-\dfrac{2}{4}\right)\left(\dfrac{9}{3}-7\right)$

17. $\dfrac{9}{2}\left[(1-4)\,2+\left(\dfrac{30-20}{2}\right)\dfrac{2}{3}\right]$ 18. $\left(\dfrac{3}{6}+\dfrac{2}{2}\right)(5-1)+\left(\dfrac{8-1}{3}\right)3-4\left(\dfrac{6-2}{2}\right)$

19. $\dfrac{500}{5}+6\,(3+1)+(8-5)\dfrac{3}{4}-2\left(\dfrac{5}{3}+\dfrac{4}{9}\right)$ 20. $\left[\dfrac{(5+2)\,3+(6-1)\,5}{3}\right]\left[\dfrac{(8+6)\,3}{6}-(4-1)\,2\right]$

21. $\left[\dfrac{15}{3}+(9-5)\,2\right]\left[(6\times 4)\,\dfrac{3}{7}+(5-4)\left(\dfrac{4-3}{3}\right)\right]$

22. $\dfrac{300}{2}-3\,(5-2)+(6+1)\left(\dfrac{9}{2}-3\right)+4\left(\dfrac{8}{3}+1\right)$

23. $3\left(\dfrac{9-2}{7}\right)+2\left(\dfrac{5-1}{2}\right)\left(4+\dfrac{3}{2}\right)+\dfrac{3}{5}\,(6-4)\left(8-\dfrac{7}{2}\right)$

24. $\dfrac{800}{4}+\left[\dfrac{20}{5}-3\times 4+5\left[\dfrac{18}{6}-\left(\dfrac{6-1}{2}\right)3+\left(5-\dfrac{2}{3}\right)4\right]\right]$

6. Simplificar las siguientes expresiones

1. $1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}$

2. $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

3. $0+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}$

4. $2+\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}}{0+\dfrac{3}{1+\dfrac{1}{5}}}$

5. $3+\dfrac{1}{1+\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{5}}}}$

6. $2+\dfrac{1}{1+\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{5}}}}$

7. $\dfrac{\dfrac{2}{3}}{\dfrac{\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}}{\dfrac{2}{3}}-\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}+2}}-1}+1$

8. $-2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}+1}-1}+2$

9. $-2+\dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{5}}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2}{4}}+1}-\dfrac{1}{2}}+2$

10. $\dfrac{1}{\dfrac{\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{2}{5}}-\dfrac{2}{3}}+1}+3$

11. $\dfrac{\dfrac{3}{2}}{-1+\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{2}{3}}-2$

12. $\dfrac{\dfrac{\dfrac{1}{3}}{2}}{\dfrac{-\dfrac{1}{3}}{2}+\dfrac{10-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}}}{10+\dfrac{1}{\dfrac{9}{3}}+1}-\dfrac{1}{\dfrac{2}{3}}}+2$

7. Hallar el valor del polinomio $P(x)$ de acuerdo al valor de x dado

1. $P(x)=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{5x}{4}+\dfrac{1}{2}$ en $x=-\dfrac{1}{2}$

2. $P(x)=-7x^2-10x+3$ en $x=\dfrac{1}{2}$

3. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1$ en $x = -3$
4. $P(x) = x^3 - 3x + 1$ en $x = -1$
5. $P(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 5$ en $x = 3$
6. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 10x - 5$ en $x = -2$
7. $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 13x$ en $x = 4$
8. $P(x) = x^3 - 7x^2 + 12x + 2$ en $x = -3$
9. $P(x) = 2x^4 - 16x^2 + 8x - 4$ en $x = 2$
10. $P(x) = 3x^5 - 8x^3 + 4x + 1$ en $x = 3$
11. $P(x) = 3x^3 - 7x^2 + 12x + 3$ en $x = -\dfrac{1}{3}$
12. $P(x) = 16x^4 - 8x^3 + 16x^2 - 4x + 3$ en $x = \dfrac{1}{4}$
13. $P(x) = 2x^4 + x^3 - 10x^2 + 24$ en $x = -2$
14. $P(x) = 2x^4 + 6x^3 + 7x^2 - x + 5$ en $x = -\dfrac{1}{2}$
15. $P(x) = \dfrac{x^3}{10} + \dfrac{7x^2}{10} - \dfrac{3x}{10} + \dfrac{9}{10}$ en $x = -10$
16. $P(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + \dfrac{1}{100}$ en $x = \dfrac{1}{10}$
17. $P(x) = 8x^4 - 28x^3 - 62x^2 + 7x + 15$ en $x = -1$
18. $P(x) = 7x^6 + 8x^5 - 3x^4 - 11x^2 + x - 1$ en $x = 1$
19. $P(x) = 81x^5 + 27x^4 - 243x^3 - 9x^2 + 3x + 1$ en $x = -\dfrac{1}{2}$
20. $P(x) = 2x^7 + 4x^6 + 8x^5 + 16x^4 + 32x^3 + 64x^2 + 128x + 1$ en $x = \dfrac{1}{2}$

8. Diga si $x = 1$ es raíz del polinomio $p(x) = 2x^3 - x^2 - x^4$.
9. Diga si $x = -2$ es raíz del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + x + 6$.
10. Diga si $x = \dfrac{1}{2}$ es raíz del polinomio $p(x) = 2x^4 - x^3 - 2x + 1$.
11. Diga si $x = -\dfrac{2}{3}$ es raíz del polinomio $p(x) = 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 7x - 2$.
12. Diga si $x = 0$ es raíz del polinomio $p(x) = x^2 + x - 1$.
13. Diga si $x = 2$ es raíz del polinomio $p(x) = x^4 + 3x^2 - x - 5$.
14. Hallar las raíces de los polinomios

    1. $p(x) = x^2 - x - 6$
    2. $p(x) = x^2 + 7x + 6$
    3. $p(x) = x^2 - 2x - 8$
    4. $p(x) = x^2 + 5x + 6$
    5. $p(t) = t^2 + 2t - 24$
    6. $p(n) = n^2 - 6n - 27$
    7. $p(t) = 8t^2 + 10t + 3$
    8. $p(t) = 2t^2 + 7t - 4$
    9. $p(x) = 6x^2 - 5x - 6$
    10. $p(v) = v^2 - 6v + 6$
    11. $p(x) = x^2 + 4$
    12. $p(x) = 16x^2 + 25$
    13. $p(z) = 3z^2 - 2z - 1$
    14. $p(k) = 6k^2 - 13k + 6$
    15. $p(x) = 2x^2 + 5x - 3$
    16. $p(x) = x^2 - 2x + 1$
    17. $p(a) = a^2 - 2ab + b^2$
    18. $p(x) = x^2 + 4x + 4$
    19. $p(b) = b^2 - 2b + 1$
    20. $p(a) = a^2 - 2a + 1$
    21. $p(x) = x^2 - 10x + 25$
    22. $p(c) = 1 - \dfrac{2}{3}c + \dfrac{c^2}{9}$
    23. $p(x) = \dfrac{1}{25} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{25}{36}x^2$
    24. $p(x) = \dfrac{9}{4}x^2 - 6x + 1$

25. $p(x) = x^2 + 10x + 25$ 26. $p(t) = 4t^2 - 12t + 9$ 27. $p(x) = 2x^2 - x - 6$

28. $p(n) = n^2 - 1$ 29. $p(x) = x^2 - 25$ 30. $p(y) = 16 - y^2$ 31. $p(a) = 1 - \frac{a^2}{4}$

32. $p(x) = 4x^2 - 9$ 33. $p(t) = 1 - 4t^2$ 34. $p(t) = \frac{1}{4} - 9t^2$ 35. $p(t) = 9t^2 - 36$

36. $p(t) = 4t^2 - 9s^2$ 37. $p(a) = 64a^2 - m^2$ 38. $p(m) = 25m^2 - 4n^2$

39. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 13x - 10$ 40. $p(x) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$ 41. $p(x) = x^3 - 1$

42. $p(x) = x^3 - 2x^2 - 23x + 60$ 43. $p(t) = t^3 + 2t^2 - 3t$ 44. $p(x) = x^3 + 2x^2 + x$

45. $p(x) = x^3 - 4x^2 + 5x$ 46. $p(x) = x^3 - 4x^2 - 11x + 30$ 47. $p(t) = t^3 - 2t^2 - 8t$

48. $p(x) = 2x + 6x^3$ 49. $p(x) = 8 - x^3$ 50. $p(x) = x^3 - 64$ 51. $p(x) = x^3 - 27$

52. $p(x) = (x+h)^3 - h^3$ 53. $p(x) = -2x^3 + 9x^2 - 10x + 3$ 54. $p(t) = t^3 + 1$

55. $p(z) = z^3 + 8$ 56. $p(x) = x^3 + 27$ 57. $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

58. $p(x) = x^4 - 1$ 59. $p(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - 12$ 60. $p(t) = t^4 - 7t^2 - 18$

61. $p(x) = x^4 - 16$ 62. $p(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ 63. $p(x) = 2x^3 - 3x^2 - 4x + x^4 + 4$

64. $p(x) = 3x^4 - 6x^2$ 65. $p(x) = x^4 - 18x^2 + 81$ 66. $p(x) = x^2 + x^4 - 6$

67. $p(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ 68. $p(t) = 2t^4 + 4t^2 - 6$ 69. $p(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 1$

70. $p(x) = 12x - 12x^2 + 7x^3 - 4x^4 + x^5$

15. Factorizar las siguientes expresiones

1. $120a + 120b + 120c$ 2. $a(x+1) + b(x+1)$ 3. $m(2n+3) + p(2n+3)$

4. $2a(x-3) - b(x-3)$ 5. $m(x+5) + n(x+5)$ 6. $2x(m-n) + 3y(m-n)$

7. $x(3+5y) + 3 + 5y$ 8. $m(1-x) + 1 - x$ 9. $4x(m-n) + m - n$

10. $1 - x + 2a(1-x)$ 11. $x^2 + 1 - b\left(x^2+1\right)$ 12. $x(m+n) - m - n$

13. $2a(b+c) - b - c$ 14. $2y(x+2) - x - 2$ 15. $-a - b + x(a+b)$

16. $-2x - 3y + m(2x+3y)$ 17. $-2x^2 + x$ 18. $3x - 9x^2$ 19. $9a^2x - 18ax^2$

20. $3x + 7xb$ 21. $5ab - 8abc$ 22. $21c^4 + 7b^2c - 14c^3$ 23. $5ab + \frac{10}{3}a^2b - \frac{15}{7}b^4a$

24. $a^2 - 6b - ab + 6a$ 25. $x^2y + y - x^2 - 1$ 26. $z^3 + zy - xy - xz^2$

27. $xy - x - y + y^2$ 28. $ab - a^2 - 2abx + 2a^2x$ 29. $a^2 + ab - 2az - bz + z^2$

30. $ac - 2a + a^2 + 2b - ab - 2c$ 31. $3x^3 - xy + x^2 - 3x^2y$ 32. $a^3b^2 + b^2c + a^3b + bc$

33. $x - xy - y - zx - z + x^2$ 34. $3mp - n + m^2 - nm + m - 3np$

35. $ax^2 - bx^2 + 2axy - 2bxy + ay^2 - by^2$ 36. $a^2b - 3a^2 + 2ab^2 - 6ab + b^3 - 3b^2$

37. $2ax - 3a + 2bx - 3b$

16. Factorizar las siguientes expresiones en productos de factores irreducibles

1. $x^2 - x - 6$ 2. $x^2 + 7x + 6$ 3. $x^2 - 2x - 8$ 4. $x^2 + 5x + 6$ 5. $t^2 + 2t - 24$

6. $n^2-6n-27$ 7. $8t^2+10t+3$ 8. $2t^2+7t-4$ 9. $6x^2-5x-6$ 10. v^2-6v+6

11. x^2+4 12. $16x^2+25$ 13. $3z^2-2z-1$ 14. $6k^2-13k+6$ 15. $2x^2+5x-3$

16. x^2-2x+1 17. $a^2-2ab+b^2$ 18. x^2+4x+4 19. b^2-2b+1 20. a^2-2a+1

21. $m^2-2mn+n^2$ 22. $x^2-10x+25$ 23. $1-\frac{2}{3}c+\frac{c^2}{9}$ 24. $1-2(x-y)+(x-y)^2$

25. $\frac{1}{25}+\frac{1}{3}x+\frac{25}{36}x^2$ 26. $\frac{9}{4}x^2-6x+4$ 27. $4a^2-12ab+9b^2$ 28. $x^2+10x+25$

29. $4t^2-12t+9$ 30. $3x^2+2x+4$ 31. $\frac{11}{2}x-3x^2+1$ 32. $4-4(1-x)+(1-x)^2$

33. $6x^2-x-1$ 34. $x^2+2x(b+c)+(b+c)^2$ 35. $(x+y)^2-2(x+y)(y+z)+(y+z)^2$

36. $(a+b)^2+2(a+b)(a-c)+(a-c)^2$ 37. $(a+b+c)^2+2(a+b+c)(b+c-a)+(b+c-a)^2$

38. $x-3x^2-\sqrt{2}+3\sqrt{2}\,x$ 39. $\sqrt{3}\,x-2x^2-2\sqrt{5}\,x+\sqrt{15}$ 40. a^8-18a^4+81

41. $9c^6-30c^3+25$ 42. $x^6-2x^3y^3+y^6$ 43. $\frac{m^6}{16}-2m^3n^2+16n^4$ 44. n^2-1

45. x^2-25 46. $16-y^2$ 47. $1-\frac{a^2}{4}$ 48. $1-4m^2$ 49. $4x^2-9$ 50. $\frac{1}{4}-9a^2$

51. $9x^2-36$ 52. $4t^2-9s^2$ 53. $64a^2-m^2$ 54. $25m^2-4n^2$ 55. $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{81}$

56. $a^2b^2-c^2d^2$ 57. $-16a^2+4b^2$ 58. $(7x+1)^2-81$ 59. $m^{2a+4}-x^{6a-8}$

60. $(a+b)^2-(c+d)^2$ 61. $(a+b+6c)^2-(a-b-c)^2$ 62. $(3a+6b)^2-(4a-5b)^2$

63. $100-m^4$ 64. $\frac{a^2}{36}-\frac{b^4}{25}$ 65. $4x^2-81y^4$ 66. $100m^4n^4-\frac{1}{16a^4}$

67. $x^3-2x^2-13x-10$ 68. $x^3-3x^2-4x+12$ 69. $x^3-3x^2-10x+24$

70. $x^3-2x^2-23x+60$ 71. t^3+2t^2-3t 72. x^3+2x^2+x 73. x^3-4x^2+5x

74. $2x+6x^3$ 75. t^3-2t^2-8t 76. x^3-27 77. x^3-64 78. $8-x^3$

79. $(x+h)^3-h^3$ 80. $1-8y^3$ 81. $64y^3-27$ 82. t^3+1 83. z^3+8

84. x^3+27 85. x^4-16 86. x^4-5x^2+4 87. t^4-7t^2-18 88. $3x^4-6x^2$

89. x^4-18x^2+81 90. x^4+2x^2+1 91. $2t^4+4t^2-6$ 92. $9x^4-12x^2+4$

93. $2x^4+x^3-32x^2+59x-30$ 94. $3a^{12}-3a^2$ 95. $2x^4+3x^3-45x^2-26x+120$

96. x^5+a^5 97. $x^2+x+a-a^2$ 98. x^8-256 99. $x^2+x^3-x^4$

100. $3x^2+3$ 101. ab^2-a^3b+ab 102. $40a^3+30a^2-50a$ 103. $b^2c^2-21c^2+14bc^2$

104. $12xy^2-18y^3x^2+16xy$ 105. $112mn^4+120m^5n-136m^2n^2$ 106. $-hk^2+2hk+h^2$

107. $10x^2-25x^3+5x^4+10x^5$ 108. $a^4b+a^2b^4+a^5+a^3b^3$ 109. $4y^3-4x^2y+xy^4-x^3y^2$

110. $m^3+mn^2-mn^4+m$ 111. $25x^2y+30xy^3+20x$ 112. $\frac{20}{3}x^4+\frac{15}{2}x^3y+30xy^2$

113. $\frac{25}{9}xy-\frac{15}{9}xy^2+\frac{10}{9}x^3y$ 114. $\frac{2}{15}a^3b^2+\frac{3}{20}a^2b^3-\frac{1}{5}a$ 115. $4ax^3-8a^3x^3-12a^2x^6$

116. $\sqrt{x^5}-4\sqrt{x}$ 117. $\sqrt[4]{x}-2\sqrt{x}$ 118. $3\sqrt{x}-4x$

17. Efectuar las siguientes operaciones (División de polinomios)

1. $\left(x^2-5x+6\right)\div(x-3)$ 2. $\left(x^2-4x+4\right)\div(x-2)$ 3. $\left(x^2+3x+2\right)\div(x+1)$
4. $\left(x^3-5x^2+3x+14\right)\div(x-2)$ 5. $\left(2x^4+3x^3-8x^2+5x-1\right)\div(x-5)$
6. $\left(x^5-x^4+x^3-2x^2+10x-10\right)\div(x-6)$ 7. $\left(25x^3-12x^5+8x-19\right)\div(x-7)$
8. $\left(13x^6+12x^5-10x^4+8x^3-2x^2+15x-11\right)\div(x+11)$ 9. $\left(5x^3+x-8\right)\div(x-3)$
10. $\left(x^4+\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+1\right)\div(x-3)$ 11. $\left(\dfrac{3x^4}{8}-\dfrac{13x^2}{8}-1432\right)\div(x-8)$
12. $\left(10x^5-\dfrac{x^3}{3}-2x-\dfrac{1}{9}\right)\div(x+6)$ 13. $\left(\dfrac{x^5}{10}-\dfrac{3x^3}{10}+97x^2+\dfrac{7x}{10}-7\right)\div(x+10)$
14. $\left(2x^3-7x^2+3x+1\right)\div(x+1)$ 15. $\left(2x^4-5x^3+6x^2-4x-105\right)\div(x+2)$
16. $\left(4x^3+4x^2+x+75\right)\div(x+3)$ 17. $\left(8x^4-28x^3-62x^2+7x+15\right)\div(x+1)$
18. $\left(5x^3+8x^2+7x-4\right)\div\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$ 19. $\left(3x^3-2x^2+x-5\right)\div\left(x-\dfrac{1}{4}\right)$
20. $\left(2x^5-6x^3+3x-5\right)\div(x-3)$ 21. $\left(48x^3+18x-27-72x^2\right)\div(6x-9)$
22. $\left(2x^3+x^2-18x+7\right)\div(x-4)$ 23. $\left(4x^4-3x^3+5x^2-3x+2\right)\div\left(x^2+2x-1\right)$
24. $\left(2x^2-x-30\right)\div\left(x^2-x-6\right)$ 25. $\left(3x-4x^2+4x^3-4\right)\div\left(1-2x^2-x\right)$
26. $\left(x^2-4\right)\div(x-2)$ 27. $\left(10a^2+13a-3\right)\div(5a-1)$ 28. $\left(10x^2-21x+3\right)\div(2x-1)$
29. $\left(x^3-8\right)\div(x-2)$ 30. $\left(7x^3-14x+3\right)\div(x-2)$ 31. $\left(8x^3-21x+3\right)\div(2x-1)$
32. $\left(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)\div(2x-1)$ 33. $\left(10y^6-y^4+y^5-18y^2-2y^3\right)\div\left(y^2+y-1\right)$
34. $\left(x^4-3x^2+x-2\right)\div\left(x^2+2x+1\right)$ 35. $\left(x^5+2x^4-7x^3+8x^2+12x\right)\div\left(x^2+5x+6\right)$
36. $\left(4y^3+2y^2-y+1\right)\div(2y-3)$ 37. $\left(a^5+2a^4+a^3+3a^2-6a+1\right)\div\left(a^2+2a+1\right)$
38. $\left(2x^5-4x^4-3x^3+2x^2-x+1\right)\div\left(3x-2x^2-1\right)$ 39. $\left(x^3+5x^2+6x+3\right)\div\left(x^2+x+2\right)$
40. $\left(6x^2+5x-1\right)\div(3x+4)$ 41. $\left(6x^5+\dfrac{2x^4}{3}-\dfrac{x^3}{2}-3x^2+2x-1\right)\div\left(2x^2-x+2\right)$
42. $\left(2x^3y+3x^2y^2-2xy^3-6\right)\div(2x-y)$ 43. $\left(x^4+3x^3+7x^2+5x\right)\div\left(x^3+2x^2+5x-1\right)$
44. $\left(x^6-y^6\right)\div(x-y)$ 45. $\left(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^4\right)\div(a-b)$
46. $\left(a^7-b^7\right)\div(a+b)$ 47. $\left(5x^5-2x^4+3x-5x^3+2x^2\right)\div\left(2x^3+x-1\right)$

18. Descomponer en fracciones simples las siguientes expresiones

1. $\dfrac{2x-7}{x^2+2x-3}$ 2. $\dfrac{3x-1}{x^2-1}$ 3. $\dfrac{1-x^2-8x}{x^3-3x^2-x+3}$ 4. $\dfrac{3x^2-1}{x^3-x}$ 5. $\dfrac{x+x^2+1}{x^3+x}$
6. $\dfrac{6x^2-7x-2}{x^3-x^2-4x+4}$ 7. $\dfrac{x+4}{x^3-4x^2+x+6}$ 8. $\dfrac{x-3}{x^2-2x^3}$ 9. $\dfrac{4x^2-6x-16}{x^3+x^2-4x-4}$
10. $\dfrac{14x^2-13x+2}{4x^3-8x^2+5x-1}$ 11. $\dfrac{7x^2-x^3-23x-7}{x^4-x^3-7x^2+x+6}$ 12. $\dfrac{13x+x^2+48}{119x+19x^2+x^3+245}$

13. $\dfrac{x^3+19x^2-18x+22}{x^4+2x^3-x^2+4x-6}$ 14. $\dfrac{2x^2-3x-1}{4x^4-20x^3+35x^2-25x+6}$ 15. $\dfrac{3x^2}{x^3-x^2-x+1}$

16. $\dfrac{x^2+x-1}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}$ 17. $\dfrac{x^2-4x}{x^3-x^2+x-1}$ 18. $\dfrac{7-2x^3-18x-19x^2}{x^4+8x^3+18x^2+16x+5}$

19. $\dfrac{x-1}{x^2-4x}$ 20. $\dfrac{3x^2-2x}{x+5x^2-2x^3-6}$ 21. $\dfrac{x^2-2}{x^4-1}$ 22. $\dfrac{9x-13x^2+2x^3-22}{x^4+2x^3-x^2+4x-6}$

23. $\dfrac{x^4+1}{x^5-x^2}$ 24. $\dfrac{x^2+2x-1}{27x^3-1}$ 25. $\dfrac{4x^2-x+17}{x^3+x^2+2x+2}$ 26. $\dfrac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+2}$

27. $\dfrac{10x^2-23x+51}{x^4-x^3-11x^2-x-12}$ 28. $\dfrac{x^4+1}{x^5+x^3}$ 29. $\dfrac{2x^2-1}{x^3+8}$ 30. $\dfrac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}$

31. $\dfrac{2x^2-2x-7}{x^2+3x+2}$ 32. $\dfrac{2x^2-x-30}{x^2-x-6}$ 33. $\dfrac{4x^2-x+1}{x^2+2x+1}$ 34. $\dfrac{x^2+4x-7}{(x-2)^2}$

35. $\dfrac{2x^3-x^2-3x+9}{x^2+x-6}$ 36. $\dfrac{3x^4-5x^3-17x^2+64x-53}{x^3-7x+6}$ 37. $\dfrac{x^4+x^3-x^2+5x+1}{x^2-3x+2}$

38. $\dfrac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}$ 39. $\dfrac{2x^5-7x^4+6x^3-5x^2-2x+2}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}$ 40. $\dfrac{x^6-x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}$

41. $\dfrac{x^6+7x^5+18x^4+26x^3+40x^2+59x+26}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$ 42. $\dfrac{2x^4}{x^4+x^2+1}$ 43. $\dfrac{x^6+x^2}{x^4+x^2+1}$

44. $\dfrac{3x^3-10x^2+7}{x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32}$ 45. $\dfrac{x^6+7x^5+18x^4+26x^3+40x^2+50x+26}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}$

19. Completar el cuadrado

1. x^2+2x+5 2. $x^2-16x+80$ 3. $x^2-5x+10$ 4. x^2+3x+1 5. x^2+4x-6

6. $4x^2+4x-2$ 7. $3x^2-5x+7$ 8. $2-2x^2-4x$ 9. $5x-2x^2$ 10. $3x^2-24x+50$

11. x^4-x^2+3 12. x^4+6x^2+8 13. $2x^4-4x^2$ 14. $2x^4+x^2-7$ 15. x^2-5x^4

20. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^2=(b-a)^2$.

21. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^4=(b-a)^4$.

22. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios y n es cualquier número entero, entonces
$$(a-b)^{2n}=(b-a)^{2n}.$$

23. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^3=-(b-a)^3$.

24. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^5=-(b-a)^5$.

25. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios y n es cualquier número entero, entonces
$$(a-b)^{2n+1}=-(b-a)^{2n+1}.$$

26. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

27. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

28. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$.

29. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

30. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

31. Demuestre que si a y b son números reales arbitrarios, entonces $\left(a^2+b^2\right)(a+b)(a-b) = a^4 - b^4$.

32. Aplicar la conjugada a las siguientes expresiones y simplificar

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2}+1}$ 2. $\dfrac{8}{\sqrt{7}+1}$ 3. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ 4. $\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}$ 5. $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ 6. $\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

7. $\dfrac{4}{3\sqrt{2}-4}$ 8. $\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}-1}$ 9. $\dfrac{\sqrt{5}}{1-2\sqrt{5}}$ 10. $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}$ 11. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{b}$

12. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ 13. $\dfrac{2\sqrt{3}-1}{3\sqrt{3}+2}$ 14. $\dfrac{3+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$ 15. $\dfrac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ 16. $\dfrac{2\sqrt{x}-3\sqrt{y}}{3\sqrt{x}-2\sqrt{y}}$

17. $\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}}$ 18. $\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$ 19. $\dfrac{\sqrt{a+b}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$ 20. $\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$

21. $\dfrac{6x-x^2-8}{\sqrt{x}+2}$ 22. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-2}$ 23. $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ 24. $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}+1}$ 25. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{3}}$

26. $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{2}}$ 27. $\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x+1}}$ 28. $\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}$ 29. $\dfrac{3x-3}{(10x+17)^{1/3}-3}$

30. $\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{-3}}{5}$ 31. $\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt[3]{\sqrt{a+b}+1}-1}$ 32. $\dfrac{3}{\sqrt[4]{b}-2}$ 33. $\dfrac{\sqrt{2}-x}{\sqrt[8]{2}-\sqrt[4]{x}}$

34. $\dfrac{\sqrt[4]{y}-1}{y^2-1}$ 35. $\dfrac{x-1}{\sqrt[5]{x}-1}$ 36. $\dfrac{x-32}{2-\sqrt[5]{x}}$ 37. $\dfrac{\sqrt{3}}{1+3\sqrt[5]{x}}$ 38. $\dfrac{\sqrt[5]{3-2x}-1}{3-2x-x^2}$

39. $\dfrac{\sqrt[5]{1-4x}-\sqrt[5]{x-2}}{5x^2+12x-9}$ 40. $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt[4]{x-\sqrt{2}}-\sqrt[4]{x-\sqrt{3}}}$

33. Simplificar, de ser posible

1. $\dfrac{8xy}{12yz}$ 2. $\dfrac{12x^3+8x^2+4x}{4x}$ 3. $\dfrac{45x^3+15x^2}{15x^2}$ 4. $\dfrac{x^3+5x^2+6x}{x^2-x-12}$ 5. $\dfrac{24abc^2}{36bc^2d}$

6. $\dfrac{n-1}{n^2-1}$ 7. $\dfrac{4x^2+12x+9}{4x^2-9}$ 8. $\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$ 9. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2-6b-ab+6a}$

10. $\dfrac{n+1}{n^2-1}$ 11. $\dfrac{6a^2x^2-8a^4x^6}{2a^2x^2}$ 12. $\dfrac{x^3-x}{x^3-2x^2+x}$ 13. $\dfrac{9y^2+12y^8-15y^6}{3y^2}$

14. $\dfrac{n+1}{n^2+1}$ 15. $\dfrac{5a^2-10a^3+15a^4}{5a^2}$ 16. $\dfrac{3x^2+3x-6}{2x^2+6x+4}$ 17. $\dfrac{a^2b^2+ab^2-a^2b^3}{ab^2}$

18. $\dfrac{x^2-5x}{5-x}$ 19. $\dfrac{x^2+2x+xy+2y}{x^2+4x+4}$ 20. $\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-4}$ 21. $\dfrac{-6a^3+9a^6-12a^9}{-3a^3}$

22. $\dfrac{-8a^3x^3+4ax^3-12a^2x^6}{-4ax^3}$ 23. $\dfrac{x^2-1}{x^2+9x+8}$ 24. $\dfrac{(x+1)^2}{1-x^2}$ 25. $\dfrac{a^2-16b^2}{a^3+64b^3}$

34. Efectuar las operaciones indicadas y simplificar

1. $\dfrac{2+8x}{2}$ 2. $\dfrac{9b-6}{3b}$ 3. $\dfrac{xy}{3}+\dfrac{xy}{6}$ 4. $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}$ 5. $u+1+\dfrac{u}{u+1}$

6. $\dfrac{a}{bc} \div \dfrac{b}{ac}$ 7. $\dfrac{x/y}{z}$ 8. $\dfrac{x - x/y}{x + x/y}$ 9. $\dfrac{1}{x+5} + \dfrac{2}{x-3}$ 10. $\left(\dfrac{-2r}{s}\right)\left(\dfrac{s^2}{-6t}\right)$

11. $\dfrac{5x-10}{x^2-4x+4} \cdot \dfrac{a^2x+2a^2}{2a^2}$ 12. $\dfrac{2x+1/x}{2x^2}$ 13. $\dfrac{2}{a^2} - \dfrac{3}{ab} + \dfrac{4}{b^2}$ 14. $\dfrac{x+2-35/x}{1+9/x+14/x^2}$

15. $1 + \dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}$ 16. $\dfrac{1-\dfrac{a^2}{b^2}}{1-\dfrac{a}{b}}$ 17. $\dfrac{1+\dfrac{1}{c-1}}{1-\dfrac{1}{c-1}}$ 18. $1 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$ 19. $2 + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2}}}$

20. $(0,4)^4 \cdot \left(\dfrac{4}{25}\right)^{-3}$ 21. $\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{2-\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}}$ 22. $\dfrac{1-3^{-2}}{1+2^{-3}} + \dfrac{2^{-1}+3^{-1}}{-2^{-2}}$ 23. $\dfrac{6}{1+\dfrac{\frac{1}{2}}{2-\dfrac{1}{4}}} - 5$

35. Efectuar las operaciones indicadas, factorizar y simplificar, si es posible

1. $3\left(2-\dfrac{5t}{6}\right) - \left(6-\dfrac{t}{2}\right)$ 2. $\dfrac{3t-1}{2} + \dfrac{t}{5} - 2t - \dfrac{3(1-t)}{10}$ 3. $x - \dfrac{5}{x} - 4$ 4. $x^2 + \dfrac{1}{x}$

5. $x^3 - \dfrac{1}{x}$ 6. $x - \dfrac{1}{x} - (2x-1)$ 7. $2 + \dfrac{2-7x}{5+2x}$ 8. $2x - 1 - \dfrac{3x}{x-2}$

9. $\dfrac{2-7x}{5+2x} - 3$ 10. $\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+1} - 1$ 11. $\dfrac{x^3+3x^2}{13x+15} - 1$ 12. $\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{1}{2+x}$

13. $\dfrac{x+2}{x-5} - \dfrac{x}{x+3}$ 14. $\dfrac{2+x}{3-x} - \dfrac{x}{1+x}$ 15. $\dfrac{x-1/2}{x-5} - \left(\dfrac{3}{4} - \dfrac{3x+1}{4x}\right)$

16. $\dfrac{5}{x^2-4} - \dfrac{3-x}{4-x^2}$ 17. $\dfrac{1}{x+3} + \dfrac{1}{x^2-9}$ 18. $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2+x-2}$

19. $\dfrac{2}{t+1} - \dfrac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 20. $\dfrac{x}{x^2+x-2} - \dfrac{2}{x^2-5x+4}$ 21. $1 + \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x+1}$

22. $1 - \dfrac{(3x-4)(2x+3)}{(x+2)(x-1)}$ 23. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} - 5$ 24. $\dfrac{1}{a^2-4} + \dfrac{3}{a-2} - \dfrac{2}{a+2}$

25. $\dfrac{2x}{x^2-9} + \dfrac{x}{x^2+6x+9} - \dfrac{3}{x+3}$ 26. $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+7}{x^2-1} - \dfrac{x-2}{x+1}$

27. $\dfrac{x+3}{5-x} - \dfrac{x-5}{x+5} + \dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$ 28. $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x} \cdot \dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$

29. $\dfrac{n^2+n}{2n^2+7n-4} \cdot \dfrac{4n^2-4n+1}{2n^2-n-3} \cdot \dfrac{2n^2+5n-12}{2n^3-n^2}$ 30. $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} \div \dfrac{a^2+3ab+2b^2}{a^2-3ab+2b^2}$

31. $\dfrac{a^3-27}{a^2-9} \div \left(\dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^3+b^3} \cdot \dfrac{a^3-a^2b+ab^2}{a^2+ab}\right)$ 32. $\dfrac{n^3-8}{n+2} \cdot \dfrac{2n^2+8}{n^3-4n} \cdot \dfrac{n^3+2n^2}{n^3+2n^2+4n}$

36. Factorizar las siguientes expresiones

1. $x^2y + y - x^2 - 1$ 2. $z^3 + zy - xy - xz^2$ 3. $ab - a^2 - 2abx + 2a^2x$

4. $3x^3 - xy + x^2 - 3x^2y$ 5. $a^2 + ab - 2az - bz + z^2$ 6. $ac - 2a + a^2 - 2b + ab - 2c$

7. $xy - x - y + y^2$ 8. $x - xy - y - zx - z + x^2$ 9. $3mp - n + m^2 - nm + m - 3np$

10. $ax^2 - bx^2 + 2axy - 2bxy + ay^2 - by^2$ 11. $a^2b - 3a^2 + 2ab^2 - 6ab + b^3 - 3b^2$

12. $6x+x^2+9$ 13. $4x^2-4x+1$ 14. $2x^2+4x+2$ 15. x^2-y^2+6x+9

16. a^4-x^2+2x-1 17. $z-z^2+2$ 18. y^4-x^2+6x-9 19. $y^2-5y-24$

20. w^2-9 21. x^2-2 22. x^3-1 23. x^3+1 24. x^2+x^4+1

25. $4-z^4$ 26. x^4-5x^2+6 27. x^4-4x^2+4 28. x^4-4x^2+4x-1

29. y^5-1 30. z^5+32 31. z^5-32 32. $x^5+\dfrac{1}{2}$ 33. $8-x^6-7x^3$

34. $\dfrac{x^3}{8}-27$ 35. $\dfrac{x^6}{8}-27$ 36. x^2-7x+2 37. $x^4-x^3-x^2$ 38. x^7-1

37. Resolver las siguientes ecuaciones

1. $5x+3=2x-1$ 2. $\dfrac{3x}{5}+4=5x-\dfrac{4}{5}$ 3. $\dfrac{1}{2}-2x=3-\dfrac{2}{3}x$ 4. $4-\dfrac{3}{4}x=\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{4}x$

5. $x^2+2x=0$ 6. $x-3x^2=0$ 7. $2x^2+3x-5=0$ 8. $x^2-2x-8=0$

9. $x^2+9x=10$ 10. $x^2+9x-1=0$ 11. $x^2-2x-7=0$ 12. $3x^2+5x+1=0$

13. $x^2-16=0$ 14. $-4x^2+121=0$ 15. $2x^2+7x+2=0$ 16. $5x^2-x+5=0$

17. $x^3-5x^2=0$ 18. $x^3+5x^2-x=5$ 19. $x^3-2x+1=0$ 20. $5x^3+3x=0$

21. $x^3+3x^2+x-1=0$ 22. $x^3-2x^2-13x-10=0$ 23. $x^3-3x^2-4x+12=0$

24. $x^3-2x^2-23x+60=0$ 25. $27x^3-64=0$ 26. $3x^4-6x^2-9x-6=0$

27. $16x^4-81=0$ 28. $9x^4-12x^2+4=0$ 29. $4x-5x^2-2x^3+x^4+6=0$

30. $\dfrac{5}{3t+2}=\dfrac{-2}{2t-1}$ 31. $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{2+x}$ 32. $\dfrac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}=0$

33. $\dfrac{3z+4}{5z+8}=\dfrac{3z-4}{5z+8}$ 34. $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{x}{x^2-a^2}$ 35. $\dfrac{3x^2-2x+4}{2-x}=1-2x$

36. $\dfrac{a-1}{a^2+a}=\dfrac{1}{2a-2}$ 37. $\dfrac{2}{t+1}=\dfrac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 38. $\dfrac{6t^2}{9t^2-1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{2}{3t-1}$

39. $\dfrac{1}{a^2-4}+\dfrac{3}{a-2}=\dfrac{2}{a+2}$ 40. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{3}{4}$ 41. $x^3+\dfrac{1}{x}=2x$

38. Resuelva las siguientes ecuaciones literales, donde a, b, c, d y n son constantes.

1. $(x+a)(x-b)=x^2-5x$ 2. $\dfrac{a}{x+a}=\dfrac{x}{x^2-a^2}$ 3. $t(3-3b)-1=t(2-3b)-b^2$

4. $az-a(a+b)=-z(1+ab)$ 5. $(v+b)(v-c)-(v+c)(v-2b)=c(b+2)+3b$

6. $\dfrac{x-3a}{a^2}-\dfrac{2a-x}{ab}=-\dfrac{1}{a}$ 7. $\dfrac{b}{d(x-b)}+\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ 8. $(z-b)^2-(z+b)^2=b(b-7z)$

9. $\dfrac{a}{z^2+2za+a^2}=\dfrac{a}{z^2+a^2}$ 10. $\dfrac{a}{2y}+\dfrac{a}{3y}+\dfrac{a}{y}=\dfrac{b}{3}$ 11. $\dfrac{x}{x+n}-\dfrac{4}{x^2-n^2}+\dfrac{4}{4x-4n}=0$

39. Despejar en cada una de las siguientes ecuaciones la variable señalada entre parentesis

1. $s=\dfrac{bh}{2}$; (h) 2. $L=2\pi R$; (R) 3. $V=\dfrac{\pi R^2 h}{3}$; (h) 4. $F=\dfrac{m_1m_2k}{d^2}$; (m_1)

5. $V=at$; (a) 6. $v_c=v_aR$; (v_a) 7. $c^2=a^2+b^2$; (a) 8. $a=\dfrac{v_f-v_0}{t}$; (v_0)

9. $T = Fd \ ; \ (F)$ 10. $P = FV \ ; \ (F)$ 11. $F_c = mRv_a^2 \ ; \ (R)$ 12. $h_{max} = \dfrac{v_0^2}{2g} \ ; \ (v_0)$

13. $h = \dfrac{gt^2}{2} \ ; \ (g)$ 14. $\dfrac{h_1}{h_2} = \dfrac{d_1}{d_2} \ ; \ (d_1)$ 15. $\dfrac{v_1}{v_2} = \dfrac{d_2}{d_1} \ ; \ (v_2)$ 16. $\dfrac{v_1 P_1}{T_1} = \dfrac{v_2 P_2}{T_2} \ ; \ (T_2)$

17. $P = hdg \ ; \ (h)$ 18. $P = \dfrac{Fd}{t} \ ; \ (d)$ 19. $s = \dfrac{(B+b)\,h}{2} \ ; \ (b)$ 20. $v_f^2 = v_0^2 + 2gd \ ; \ (d)$

21. $V = IR \ ; \ (I)$ 22. $v_a = \dfrac{2\pi N}{T} \ ; \ (T)$ 23. $Q = 0,24 I^2 Rt \ ; \ (t)$ 24. $R_t = R_0\,(l - \varepsilon t) \ ; \ (\varepsilon)$

25. $v = \dfrac{d}{t} \ ; \ (t)$ 26. $E_c = \dfrac{mv^2}{2} \ ; \ (v)$ 27. $P = 2\,(b+h) \ ; \ (b)$ 28. $d = v_0 t + \dfrac{gt^2}{2} \ ; \ (v_0)$

29. $A = \dfrac{Dd}{2} \ ; \ (d)$ 30. $V = \dfrac{4\pi R^3}{3} \ ; \ (R)$ 31. $I = \dfrac{E}{R_\epsilon - R_i} \ ; \ (R_i)$ 32. $\dfrac{1}{F} = \dfrac{1}{F_1} + \dfrac{1}{F_2} \ ; \ (F_2)$

33. $V = lah \ ; \ (l)$ 34. $I = \dfrac{CRt}{100} \ ; \ (t)$ 35. $F = \dfrac{9c}{5} + 32 \ ; \ (c)$ 36. $s = \dfrac{(a_n - a_1)\,n}{2} \ ; \ (a_1)$

37. $R = \dfrac{\rho}{s} \ ; \ (s)$ 38. $E = \dfrac{kq}{R^2} \ ; \ (R)$ 39. $y = mx + b \ ; \ (m)$ 40. $T - m_2 a = m_1 a \ ; \ (a)$

41. $a_n = a_1 + (n-1)\,R \ ; \ (n)$ 42. $S = S_0\,(1 + 2\alpha\triangle t) \ ; \ (\triangle t)$ 43. $E = mgh + \dfrac{mv^2}{2} \ ; \ (m)$

44. $\overline{x}_T = \dfrac{N_1\overline{x}_1 + N_2\overline{x}_2}{N_1 + N_2} \ ; \ (\overline{x}_2)$ 45. $\triangle E_c = \dfrac{mv_2^2}{2} - \dfrac{mv_1^2}{2} \ ; \ (m)$ 46. $L_T = L_0\,(1 + \delta\triangle t) \ ; \ (\delta)$

47. $F = ma \ ; \ (a)$ 48. $v = v_0\,[1 + 3\alpha\,(T_2 - T_1)] \ ; \ (T_2)$ 49. $\omega = i^2 t\,(R_\epsilon + R_i) \ ; \ (R_i)$

50. $F \cdot (t_2 - t_1) = m\,(v_2 - v_1) \ ; \ (v_1)$ 51. $m_2 c_2\,(t - t_1) = m_1 c_1\,(t - t_1) + C\,(t - t_1) \ ; \ (t_1)$

40. Calcular en cada caso el valor de la variable pedida a partir de los datos que se dan

1. $b^2 - 4ac = 49 \ ; \quad b = 3 \ ; \quad a = 1 \ ; \quad c = ?$ 2. $C = \dfrac{5\,(F - 32)}{9} \ ; \quad C = -35 \ ; \quad F = ?$

3. $A = 3x + b \ ; \quad A = -13 \ ; \quad x = -5 \ ; \quad b = ?$ 4. $B = \dfrac{-5x - b}{3} \ ; \quad B = \dfrac{-1}{9} \ ; \quad b = 2 \ ; \quad x = ?$

5. $S = \dfrac{a_n R - a_1}{R - 1} \ ; \quad S = 121 \ ; \quad a_n = 81 \ ; \quad a_1 = 1 \ ; \quad R = ?$

6. $V = \pi r^2 h \ ; \quad V = 1256 \ ; \quad pi = 3,14 \ ; \quad h = 10 \ ; \quad r = ?$

7. $a_n = R^{n-1} a_1 \ ; \quad a_n = \dfrac{3}{16} \ ; \quad R = \dfrac{1}{2} \ ; \quad n = 5 \ ; \quad a_1 = ?$

8. $d = v_0 \cdot t + \dfrac{at^2}{2} \ ; \quad d = 30 \ ; \quad v_0 = 10 \ ; \quad t = 2 \ ; \quad a = ?$

9. $M = l_i + \left(\dfrac{0,5N - F_1}{F_2}\right) \cdot c \ ; \quad M = 5 \ ; \quad l_i = 4 \ ; \quad F_1 = 10 \ ; \quad F_2 = 15 \ ; \quad c = 3 \ ; \quad N = ?$

10. $V_1 \cdot P_1 \cdot T_2 = V_2 \cdot P_2 \cdot T_1 \ ; \quad V_1 = 80 \ ; \quad V_2 = 66,6 \ ; \quad P_1 = 690 \ ; \quad P_2 = 760 \ ; \quad T_1 = 298 \ ; \quad T_2 = ?$

41. Dadas las siguientes proposiciones, escribir su negación.

(a) Si vivo en Caracas, entonces vivo en Venezuela.
(b) Pienso entonces existo.
(c) Si el cuadrado de un número entero es un número par, entonces este número entero es par.
(d) Si la suma de las cifras de un entero no es múltiplo de tres, el entero tampoco es múltiplo de tres.

(e) Sean a, b y c números reales, si $a+c\neq b+c$. Entonces $a\neq b$.

(f) Si un número dado no posee un factor primo cuyo cuadrado sea menor o igual que el número, entonces es primo.

42. Dadas las siguientes proposiciones del ejercicio 41, escribir su recíproco.

43. Dadas las siguientes proposiciones del ejercicio 41, escribir su contrarrecíproco.

44. Demuestre que si n es un número par, entonces n^2 es un número par.

45. Demuestre que si a y b son números enteros pares, entonces su suma es un número par.

46. Demuestre que si n es un entero y n^2 es un número par, entonces n es un número par.

47. Demostrar que si a, b y c son números naturales y $c^3=a^3+b^3$, entonces a, b y c no son consecutivos (en ese mismo orden)

48. Demuestre que $\sqrt{2}$ es un número irracional.

49. Demuestre que $1+2+3+4+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

50. Demuestre que la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales es igual a $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

51. Demuestre que $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

52. Demuestre que la suma de los cubos de los n primeros números naturales es igual a $\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

53. Demuestre que $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)=\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

54. Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

55. Demuestre que $\dfrac{1^2}{1\cdot 3}+\dfrac{2^2}{3\cdot 5}+\dfrac{3^2}{5\cdot 7}+\cdots+\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$.

56. Demuestre que $\dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\dfrac{n}{3n+1}$.

57. Demuestre que $\dfrac{1}{a(a+1)}+\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\dfrac{n}{a(a+n)}$.

58. Demuestre que si $u_0=2$ y $u_1=3$ y si $u_{k+1}=3u_k-2u_{k-1}$, para todo número natural k, se tiene

$$u_n=2^n+1.$$

59. Demuestre que si

$$u_1=\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha-\beta}\qquad \text{y} \qquad u_2=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}$$

y si

$$u_k=(\alpha+\beta)\,u_{k-1}-\alpha\beta u_{k-2},$$

para todo número natural $k>2$, se tiene

$$u_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

60. Demuestre que la suma
$$A_n = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$$
es divisible por 133 cualquiera que sea el número entero $n \geq 0$.

61. Demuestre que $n^2 - n$ es divisible por 6.

62. Demuestre que $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots n^4 = \dfrac{n\,(n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right)}{30}$.

Respuestas: Ejercicios

1.1. F; 1.2. F; 1.3. F; 1.4. F; 1.5. V; 1.6. F; 1.7. V; 1.8. F; 1.9. F; 1.10. V; 1.11. F;

1.12. F; 1.13. F; 1.14. V; 1.15. V; 1.16. V; 1.17. V; 1.18. V; 1.19. F; 1.20. F; 1.21. F;

1.22. V; 1.23. V; 1.24. F; 1.25. F; 1.26. V; 1.27. F; 1.28. V; 1.29. V; 1.30. V; 1.31. F;

1.32. F; 1.33. V; 1.34. V; 1.35. F; 1.36. F; 2.1. $5a$; 2.2. $-12b$; 2.3. $-10a^2$; 2.4. $8a^{x-2}$;

2.5. $\frac{7}{6}ab$; 2.6. $-xy$; 2.7. $8x$; 2.8. $\frac{7}{8}x^2y$; 3.1. $-\frac{1}{14}$; 3.2. $\frac{13}{42}$; 3.3. $-\frac{11}{20}$; 3.4. $\frac{5}{48}$; 3.5. $\frac{1}{42}$;

3.6. $-\frac{2}{5}$; 3.7. $\frac{13}{4}$; 3.8. $\frac{1}{2}$; 3.9. $-\frac{21}{10}$; 3.10. $\frac{32}{3}$; 3.11. $-\frac{8}{9}$; 3.12. $-\frac{1}{12}$; 3.13. $\frac{49}{36}$; 3.14. $-\frac{3}{20}$;

3.15. $\frac{22}{9}$; 3.16. 1; 3.17. $\frac{59}{18}$; 3.18. $-\frac{1587}{242}$; 3.19. $-\frac{1753}{240}$; 3.20. $\frac{169}{600}$; 3.21. $-\frac{1357}{1200}$; 3.22. $\frac{1}{3}$;

3.23. $-\frac{1}{110}$; 3.24. $\frac{5}{32}$; 3.25. $\frac{3}{4}$; 3.26. $\frac{8}{15}$; 3.27. $\frac{69}{10}$; 3.28. $\frac{365}{72}$; 3.29. $\frac{424}{275}$; 3.30. 2; 3.31. $\frac{19}{8}$;

3.32. $\frac{473}{72}$; 3.33. $-\frac{19}{12}$; 3.34. $-\frac{21}{121}$; 3.35. $-\frac{2631}{280}$; 3.36. $-\frac{9}{80}$; 3.37. $-\frac{487}{780}$; 3.38. $\frac{69}{40}$; 3.39. $\frac{9}{70}$;

3.40. $\frac{1373}{180}$; 4.1. $\frac{21}{40}$; 4.2. 1; 4.3. $\frac{151}{108}$; 4.4. $-\frac{89}{100}$; 4.5. $\frac{161}{12}$; 4.6. $-\frac{346}{143}$; 4.7. $\frac{29}{105}$; 4.8. 0;

4.9. $-\frac{35}{212}$; 5.1. $\frac{45}{2}$; 5.2. $\frac{143}{18}$; 5.3. -24; 5.4. $\frac{68}{9}$; 5.5. $\frac{76}{3}$; 5.6. $\frac{3721}{36}$; 5.7. $\frac{73}{10}$; 5.8. $\frac{479}{12}$;

5.9. $\frac{45}{2}$; 5.10. 0; 5.11. 16; 5.12. -4; 5.13. 6; 5.14. 37; 5.15. $\frac{88}{5}$; 5.16. $-\frac{95}{4}$; 5.17. -12;

5.18. 5; 5.19. $\frac{4393}{36}$; 5.20. $\frac{46}{3}$; 5.21. $\frac{2899}{21}$; 5.22. $\frac{997}{6}$; 5.23. $\frac{152}{5}$; 5.24. $\frac{1537}{6}$; 6.1. $\frac{7}{5}$; 6.2. $\frac{13}{5}$;

6.3. $\frac{7}{10}$; 6.4. $\frac{148}{75}$; 6.5. $\frac{120}{31}$; 6.6. $\frac{143}{49}$; 6.7. $-\frac{17}{5}$; 6.8. $\frac{5}{2}$; 6.9. -20; 6.10. $\frac{160}{41}$; 6.11. $\frac{13}{16}$;

6.12. $\frac{13}{7}$; 7.1. $\frac{29}{24}$; 7.2. $-\frac{15}{4}$; 7.3. 7; 7.4. 3; 7.5. -2; 7.6. 7; 7.7. 196; 7.8. -124;

7.9. -20; 7.10. 526; 7.11. $-\frac{17}{9}$; 7.12. $\frac{47}{16}$; 7.13. 8; 7.14. $\frac{53}{8}$; 7.15. $-\frac{261}{10}$; 7.16. $-\frac{809}{10\,000}$;

7.17. -18; 7.18. 1; 7.19. $\frac{857}{32}$; 7.20. $\frac{5525}{64}$; 8. Si es raíz; 9. Si es raíz; 10. Si es raíz;

11. Si es raíz; 12. No es raíz; 13. No es raíz; 14.1. $x=-2$, $x=3$; 14.2. $x=-1$, $x=-6$;

14.3. $x=-2$, $x=4$; 14.4. $x=-2$, $x=-3$; 14.5. $t=4$, $t=-6$; 14.6. $n=-3$, $n=9$;

14.7. $t=-\frac{1}{2}$, $t=-\frac{3}{4}$; 14.8. $t=-4$, $t=\frac{1}{2}$; 14.9. $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{3}{2}$; 14.10. $v=3-\sqrt{3}$, $v=3+\sqrt{3}$;

14.11. No tiene raíces reales; 14.12. No tiene raíces reales; 14.13. $z=1$, $z=-\frac{1}{3}$; 14.14. $k=\frac{2}{3}$, $k=\frac{3}{2}$;

14.15. $x=-3$, $x=\frac{1}{2}$; 14.16. $x=1$; 14.17. $a=b$; 14.18. $x=-2$; 14.19. $b=1$; 14.20. $a=1$;

14.21. $x=5$; 14.22. $c=3$; 14.23. $x=-\frac{6}{25}$; 14.24. $x=\frac{4+2\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{4-2\sqrt{3}}{3}$; 14.25. $x=-5$; 14.26. $x=\frac{3}{2}$;

14.27. $x=2$, $x=-\frac{3}{2}$; 14.28. $n=-1$, $n=1$; 14.29. $x=-5$, $x=5$; 14.30. $y=-4$, $y=4$;

14.31. $a=-2$, $a=2$; 14.32. $x=-\frac{3}{2}$, $x=\frac{3}{2}$; 14.33. $t=-\frac{1}{2}$, $t=\frac{1}{2}$; 14.34. $t=-\frac{1}{6}$, $t=\frac{1}{6}$;

14.35. $t=-2$, $t=2$; 14.36. $t=-\frac{3}{2}s$, $t=\frac{3}{2}s$; 14.37. $a=-\frac{m}{8}$, $a=\frac{m}{8}$; 14.38. $m=-\frac{2}{5}n$, $m=\frac{2}{5}n$;

14.39. $x=-1$, $x=-2$, $x=5$; 14.40. $x=-2$, $x=2$, $x=3$; 14.41. $x=1$; 14.42. $x=3$, $x=4$, $x=-5$;

14.43. $t=0$, $t=1$, $t=-3$; 14.44. $x=0$, $x=-1$; 14.45. $x=0$; 14.46. $x=2$, $x=-3$, $x=5$;

14.47. $t=0$, $t=-2$, $t=4$; 14.48. $x=0$; 14.49. $x=2$; 14.50. $x=4$; 14.51. $x=3$; 14.52. $x=0$;

14.53. $x=1$, $x=3$, $x=\frac{1}{2}$; 14.54. $t=-1$; 14.55. $z=-2$; 14.56. $x=-3$; 14.57. $x=1$;

14.58. $x=-1$, $x=1$; 14.59. $x=2$, $x=-3$; 14.60. $t=-3$, $t=3$; 14.61. $x=2$, $x=-2$;

14.62. $x=-1$, $x=1$, $x=-2$, $x=2$; 14.63. $x=1$, $x=-2$; 14.64. $x=0$, $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$;

14.65. $x=-3$, $x=3$; 14.66. $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$; 14.67. $x=-1$, $x=1$; 14.68. $t=-1$, $t=1$;

14.69. $x=1$, $x=-1$; 14.70. $x=0$, $x=2$; 15.1. $120\,(a+b+c)$; 15.2. $(a+b)\,(x+1)$;

15.3. $(m+p)\,(2n+3)$; 15.4. $(2a-b)\,(x-3)$; 15.5. $(m+n)\,(x+5)$; 15.6. $(2x+3y)\,(m-n)$;

15.7. $(x+1)\,(5y+3)$; 15.8. $(m+1)\,(1-x)$; 15.9. $(m-n)\,(4x+1)$; 15.10. $(2a+1)\,(1-x)$;

15.11. $\left(x^2+1\right)(1-b)$; 15.12. $(m+n)\,(x-1)$; 15.13. $(b+c)\,(2a-1)$; 15.14. $(x+2)\,(2y-1)$;

15.15. $(a+b)\,(x-1)$; 15.16. $(2x+3y)\,(m-1)$; 15.17. $x\,(1-2x)$; 15.18. $3x\,(1-3x)$; 15.19. $9ax\,(a-2x)$;

15.20. $x(7b+3)$; 15.21. $ab(5-8c)$; 15.22. $7c\left(b^2-2c^2+3c^3\right)$; 15.23. $\frac{5}{21}ab\left(14a-9b^3+21\right)$;

15.24. $(a+6)(a-b)$; 15.25. $\left(x^2+1\right)(y-1)$; 15.26. $(z-x)\left(y+z^2\right)$; 15.27. $(y-1)(x+y)$;

15.28. $a(a-b)(2x-1)$; 15.29. $(z-a)(z-b-a)$; 15.30. $(a-2)(a-b+c)$; 15.31. $x(3x+1)(x-y)$;

15.32. $b\left(c+a^3\right)(b+1)$; 15.33. $(x+1)(x-y-z)$; 15.34. $(m-n)(m+3p+1)$; 15.35. $(x+y)^2(a-b)$;

15.36. $(b-3)(a+b)^2$; 15.37. $(a+b)(2x-3)$; 16.1. $(x+2)(x-3)$; 16.2. $(x+6)(x+1)$;

16.3. $(x+2)(x-4)$; 16.4. $(x+3)(x+2)$; 16.5. $(t+6)(t-4)$; 16.6. $(n+3)(n-9)$; 16.7. $(4t+3)(2t+1)$;

16.8. $(t+4)(2t-1)$; 16.9. $(3x+2)(2x-3)$; 16.10. v^2-6v+6, Irreducible; 16.11. x^2+4, Irreducible;

16.12. $16x^2+25$, Irreducible; 16.13. $(3z+1)(z-1)$; 16.14. $(3k-2)(2k-3)$; 16.15. $(x+3)(2x-1)$;

16.16. $(x-1)^2$; 16.17. $(b-a)^2$; 16.18. $(x+2)^2$; 16.19. $(b-1)^2$; 16.20. $(a-1)^2$; 16.21. $(n-m)^2$;

16.22. $(x-5)^2$; 16.23. $\frac{1}{9}(c-3)^2$; 16.24. $(y-x+1)^2$; 16.25. $\frac{1}{900}(25x+6)^2$; 16.26. $\frac{1}{4}(3x-4)^2$;

16.27. $(3b-2a)^2$; 16.28. $(x+5)^2$; 16.29. $(2t-3)^2$; 16.30. $3x^2+2x+4$, Irreducible; 16.31. $\frac{1}{2}(6x+1)(2-x)$;

16.32. $(x+1)^2$; 16.33. $(3x+1)(2x-1)$; 16.34. $(b+c+x)^2$; 16.35. $(z-x)^2$; 16.36. $(c-b-2a)^2$;

16.37. $4(b+c)^2$; 16.38. $(1-3x)\left(x-\sqrt{2}\right)$; 16.39. $\left(x+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-2x\right)$; 16.40. $\left(a^2-3\right)^2\left(a^2+3\right)^2$;

16.41. $\left(3c^3-5\right)^2$; 16.42. $(y-x)^2\left(x^2+xy+y^2\right)^2$; 16.43. $\frac{1}{16}\left(16n^2-m^3\right)^2$; 16.44. $(n-1)(n+1)$;

16.45. $(x-5)(x+5)$; 16.46. $(4-y)(y+4)$; 16.47. $\left(1-\frac{a}{2}\right)\left(1+\frac{a}{2}\right)$; 16.48. $(1-2m)(2m+1)$;

16.49. $(2x-3)(2x+3)$; 16.50. $\left(\frac{1}{2}-3a\right)\left(\frac{1}{2}+3a\right)$; 16.51. $9(x-2)(x+2)$; 16.52. $(2t-3s)(3s+2t)$;

16.53. $(8a-m)(8a+m)$; 16.54. $(5m-2n)(5m+2n)$; 16.55. $\left(\frac{x}{10}-\frac{y}{9}\right)\left(\frac{x}{10}+\frac{y}{9}\right)$; 16.56. $(ab-cd)(ab+cd)$;

16.57. $4(b-2a)(2a+b)$; 16.58. $(7x+10)(7x-8)$; 16.59. $\left(m^{a+2}-x^{3a-4}\right)\left(m^{a+2}+x^{3a-4}\right)$;

16.60. $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$; 16.61. $(2a+5c)(2b+7c)$; 16.62. $(11b-a)(7a+b)$;

16.63. $\left(\sqrt{10}-m\right)\left(\sqrt{10}+m\right)\left(m^2+10\right)$; 16.64. $\left(\frac{a}{6}-\frac{b^2}{5}\right)\left(\frac{a}{6}+\frac{b^2}{5}\right)$; 16.65. $\left(2x-9y^2\right)\left(2x+9y^2\right)$;

16.66. $\left(\sqrt{10}mn-\frac{1}{2a}\right)\left(\sqrt{10}mn+\frac{1}{2a}\right)\left(10m^2n^2-\frac{1}{4a^2}\right)$; 16.67. $(x-5)(x+2)(x+1)$; 16.68. $(x-3)(x+2)(x-2)$;

16.69. $(x+3)(x-4)(x-2)$; 16.70. $(x+5)(x-3)(x-4)$; 16.71. $t(t+3)(t-1)$; 16.72. $x(x+1)^2$;

16.73. $x\left(x^2-4x+5\right)$; 16.74. $2x\left(3x^2+1\right)$; 16.75. $t(t+2)(t-4)$; 16.76. $(x-3)\left(x^2+3x+9\right)$;

16.77. $(x-4)\left(x^2+4x+16\right)$; 16.78. $(2-x)\left(x^2+2x+4\right)$; 16.79. $x\left(3h^2+3hx+x^2\right)$; 16.80. $(1-2y)\left(4y^2+2y+1\right)$;

16.81. $(4y-3)\left(16y^2+12y+9\right)$; 16.82. $\left(t^2-t+1\right)(t+1)$; 16.83. $\left(z^2-2z+4\right)(z+2)$; 16.84. $\left(x^2-3x+9\right)(x+3)$;

16.85. $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)$; 16.86. $(x-1)(x-2)(x+2)(x+1)$; 16.87. $(t+3)(t-3)\left(t^2+2\right)$; 16.88. $3x^2\left(x^2-2\right)$;

16.89. $(x-3)^2(x+3)^2$; 16.90. $\left(x^2+1\right)^2$; 16.91. $2(t-1)(t+1)\left(t^2+3\right)$; 16.92. $\left(3x^2-2\right)^2$;

16.93. $(x+5)(x-1)(x-2)(2x-3)$; 16.94. $3a^2(a-1)(a+1)\left(a^4+a^3+a^2+a+1\right)\left(a^4-a^3+a^2-a+1\right)$;

16.95. $(x-4)(x+5)(2x-3)(x+2)$; 16.96. $\left(a^4-a^3x+a^2x^2-ax^3+x^4\right)(a+x)$; 16.97. $(x-a+1)(a+x)$;

16.98. $(x-2)(x+2)\left(x^2+4\right)\left(x^4+16\right)$; 16.99. $x^2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; 16.100. $3\left(x^2+1\right)$, Irreducible;

16.101. $ab\left(b-a^2+1\right)$; 16.102. $40a\left(a+\frac{3+\sqrt{89}}{8}\right)\left(a+\frac{3-\sqrt{89}}{8}\right)$; 16.103. $c^2\left(b+7+\sqrt{70}\right)\left(b+7-\sqrt{70}\right)$;

16.104. $2yx\left(6y-9xy^2+8\right)$; 16.105. $8nm\left(15m^4-17mn+14n^3\right)$; 16.106. $h\left(h+2k-k^2\right)$;

16.107. $5x^2(x-1)(2x-1)(x+2)$; 16.108. $a^2(a+b)\left(a^2+b^3\right)$; 16.109. $y(y-x)(xy+4)(x+y)$;

16.110. $m\left(m^2+n^2-n^4+1\right)$; 16.111. $5x\left(5xy+6y^3+4\right)$; 16.112. $\frac{5}{6}x\left(8x^3+36y^2+9x^2y\right)$;

16.113. $\frac{5}{9}xy\left(2x^2-3y+5\right)$; 16.114. $\frac{a}{60}\left(9ab^3+8a^2b^2-12\right)$; 16.115. $4x^3a\left(1-2a^2-3ax^3\right)$; 16.116. $\sqrt{x}(x-2)(x+2)$;

16.117. $\sqrt[4]{x}\left(1-2\sqrt[4]{x}\right)$; 16.118. $\sqrt{x}\left(3-\sqrt{x}\right)$; 17.1. $x-2$; 17.2. $x-2$; 17.3. $x+2$;

17.4. $x^2-3x-3+\frac{8}{x-2}$; 17.5. $2x^3+13x^2+57x+290+\frac{1449}{x-5}$; 17.6. $x^4+5x^3+31x^2+184x+1114+\frac{6674}{x-6}$;

17.7. $\frac{193\,072}{7-x}-12x^4-84x^3-563x^2-3941x-27\,579$; 17.8. $13x^5-131x^4+1431x^3-15\,733x^2+173\,061x-1903\,656+\frac{20\,940\,205}{x+11}$;

17.9. $5x^2+15x+46+\frac{130}{x-3}$; 17.10. $x^3+\frac{11}{3}x^2+\frac{21}{2}x+\frac{63}{2}+\frac{191}{2(x-3)}$; 17.11. $\frac{3}{8}x^3+3x^2+\frac{179}{8}x+179$;

17.12. $10x^4-60x^3+\frac{1079}{3}x^2-2158x+12\,946-\frac{699\,085}{9(x+6)}$; 17.13. $\frac{x^4}{10}-x^3+\frac{97}{10}x^2+\frac{7}{10}-\frac{14}{x+10}$; 17.14. $2x^2-9x+12-\frac{11}{x+1}$;

17.15. $2x^3-9x^2+24x-52-\frac{1}{x+2}$; 17.16. $4x^2-8x+25$; 17.17. $8x^3-36x^2-26x+33-\frac{18}{x+1}$;

17.18. $5x^2+\frac{11}{2}x+\frac{17}{4}-\frac{49}{8\left(x+\frac{1}{2}\right)}$; 17.19. $3x^2-\frac{5}{4}x+\frac{11}{16}-\frac{309}{64\left(x-\frac{1}{4}\right)}$; 17.20. $2x^4+6x^3+12x^2+36x+111+\frac{328}{x-3}$;

17.21. $8x^2+3$; 17.22. $2x^2+9x+18+\frac{79}{x-4}$; 17.23. $4x^2-11x+31+\frac{33-76x}{x^2+2x-1}$; 17.24. $2+\frac{x-18}{x^2-x-6}$;

17.25. $-2x+3+\frac{8x-7}{1-2x^2-x}$; 17.26. $x+2$; 17.27. $2a+3$; 17.28. $5x-8-\frac{5}{2x-1}$; 17.29. x^2+2x+4;

17.30. $7x^2+14x+14+\frac{31}{x-2}$; 17.31. $4x^2+2x-\frac{19}{2}-\frac{13}{2(2x-1)}$; 17.32. $\frac{1}{2}x^4+\frac{3}{4}x^3+\frac{7}{8}x^2+\frac{15}{16}x+\frac{31}{32}+\frac{63}{32(2x-1)}$;

17.33. $10y^4-9y^3+18y^2-29y+29+\frac{29-58y}{y^2+y-1}$; 17.34. $x^2-2x+\frac{3x-2}{x^2+2x+1}$; 17.35. $x^3-3x^2+2x+16-\frac{80x+96}{x^2+5x+6}$;

17.36. $2y^2+4y+\frac{11}{2}+\frac{35}{2(2y-3)}$; 17.37. $a^3+3-\frac{12a+2}{a^2+2a+1}$; 17.38. $-x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{11}{4}x+\frac{23}{8}+\frac{31-55x}{8\left(3x-2x^2-1\right)}$;

17.39. $x+4-\frac{5}{x^2+x+2}$; 17.40. $2x-1+\frac{3}{3x+4}$; 17.41. $3x^3+\frac{11}{6}x^2-\frac{7}{3}x-\frac{9}{2}+\frac{1}{2x^2-x+2}\left(\frac{13}{6}x+8\right)$;

17.42. $2xy^2+x^2y-\frac{6}{2x-y}$; 17.43. $x+1+\frac{x+1}{x^3+2x^2+5x-1}$; 17.44. $x^5+y^5+xy^4+x^4y+x^2y^3+x^3y^2$;

17.45. $a^4+b^4-4ab^3-4a^3b+6a^2b^2+\frac{b^5-b^4}{a-b}$; 17.46. $a^6+b^6-ab^5-a^5b+a^2b^4-a^3b^3+a^4b^2-\frac{2b^7}{a+b}$;

17.47. $\frac{5}{2}x^2-x-\frac{15}{4}+\frac{1}{2x^3+x-1}\left(\frac{23}{4}x+\frac{11}{2}x^2-\frac{15}{4}\right)$; 18.1. $\frac{2x-7}{x^2+2x-3}=\frac{13}{4(x+3)}-\frac{5}{4(x-1)}$; 18.2. $\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+1}$;

18.3. $\frac{1-x^2-8x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{4}{x-3}$; 18.4. $\frac{3x^2-1}{x^3-x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}$; 18.5. $\frac{x+x^2+1}{x^3+x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+1}$;

18.6. $\frac{6x^2-7x-2}{x^3-x^2-4x+4}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$; 18.7. $\frac{x+4}{x^3-4x^2+x+6}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{2}{x-2}+\frac{7}{4(x-3)}$; 18.8. $\frac{x-3}{x^2-2x^3}=\frac{10}{2x-1}-\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}$;

18.9. $\frac{4x^2-6x-16}{x^3+x^2-4x-4}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+2}$; 18.10. $\frac{14x^2-13x+2}{4x^3-8x^2+5x-1}=\frac{3}{x-1}+\frac{1}{2x-1}+\frac{2}{(2x-1)^2}$;

18.11. $\frac{7x^2-x^3-23x-7}{x^4-x^3-7x^2+x+6}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x+2}-\frac{1}{x-3}$; 18.12. $\frac{13x+x^2+48}{119x+19x^2+x^3+245}=\frac{2}{x+5}-\frac{1}{x+7}-\frac{3}{(x+7)^2}$;

18.13. $\frac{x^3+19x^2-18x+22}{x^4+2x^3-x^2+4x-6}=\frac{2}{x-1}-\frac{5}{x+3}+\frac{4x}{x^2+2}$; 18.14. $\frac{2x^2-3x-1}{4x^4-20x^3+35x^2-25x+6}=\frac{1}{3(x-2)}-\frac{2}{x-1}+\frac{4}{3(2x-1)}+\frac{2}{2x-3}$;

18.15. $\frac{3x^2}{x^3-x^2-x+1}=\frac{9}{4(x-1)}+\frac{3}{4(x+1)}+\frac{3}{2(x-1)^2}$; 18.16. $\frac{x^2+x-1}{x^4+6x^3+13x^2+12x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{(x+2)^2}$;

18.17. $\frac{x^2-4x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{1}{x^2+1}\left(\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{2(x-1)}$; 18.18. $\frac{7-2x^3-18x-19x^2}{x^4+8x^3+18x^2+16x+5}=\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{4}{x+1}+\frac{2}{(x+1)^3}+\frac{2}{x+5}$;

18.19. $\frac{x-1}{x^2-4x}=\frac{1}{4x}+\frac{3}{4(x-4)}$; 18.20. $\frac{3x^2-2x}{x+5x^2-2x^3-6}=\frac{8}{3(2-x)}-\frac{1}{3(x+1)}+\frac{3}{2x-3}$; 18.21. $\frac{x^2-2}{x^4-1}=\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{4(x-1)}+\frac{3}{2\left(x^2+1\right)}$;

18.22. $\frac{9x-13x^2+2x^3-22}{x^4+2x^3-x^2+4x-6}=\frac{5}{x+3}-\frac{2}{x-1}-\frac{x}{x^2+2}$; 18.23. $\frac{x^4+1}{x^5-x^2}=\frac{2}{3(x-1)}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x+1}\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)$;

18.24. $\frac{x^2+2x-1}{27x^3-1}=\frac{1}{9x^2+3x+1}\left(\frac{5}{9}x+\frac{25}{27}\right)-\frac{2}{27(3x-1)}$; 18.25. $\frac{4x^2-x+17}{x^3+x^2+2x+2}=\frac{22}{3(x+1)}+\frac{1}{x^2+2}\left(\frac{7}{3}-\frac{10}{3}x\right)$;

18.26. $\frac{5x^2+2x-1}{x^3+3x^2+3x+2}=\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x^2+x+1}$; 18.27. $\frac{10x^2-23x+51}{x^4-x^3-11x^2-x-12}=\frac{1}{x-4}-\frac{3}{x+3}+\frac{2x-3}{x^2+1}$; 18.28. $\frac{x^4+1}{x^5+x^3}=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}+\frac{2x}{x^2+1}$;

18.29. $\frac{2x^2-1}{x^3+8}=\frac{7}{12(x+2)}+\frac{1}{x^2-2x+4}\left(\frac{17}{12}x-\frac{5}{3}\right)$; 18.30. $\frac{x^2+1}{\left(x^2+x+1\right)^3}=\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)^2}-\frac{x}{\left(x^2+x+1\right)^3}$;

18.31. $\frac{2x^2-2x-7}{x^2+3x+2}=2-\frac{5}{x+2}-\frac{3}{x+1}$; 18.32. $\frac{2x^2-x-30}{x^2-x-6}=\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-3}+2$; 18.33. $\frac{4x^2-x+1}{x^2+2x+1}=\frac{6}{(x+1)^2}-\frac{9}{x+1}+4$;

18.34. $\frac{x^2+4x-7}{(x-2)^2}=\frac{8}{x-2}+\frac{5}{(x-2)^2}+1$; 18.35. $\frac{2x^3-x^2-3x+9}{x^2+x-6}=\frac{3}{x-2}+\frac{9}{x+3}+2x-3$;

18.36. $\frac{3x^4-5x^3-17x^2+64x-53}{x^3-7x+6}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}-\frac{1}{x+3}+3x-5$; 18.37. $\frac{x^4+x^3-x^2+5x+1}{x^2-3x+2}=x^2+4x+9-\frac{7}{x-1}+\frac{31}{x-2}$;

18.38. $\frac{x^5-x^3-x^2}{x^2-1}=x^3-1-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2(x+1)}$; 18.39. $\frac{2x^5-7x^4+6x^3-5x^2-2x+2}{2x^2-2x-2x^3+x^4+1}=2x-3-\frac{4}{x-1}-\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{3}{x^2+1}$;

18.40. $\frac{x^6-x^2+1}{x^3-3x^2+3x-1}=x^3+3x^2+6x+10+\frac{14}{x-1}+\frac{4}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$;

18.41. $\frac{x^6+7x^5+18x^4+26x^3+40x^2+59x+26}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}=x^2-x+2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}+\frac{3}{(x+2)^3}-\frac{12}{(x+2)^4}$; 18.42. $\frac{2x^4}{x^4+x^2+1}=2-\frac{1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x^2+x+1}$;

18.43. $\frac{x^6+x^2}{x^4+x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{2\left(x^2+x+1\right)}+\frac{1}{2\left(x^2-x+1\right)}$; 18.44. $\frac{3x^3-10x^2+7}{x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32}=\frac{3}{(x-2)^2}+\frac{8}{(x-2)^3}-\frac{4}{(x-2)^4}-\frac{9}{(x-2)^5}$;

18.45. $\frac{x^6+7x^5+18x^4+26x^3+40x^2+50x+26}{x^4+8x^3+24x^2+32x+16}=x^2-x+2+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{(x+2)^2}-\frac{6}{(x+2)^3}+\frac{6}{(x+2)^4}$; 19.1. $(x+1)^2+4$;

19.2. $(x-8)^2+16$; 19.3. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$; 19.4. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$; 19.5. $(x+2)^2-10$; 19.6. $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-3$;

19.7. $3\left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\frac{59}{12}$; 19.8. $4-2(x+1)^2$; 19.9. $\frac{25}{8}-2\left(x-\frac{5}{4}\right)^2$; 19.10. $3(x-4)^2+2$; 19.11. $\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$;

19.12. $\left(x^2+3\right)^2-1$; 19.13. $2\left(x^2-1\right)^2-2$; 19.14. $2\left(x^2+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{57}{8}$; 19.15. $\frac{1}{20}-5\left(x^2-\frac{1}{10}\right)^2$;

32.1. $2\sqrt{2}-2$; 32.2. $\frac{4}{3}\left(\sqrt{7}-1\right)$; 32.3. $\sqrt{2}-1$; 32.4. $-\sqrt{2}-1$; 32.5. $3\sqrt{3}-3\sqrt{2}$; 32.6. $6\sqrt{2}+4\sqrt{3}$;

32.7. $6\sqrt{2}+8$; 32.8. $\frac{\sqrt{5}+10}{19}$; 32.9. $-\frac{\sqrt{5}+10}{19}$; 32.10. $\sqrt{a+b}-\sqrt{a}$; 32.11. $\frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a}}$; 32.12. $3-2\sqrt{2}$;

32.13. $\frac{20-7\sqrt{3}}{23}$; 32.14. $\frac{6\sqrt{2}+11}{7}$; 32.15. $\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$; 32.16. $\frac{6x-5\sqrt{xy}-6y}{9x-4y}$; 32.17. $\frac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{y}$; 32.18. $\sqrt{x^2-1}-x$;

32.19. $\frac{2a+2\sqrt{a(a+b)}+b}{b}$; 32.20. $\sqrt{x}+\sqrt{2}$; 32.21. $(x-2)\left(2-\sqrt{x}\right)$; 32.22. $\frac{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}+4}{a-8}$; 32.23. $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1$;

32.24. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1$; 32.25. $\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{3a}+\sqrt[3]{9}}{a-3}$; 32.26. $\frac{\sqrt{2}}{a-2}\left(\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{2a}+\sqrt[3]{4}\right)$; 32.27. $-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2(x+1)}-\sqrt[3]{(x+1)^2}$;

32.28. $(x+2)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}\right)$; 32.29. $\frac{3}{10}\left((10x+17)^{2/3}+3(10x+17)^{1/3}+9\right)$; 32.30. $\frac{x-1}{5\left(\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{3(x+2)}+\sqrt[3]{9}\right)}$;

32.31. $\left(\sqrt{a+b}+1\right)^{2/3}+\left(\sqrt{a+b}+1\right)^{1/3}+1$; 32.32. $\frac{3}{b-16}\left(\sqrt[4]{b^3}+2\sqrt{b}+4\sqrt[4]{b}+8\right)$; 32.33. $2^{3/8}+\sqrt[4]{2x}+\sqrt[8]{2x^4}+x^{3/4}$;

32.34. $\frac{1}{(y+1)\left(\sqrt[4]{y^3}+\sqrt{y}+\sqrt[4]{y}+1\right)}$; 32.35. $\sqrt[5]{x^4}+\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^2}+\sqrt[5]{x}+1$; 32.36. $-\left(16+8\sqrt[5]{x}+4\sqrt[5]{x^2}+2\sqrt[5]{x^3}+\sqrt[5]{x^4}\right)$;

32.37. $\frac{\sqrt{3}}{1-243x}\left(1-3\sqrt[5]{x}+9\sqrt[5]{x^2}-27\sqrt[5]{x^3}+81\sqrt[5]{x^4}\right)$; 32.38. $\frac{2}{x+3}\left(\sqrt[5]{(3-2x)^4}+\sqrt[5]{(3-2x)^3}+\sqrt[5]{(3-2x)^2}+\sqrt[5]{3-2x}+1\right)$;

32.39. $-\frac{1}{x+3}\left(\sqrt[5]{(1-4x)^4}+\sqrt[5]{(1-4x)^3(x-2)}+\sqrt[5]{(9x-4x^2-2)^2}+\sqrt[5]{(1-4x)(x-2)^3}+\sqrt[5]{(x-2)^4}\right)$;

32.40. $\sqrt[4]{\left(x-\sqrt{2}\right)^3}+\sqrt{\left(x-\sqrt{2}\right)}\sqrt[4]{x-\sqrt{3}}+\sqrt[4]{x-\sqrt{2}}\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt[4]{\left(x-\sqrt{3}\right)^3}$; 33.1. $\frac{2x}{3z}$; 33.2. $3x^2+2x+1$;

33.3. $3x+1$; 33.4. $\frac{x^2+2x}{x-4}$; 33.5. $\frac{2a}{3d}$; 33.6. $\frac{1}{n+1}$; 33.7. $\frac{2x+3}{2x-3}$; 33.8. $\frac{x+2}{x-2}$; 33.9. $\frac{a+b}{a+6}$; 33.10. $\frac{1}{n-1}$;

33.11. $3-4a^2x^4$; 33.12. $\frac{x+1}{x-1}$; 33.13. $4y^6-5y^4+3$; 33.14. No se puede simplificar; 33.15. $3a^2-2a+1$;

33.16. $\frac{3x-3}{2x+2}$; 33.17. $a-ab+1$; 33.18. $-x$; 33.19. $\frac{x+y}{x+2}$; 33.20. $\frac{2x+1}{x+2}$; 33.21. $4a^6-3a^3+2$;

33.22. $2a^2+3ax^3-1$; 33.23. $\frac{x-1}{x+8}$; 33.24. $\frac{x+1}{1-x}$; 33.25. $\frac{a-4b}{a^2-4ab+16b^2}$; 34.1. $4x+1$; 34.2. $\frac{3b-2}{b}$;

34.3. $\frac{1}{2}xy$; 34.4. $\frac{2x}{x^2-1}$; 34.5. $\frac{u^2+3u+1}{u+1}$; 34.6. $\frac{a^2}{b^2}$; 34.7. $\frac{x}{yz}$; 34.8. $\frac{y-1}{y+1}$; 34.9. $\frac{3x+7}{(x-3)(x+5)}$;

34.10. $\frac{rs}{3t}$; 34.11. $\frac{5}{2}\frac{x+2}{x-2}$; 34.12. $\frac{2x^2+1}{2x^3}$; 34.13. $\frac{4a^2-3ab+2b^2}{a^2b^2}$; 34.14. $\frac{x(x-5)}{x+2}$; 34.15. $\frac{7}{5}$; 34.16. $\frac{a+b}{b}$;

34.17. $\frac{c}{c-2}$; 34.18. $\frac{2x+3}{x+2}$; 34.19. $\frac{13}{5}$; 34.20. $\frac{25}{4}$; 34.21. $\frac{4}{5}$; 34.22. $-\frac{206}{81}$; 34.23. $-\frac{1}{3}$;

35.1. $-2t$; 35.2. $-\frac{4}{5}$; 35.3. $\frac{(x-5)(x+1)}{x}$; 35.4. $\frac{(x+1)\left(x^2-x+1\right)}{x}$; 35.5. $\frac{\left(x^2+1\right)(x+1)(x-1)}{x}$; 35.6. $\frac{x-x^2-1}{x}$;

35.7. $\frac{3(4-x)}{2x+5}$; 35.8. $\frac{2\left(x-2+\sqrt{3}\right)\left(x-2-\sqrt{3}\right)}{x-2}$; 35.9. $\frac{-13(x+1)}{2x+5}$; 35.10. $\frac{4x-x^2-6}{2x^2+1}$; 35.11. $\frac{(x+1)(x+5)(x-3)}{13x+15}$;

35.12. $\frac{x+6}{(x+2)(x-2)}$; 35.13. $\frac{2(5x+3)}{(x-5)(x+3)}$; 35.14. $\frac{2\left(x^2+1\right)}{(3-x)(x+1)}$; 35.15. $\frac{(4x-5)(x+1)}{4x(x-5)}$; 35.16. $\frac{x-8}{(x+2)(2-x)}$;

35.17. $\frac{x-2}{(x+3)(x-3)}$; 35.18. $\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+1)}$; 35.19. $\frac{3t^4-t^2+4}{\left(t^4+2\right)(t+1)}$; 35.20. $\frac{\left(x-3+\sqrt{13}\right)\left(x-3-\sqrt{13}\right)}{(x-4)(x+2)(x-1)}$;

35.21. $\frac{2}{(x+1)(x-1)}\left(x+\frac{3-\sqrt{33}}{4}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right)$; 35.22. $\frac{5\left(\sqrt{2}-x\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{(x-1)(x+2)}$; 35.23. $\frac{4}{(x+1)(1-x)}\left(x-\frac{3+\sqrt{57}}{8}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{57}}{8}\right)$;

35.24. $\frac{a+11}{(a+2)(a-2)}$; 35.25. $\frac{3(x+9)}{(x+3)^2(x-3)}$; 35.26. $\frac{5}{x-1}$; 35.27. $\frac{2}{x+5}$; 35.28. $x-3$; 35.29. $\frac{1}{n}$;

35.30. $\frac{a-2b}{a+2b}$; 35.31. $\frac{a^2+3a+9}{a+3}$; 35.32. $\frac{2\left(n^2+4\right)}{n+2}$; 36.1. $\left(x^2+1\right)(y-1)$; 36.2. $(z-x)\left(y+z^2\right)$;

36.3. $a(a-b)(2x-1)$; 36.4. $x(3x+1)(x-y)$; 36.5. $(z-a)(z-b-a)$; 36.6. $(a-2)(a+b+c)$;

36.7. $(y-1)(x+y)$; 36.8. $(x+1)(x-y-z)$; 36.9. $(m-n)(m+3p+1)$; 36.10. $(x+y)^2(a-b)$;

36.11. $(b-3)(a+b)^2$; 36.12. $(x+3)^2$; 36.13. $(2x-1)^2$; 36.14. $2(x+1)^2$; 36.15. $(x-y+3)(x+y+3)$;

36.16. $\left(x+a^2-1\right)\left(a^2-x+1\right)$; 36.17. $(z+1)(2-z)$; 36.18. $\left(x+y^2-3\right)\left(y^2-x+3\right)$; 36.19. $(y+3)(y-8)$;

36.20. $(w-3)(w+3)$; 36.21. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$; 36.22. $(x-1)\left(x^2+x+1\right)$; 36.23. $\left(x^2-x+1\right)(x+1)$;

36.24. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$; 36.25. $\left(\sqrt{2}-z\right)\left(z+\sqrt{2}\right)\left(z^2+2\right)$; 36.26. $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$;

36.27. $\left(x-\sqrt{2}\right)^2\left(x+\sqrt{2}\right)^2$; 36.28. $\left(x^2+2x-1\right)(x-1)^2$; 36.29. $(y-1)\left(y^4+y^3+y^2+y+1\right)$;

36.30. $(z+2)\left(z^4-2z^3+4z^2-8z+16\right)$; 36.31. $(z-2)\left(z^4+2z^3+4z^2+8z+16\right)$;

36.32. $\left(x+\frac{1}{\sqrt[5]{2}}\right)\left(x^4-\frac{x^3}{\sqrt[5]{2}}+\frac{x^2}{\sqrt[5]{4}}-\frac{x}{\sqrt[5]{8}}+\frac{1}{\sqrt[5]{16}}\right)$; 36.33. $(1-x)(x+2)\left(x^2-2x+4\right)\left(x+x^2+1\right)$;

36.34. $\frac{1}{8}(x-6)\left(x^2+6x+36\right)$; 36.35. $\left(\frac{x}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+9\right)$; 36.36. $\left(x-\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)$;

36.37. $x^2\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; 36.38. $(x-1)\left(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\right)$; 37.1. $x=-\frac{4}{3}$;

37.2. $x=\frac{12}{11}$; 37.3. $x=-\frac{15}{8}$; 37.4. $x=\frac{20}{9}$; 37.5. $x=0$, $x=-2$; 37.6. $x=0$, $x=\frac{1}{3}$;

37.7. $x=-\frac{5}{2}$, $x=1$; 37.8. $x=-2$, $x=4$; 37.9. $x=-10$, $x=1$; 37.10. $x=-\frac{9+\sqrt{85}}{2}$, $x=-\frac{9-\sqrt{85}}{2}$;

37.11. $x=1-2\sqrt{2}$, $x=2\sqrt{2}+1$; 37.12. $x=-\frac{5+\sqrt{13}}{6}$, $x=-\frac{5-\sqrt{13}}{6}$; 37.13. $x=4$, $x=-4$;

37.14. $x=\frac{11}{2}$, $x=-\frac{11}{2}$; 37.15. $x=-\frac{7+\sqrt{33}}{4}$, $x=-\frac{7-\sqrt{33}}{4}$; 37.16. No tiene solución;

37.17. $x=0$, $x=5$; 37.18. $x=-1$, $x=-5$, $x=1$; 37.19. $x=1$, $x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 37.20. $x=0$;

37.21. $x=-1$, $x=-\sqrt{2}-1$, $x=\sqrt{2}-1$; 37.22. $x=-1$, $x=5$, $x=-2$; 37.23. $x=2$, $x=3$, $x=-2$;

37.24. $x=4, \quad x=-5, \quad x=3;$ 37.25. $x=\frac{4}{3};$ 37.26. $x=2, \quad x=-1;$ 37.27. $x=\frac{3}{2}, \quad x=-\frac{3}{2};$

37.28. $x=-\frac{1}{3}\sqrt{6}, \quad x=\frac{1}{3}\sqrt{6};$ 37.29. $x=3, \quad x=-1, \quad x=-\sqrt{2}, \quad x=\sqrt{2};$ 37.30. $t=\frac{1}{16};$ 37.31. $x=-6;$

37.32. $t=2, \quad t=-3, \quad t=5;$ 37.33. No tiene solución; 37.34. $x=\frac{a^2}{a-1}$, si $a\neq 1;$ 37.35. $x=-2, \quad x=-1;$

37.36. $a=\frac{5-\sqrt{17}}{2}, \quad a=\frac{5+\sqrt{17}}{2};$ 37.37. No tiene solución; 37.38. $t=-\frac{4}{9};$ 37.39. $a=-11;$ 37.40. $x=-\frac{2}{3};$

37.41. $x=1, \quad x=-1;$ 38.1. $x=\frac{ab}{a-b+5}$ con $a-b+5\neq 0;$ 38.2. $x=\frac{a^2}{a-1}$ con $a\neq 1;$ 38.3. $t=1-b^2;$

38.4. $z=\frac{a(a+b)}{a+ab+1}$ con $a+ab+1\neq 0;$ 38.5. $v=\frac{3b+2c}{3b-2c}$ con $3b-2c\neq 0;$ 38.6. $x=2a$ con $a+b\neq 0;$

38.7. $x=\frac{cb^2}{d(b^2-ac)}+b$ con $b^2-ac\neq 0;$ 38.8. $z=\frac{b}{3}$ con $b\neq 0;$ 38.9. $z=0$ con $a\neq 0;$

38.10. $y=\frac{11a}{2b}$ con $a\neq 0, \; b\neq 0;$ 38.11. $x=\frac{n-1\pm\sqrt{n^2-6n+17}}{2};$ 39.1. $h=\frac{2s}{b};$ 39.2. $R=\frac{L}{2\pi};$ 39.3. $h=\frac{3V}{\pi R^2};$

39.4. $m_1=\frac{m_2k}{Fd^2};$ 39.5. $a=\frac{V}{t};$ 39.6. $v_a=\frac{v_c}{R};$ 39.7. $a=\pm\sqrt{c^2-b^2};$ 39.8. $v_0=v_f-at;$ 39.9. $F=\frac{T}{d};$

39.10. $F=\frac{P}{V};$ 39.11. $R=\frac{F_c}{mv_a^2};$ 39.12. $v_0=\pm\sqrt{2gh_{max}};$ 39.13. $g=\frac{2h}{t^2};$ 39.14. $d_1=\frac{h_1d_2}{h_2};$ 39.15. $v_2=\frac{v_1d_1}{d_2};$

39.16. $T_2=\frac{v_2P_2T_1}{v_1P_1};$ 39.17. $h=\frac{P}{dg};$ 39.18. $d=\frac{Pt}{F};$ 39.19. $b=\frac{2s}{h}-B;$ 39.20. $d=\frac{v_f^2-v_0^2}{2g};$ 39.21. $I=\frac{V}{R};$

39.22. $T=\frac{2\pi N}{v_a};$ 39.23. $t=\frac{Q}{0{,}24I^2R};$ 39.24. $\varepsilon=\frac{1}{t}\left(l-\frac{R_t}{R_0}\right);$ 39.25. $t=\frac{d}{v};$ 39.26. $v=\pm\sqrt{\frac{2E_c}{m}};$

39.27. $b=\frac{P}{2}-h;$ 39.28. $v_0=\frac{d}{t}-\frac{gt}{2};$ 39.29. $d=\frac{2A}{D};$ 39.30. $R=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}};$ 39.31. $R_i=R_\epsilon-\frac{E}{I};$

39.32. $F_2=\frac{FF_1}{F_1-F};$ 39.33. $l=\frac{V}{ah};$ 39.34. $t=\frac{100I}{CR};$ 39.35. $c=\frac{5(F-32)}{9};$ 39.36. $a_1=a_n-\frac{2s}{n};$ 39.37. $s=\frac{\rho}{R};$

39.38. $R=\pm\sqrt{\frac{kq}{E}};$ 39.39. $b=y-mx;$ 39.40. $a=\frac{T}{m_1+m_2};$ 39.41. $n=\frac{a_n-a_1}{R}+1;$ 39.42. $\triangle t=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{S}{S_0}-1\right);$

39.43. $m=\frac{2E}{2gh+v^2};$ 39.44. $\overline{x_2}=\frac{N_2\overline{x}_T+N_1\left(\overline{x}_T-\overline{x_1}\right)}{N_2};$ 39.45. $m=\frac{2\triangle E_c}{v_2^2-v_1^2};$ 39.46. $\delta=\frac{1}{\triangle t}\left(\frac{L_T}{L_0}-1\right);$ 39.47. $a=\frac{F}{m};$

39.48. $T_2=\frac{1}{3\alpha}\left(\frac{v}{v_0}-1\right)+T_1;$ 39.49. $R_i=\frac{\omega}{i^2t}-R_\epsilon;$ 39.50. $v_1=v_2-\frac{F\cdot(t_2-t_1)}{m};$ 39.51. $t=t_1;$ 40.1. $c=-10;$

40.2. $F=-31;$ 40.3. $b=2;$ 40.4. $x=-\frac{1}{3};$ 40.5. $R=3;$ 40.6. $r=6.3246, \quad r=-6.3246;$ 40.7. $a_1=3;$

40.8. $a=5;$ 40.9. $N=30;$ 40.10. $T_2=273.25;$

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 2

Orden en la recta real.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.02

- Orden en la recta real. Propiedades. Intervalos.
- Demostraciones que involucran relaciones de orden.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 2.1 *: Responda **VERDADERA** o **FALSA** las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta*

1. *Para toda* x, *se tiene que* $x^2 > x$.
2. *Para toda* x, *se tiene que* $x < x + 1$.

Solución : 1. Por contraejemplo: Consideremos $x = 1$, entonces $x^2 = (1)^2 = 1$, así,

$$1 = (1)^2 \not> 1, \qquad \text{son iguales.}$$

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

2. Por el orden en la recta real, es conocido que $0 < 1$, si sumamos x a ambos lados de la relación de orden, por la propiedad aditiva del orden en la recta real y la existencia del elemento neutro en el conjunto de los números reales, se tiene que

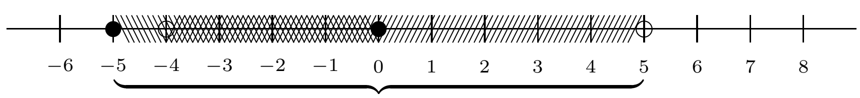
$$x + 0 < x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad x < x + 1$$

Por lo tanto, la proposición es **VERDADERA**. ★

Ejemplo 2.2 *: Sean* $I_1 = (-4, 5)$, $I_2 = (-2, 7]$, $I_3 = [-5, 0]$, $I_4 = [1, 6)$. *Representar en la recta real, en forma algebraica y conjuntista los siguientes intervalos*

1. $I_1 \bigcup I_3$ 2. $I_2 \bigcup I_4$ 3. $I_1 \bigcap I_3$ 4. $I_1 \bigcap I_2$ 5. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_4$ 6. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$

Solución : 1. Para $I_1 \bigcup I_3$: Representación en la recta real



$I_1 \bigcup I_3 = [-5, 5)$

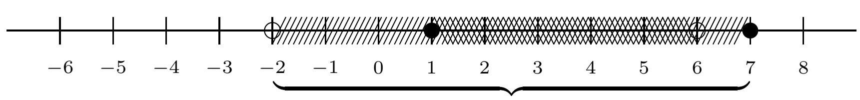
Así,

$$I_1 \bigcup I_3 = (-4, 5) \bigcup [-5, 0] = [-5, 5),$$

es decir,

$$I_1 \bigcup I_3 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -5 \leq x < 5\} \qquad \text{ó} \qquad -5 \leq x < 5.$$

2. Para $I_2 \bigcup I_4$: Representación en la recta real



$I_2 \bigcup I_4 = (-2, 7]$

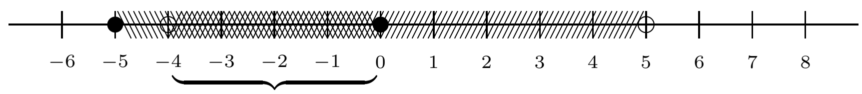
Así,

$$I_2 \bigcup I_4 = (-2, 7] \bigcup [1, 6) = (-2, 7],$$

es decir,

$$I_1 \bigcup I_4 = \{x \in \mathbb{R} \;/\; -2 < x \leq 7\} \qquad \text{ó} \qquad -2 < x \leq 7.$$

3. Para $I_1 \bigcap I_3$: Representación en la recta real



$I_1 \bigcap I_3 = (-4, 0]$

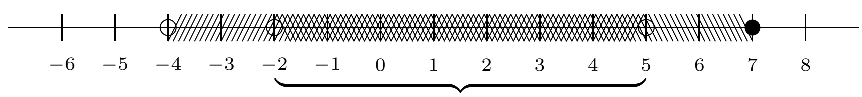
Así,

$$I_1 \bigcap I_3 = (-4, 5) \bigcap [-5, 0] = (-4, 0],$$

equivalentemente

$$I_1 \bigcap I_3 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -4 < x \leq 0\} \qquad \text{ó} \qquad -4 < x \leq 0.$$

4. Para $I_1 \bigcap I_2$: Representación en la recta real



$I_1 \bigcap I_4 = (-2, 5)$

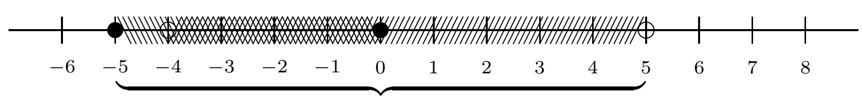
Así,

$$I_1 \bigcap I_2 = (-4, 5) \bigcap (-2, 7] = (-2, 5),$$

equivalentemente

$$I_1 \bigcap I_2 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x < 5\} \qquad \text{ó} \qquad -2 < x < 5.$$

5. Para $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_4$: En primer lugar, se tiene que la representación de $I_1 \bigcup I_3$ viene dada por

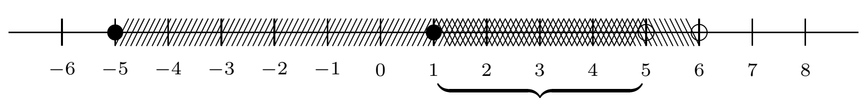


$I_1 \bigcup I_3 = (-4, 5) \bigcup [-5, 0] = [-5, 5)$

es decir,

$$I_1 \bigcup I_3 = [-5, 5).$$

Por lo que, la representación en la recta real de $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_4$ es



$(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_4 = [1, 5)$

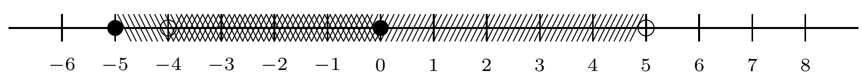
Así,

$$\left(I_1 \bigcup I_3\right) \bigcap I_4 = \Big(\ (-4, 5) \bigcup [-5, 0] \ \Big) \bigcap [1, 6) = [-5, 5) \bigcap [1, 6) = [1, 5)$$

equivalentemente

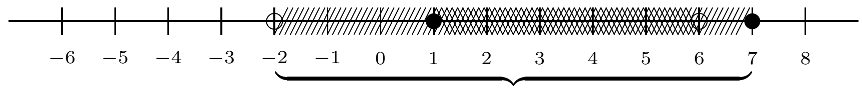
$$\left(I_1 \bigcup I_3\right) \bigcap I_4 = \{x \in \mathbb{R} \ / \ 1 \leq x < 5\} \qquad \text{ó} \qquad 1 \leq x < 5$$

6. Para $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$: En primer lugar, se tiene que la representación en la recta real de $I_1 \bigcup I_3$ viene dada por



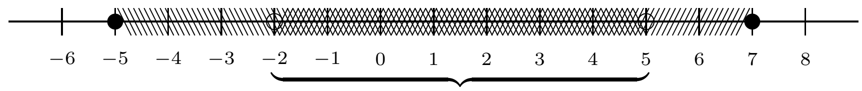
$I_1 \bigcup I_3 = (-4, 5) \bigcup [-5, 0] = [-5, 5)$

mientras que, la representación de $I_4 \bigcup I_2$ es



$$I_4 \bigcup I_2 = [1,6) \bigcup (-2,7] = (-2,7]$$

Por lo que, la representación en la recta real de $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$ es



$$(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2) = (-2,5)$$

Así,

$$\left(I_1 \bigcup I_3\right) \bigcap \left(I_4 \bigcup I_2\right) = \Big(\ (-4,5) \bigcup [-5,0]\ \Big) \bigcap \Big(\ [1,6) \bigcup (-2,7]\ \Big) = [-5,5) \bigcap (-2,7] = (-2,5)$$

equivalentemente

$$\left(I_1 \bigcup I_3\right) \bigcap \left(I_4 \bigcup I_2\right) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ -2 < x < 5\} \qquad \text{ó} \qquad -2 < x < 5.$$

★

Ejemplo 2.3 *: Determine el primer entero N para el cual sea verdadera la proposición*

$$3n + 25 < 3^n,$$

para cada $n \geq N$ y luego demuestre la proposición para cada $n \geq N$.

Demostración : Observemos que si $n = 4$ se cumple la desigualdad, ya que

$$3\,(4) + 25 = 12 + 25 = 37 < 3^4 = 81.$$

así, que el primer entero para el cual se cumple la desigualdad es $n = 4$.

Para demostrar que se cumple para todo $n \geq 4$, usaremos inducción matemática, demostremos, en primer lugar, que la desigualdad se cumple para $n = 4$, así,

$$3\,(4) + 25 \overset{?}{<} 3^4 \qquad \Longrightarrow \qquad 12 + 25 \overset{?}{<} 81 \qquad \Longrightarrow \qquad 37 < 81 \quad \text{se cumple}$$

Hipótesis inductiva : Supongamos que se cumple para $n = h$, es decir, la siguiente desigualdad es cierta

$$3h + 25 < 3^h.$$

Tesis inductiva : Demostremos que se cumple la desigualdad para $n = h + 1$, es decir, debemos verificar que la siguiente desigualdad es cierta

$$3\,(h+1) + 25 \overset{?}{<} 3^{h+1}.$$

así, por hipótesis inductiva

$$3\,(h+1) + 25 = 3h + 3 + 25 = \overbrace{(3h + 25)}^{\substack{\boxed{\text{Hipótesis Inductiva}} \\ \downarrow}} + 3 < 3^h + 3,$$

observemos que

$$3 \leq 3^h, \qquad \text{para todo} \quad h \in \mathbb{N},$$

en partícular, si $h \geq 4$, así,

$$3^h + 3 \leq 3^h + 3^h = 2\left(3^h\right),$$

por otra parte,

$$0 < 3^h, \qquad \text{para todo} \quad h \in \mathbb{N},$$

luego,

$$0 + 2\left(3^h\right) < 3^h + 2\left(3^h\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 2\left(3^h\right) < 3\left(3^h\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 2\left(3^h\right) < 3^{h+1},$$

es decir,

$$3(h+1) + 25 = 3h + 3 + 25 = (3h+25) + 3 < 3^h + 3 \leq 2\left(3^h\right) < 3^{h+1},$$

por lo tanto,

$$3(h+1) + 25 < 3^{h+1}. \qquad \text{se cumple}$$

entonces, queda demostrado que

$$n + 25 < 3^n, \qquad \text{para todo} \quad n \geq 4.$$

★

Ejemplo 2.4 *: Escriba el recíproco y el contrarrecíproco de la siguiente proposición*

"Si $7x - 5 \leq 2$, entonces $x \leq 1$."

Solución : Sean

$$\begin{aligned} &\text{p}: \quad 7x - 5 \leq 2 \\ &\text{q}: \quad x \leq 1 \end{aligned}$$

entonces, la proposición

"Si $7x - 5 \leq 2$, entonces $x \leq 1$."

se simboliza por

$$\text{p} \longrightarrow \text{q},$$

así, su recíproco es

$$\text{q} \longrightarrow \text{p} \quad \Longrightarrow \quad \text{"Si } x \leq 1, \text{ entonces } 7x - 5 \leq 2.\text{"}$$

y su contrarrecíproco es

$$\overline{\text{q}} \longrightarrow \overline{\text{p}} \quad \Longrightarrow \quad \text{"Si } x > 1, \text{ entonces } 7x - 5 > 2.\text{"}$$

★

Ejemplo 2.5 *: Demuestre que si $m, b, x, y \in \mathbb{R}$, tales que $m > 0$ y $x < y$, entonces $mx + b < my + b$.*

Demostración : Tenemos que

Hipótesis 1 : $m > 0$; Hipótesis 2 : $b \in \mathbb{R}$; Hipótesis 3 : $x < y$; Tesis : $mx + b < my + b$

así, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Comenzando con la hipótesis 3, como

$x < y$ (Hipótesis 3)

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por m, como m es positiva (Hipótesis 1) la desigualdad no cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$mx < my$

$\downarrow$ Sumamos $b \in \mathbb{R}$ (Hipótesis 2) a ambos lados de la desigualdad, la misma no cambia por la propiedad aditiva del orden en los números reales

$mx + b < my + b$ (Tesis)

con lo que concluimos que

$$\text{si} \quad x < y, \qquad \text{entonces} \qquad mx + b < my + b,$$

es decir,

la operación "multiplicar por un número positivo y sumar un número real" no cambia la desigualdad.

★

Ejemplo 2.6 *: Demuestre que si* $a < 0$, $b < 0$ *y* $a < b$, *entonces* $a^2 > b^2$.

Demostración : Tenemos que

Hipótesis 1 : $a < 0$; Hipótesis 2 : $b < 0$; Hipótesis 3 : $a < b$; Tesis : $a^2 > b^2$

así, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Comenzando con la hipótesis 3, como

$$
\begin{array}{cl}
a < b & \text{(Hipótesis 3)} \\
\downarrow & \begin{array}{l}\text{Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por } a, \\ \text{como } a \text{ es negativa (Hipótesis 1) la desigualdad cambia} \\ \text{(Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)}\end{array} \\
a^2 > ab & \text{(Desigualdad I)}
\end{array}
$$

por otro lado, podemos hacer las mismas operaciones, pero esta vez multiplicando por b

$$
\begin{array}{cl}
a < b & \text{(Hipótesis 3)} \\
\downarrow & \begin{array}{l}\text{Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por } b, \\ \text{como } b \text{ es negativa (Hipótesis 2) la desigualdad cambia} \\ \text{(Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)}\end{array} \\
ab > b^2 & \text{(Desigualdad II)}
\end{array}
$$

Entonces, tenemos

$$a^2 > ab \qquad \text{y} \qquad ab > b^2$$

por la propiedad transitiva de orden de los números reales

$$a^2 > b^2,$$

con lo que concluimos que

$$\text{si} \quad a < b < 0, \quad \text{entonces} \quad a^2 > b^2,$$

es decir,

la operación "elevar al cuadrado" cambia la desigualdad, cuando los términos son negativos.

★

Ejemplo 2.7 *: Demuestre que para todo* $a, b \in \mathbb{R}$, *si* $a \leq b$, *entonces* $a^3 \leq b^3$.

Demostración : Observemos que si

Hipótesis 1 : $a \in \mathbb{R}$; Hipótesis 2 : $b \in \mathbb{R}$; Hipótesis 3 : $a \leq b$; Tesis : $a^3 \leq b^3$.

entonces, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Obtenemos la demostración por contradicción, es decir, mantenemos las hipótesis y negamos la tesis

Hipótesis 1 : $a \in \mathbb{R}$; Hipótesis 2 : $b \in \mathbb{R}$; Hipótesis 3 : $a \leq b$; Tesis : $a^3 \geq b^3$.

De aquí, si $a^3 \geq b^3$, entonces

$$a^3 \geq b^3 \quad \Longrightarrow \quad a^3 - b^3 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \geq 0,$$

es conocido que $xy \geq 0$ si y solo si x y y tienen el mismo signo, es decir

$$xy \geq 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad \begin{cases} x \geq 0 & \text{y} \quad y \geq 0 \\ & \text{ó} \\ x \leq 0 & \text{y} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

Demostremos que la expresión $a^2 + ab + b^2$ siempre es mayor o igual a cero. Para ello, estudiamos dos casos

- **Caso I :** Si a y b tienen el mismo signo, entonces

$$ab \geq 0, \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 + ab + b^2 \geq 0 + a^2 + b^2 \qquad \Longrightarrow \qquad a^2 + ab + b^2 \geq a^2 + b^2,$$

puesto que, $a^2 + b^2 \geq 0$, por ser la suma de dos valores positivos, se concluye que

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0.$$

- **Caso II :** Si a y b tiene signos contrario, supongamos que $a \leq 0$ y $b \geq 0$, entonces $ab \leq 0$, así,

$a \leq b$ (Hipótesis 3)

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por a, como a es negativa la desigualdad cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$a^2 \geq ab$ (Desigualdad I)

por lo tanto,

$$ab \leq a^2,$$

luego,

$$a^2 + ab \geq 0 \qquad \leftarrow \quad \text{Se mantiene el signo del mayor.}$$

si sumamos a ambos lados de la desigualdad b^2, obtenemos

$$a^2 + ab + b^2 \geq b^2 \geq 0,$$

por transitividad, se concluye que

$$a^2 + ab + b^2 \geq 0.$$

Así, $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, con lo que

$$(a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right) \geq 0, \qquad \text{si y solo si} \qquad a - b \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad a \geq b,$$

lo cual contradice que $a \leq b$ (Hipóteis 3), por lo que se tiene que,

$$a \leq b \qquad \Longrightarrow \qquad a^3 \leq b^3,$$

es decir,

la operación "elevar al cubo" mantiene la desigualdad.

★

Ejemplo 2.8 *: Demuestre que si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \in [0, \infty)$.*

Demostración : Tenemos que

$$x \in \mathbb{R} \qquad \text{es equivalente a} \qquad -\infty < x < \infty,$$

así, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-\infty < x < \infty$.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6), esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$\begin{tikzcd}
 & -\infty < x < \infty \arrow[dl, "\text{Parte negativa}"'] \arrow[dr, "\text{Parte positiva}"] & \\
-\infty < x < 0 \arrow[d, "\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}"'] & & 0 \leq x < \infty \arrow[d, "\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}"] \\
\infty > x^2 > 0 \arrow[dr] & & 0 \leq x^2 < \infty \arrow[dl, "\text{Entonces } x^2 \in (0,\infty) \bigcup [0,\infty)"] \\
 & 0 \leq x^2 < \infty &
\end{tikzcd}$$

luego, si $x \in \mathbb{R}$, entonces $x^2 \in [0, \infty)$. ★

Ejemplo 2.9 *: Demuestre que si* $-2 \leq x < 5$, *entonces* $1 \leq 2x + 5 < 15$.

Demostración : Tenemos que

$$-2 \leq x < 5 \qquad \text{(Hipótesis)}$$

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por 2, como 2 es positivo la desigualdad **no** cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$$-4 \leq 2x < 10$$

$\downarrow$ Sumamos 5 a ambos lados de la desigualdad, la misma no cambia por la propiedad aditiva del orden en los números reales

$$-4 + 5 \leq 2x + 5 < 10 + 5$$

$$1 \leq 2x + 5 < 10 \qquad \text{(Tesis)}$$

Luego,

$$-2 \leq x < 5 \qquad \longrightarrow \qquad 1 \leq 2x + 5 < 15.$$

★

Ejemplo 2.10 *: Demuestre que si* $-\dfrac{2}{3} < x < 4$, *entonces* $-10 < 2 - 3x < 4$.

Demostración : Tenemos que

$$-\frac{2}{3} < x < 4 \qquad \text{(Hipótesis)}$$

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por -3, como -3 es negativo la desigualdad cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$$2 > -3x < -12$$

$\downarrow$ Sumamos 2 a ambos lados de la desigualdad, la misma no cambia por la propiedad aditiva del orden en los números reales

$$2 + 2 > -3x + 2 < -12 + 2$$

$$4 > 2 - 3x > -10 \qquad \text{(Tesis)}$$

Luego,

$$-\frac{2}{3} < x < 4 \qquad \longrightarrow \qquad -10 < 2 - 3x < 4.$$

★

Ejemplo 2.11 *: Demuestre que si* $x \in (-5, -2]$, *entonces* $4 \leq x^2 < 25$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in (-5, -2] \qquad \text{es equivalente a} \qquad -5 < x \leq -2,$$

así, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-5 < x \leq -2$.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6), en virtud, que la desigualdad contiene términos negativos la desigualdad cambia, así,

$$-5 < x \leq -2 \qquad \underset{\boxed{\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \qquad 25 > x^2 \geq 4$$

luego, si $x \in (-5, -2]$, entonces $4 \leq x^2 < 25$. ★

Ejemplo 2.12 *: Demuestre que si* $x \in (-3, 1)$, *entonces* $1 \leq x^2 + 1 < 10$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in (-3, 1) \qquad \text{es equivalente a} \qquad -3 < x < 1,$$

así, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-3 < x < 1$ y sumar 1.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6), esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$-3 < x < 1$$

Parte negativa $\swarrow$ $\searrow$ Parte positiva

$$-3 < x < 0 \qquad\qquad 0 \leq x < 1$$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia) $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)

$$9 > x^2 > 0 \qquad\qquad 0 \leq x^2 < 1$$

$\searrow$ $\swarrow$ Entonces $x^2 \in (0, 9) \bigcup [0, 1)$

$$0 \leq x^2 < 9$$

$\downarrow$ Sumamos 1 (la desigualdad se mantiene)

$$1 \leq x^2 + 1 < 10$$

luego, si $x \in (-3, 1)$, entonces $1 \leq x^2 + 1 < 10$. ★

Ejemplo 2.13 *: Demuestre que si* $-4 \leq x \leq 2$, *entonces* $-25 \leq 7 - 2x^2 \leq 7$.

Demostración : Debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-4 \leq x \leq 2$, multiplicar por -2 y sumar 7.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6), esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$
\begin{array}{ccc}
 & -4 \le x \le 2 & \\
\text{Parte negativa} \swarrow & & \searrow \text{Parte positiva} \\
-4 \le x < 0 & & 0 \le x \le 2 \\
\text{Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia)} \downarrow & & \downarrow \text{Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)} \\
16 \ge x^2 > 0 & & 0 \le x^2 \le 4 \\
\searrow & & \swarrow \text{Entonces } \ x^2 \in [0,4] \bigcup (0,16] \\
 & 0 \le x^2 \le 16 & \\
 & \downarrow \text{Multiplicamos por } -2 \text{ (la desigualdad cambia)} & \\
 & 0 \ge -2x^2 \le -32 & \\
 & \downarrow \text{Sumamos } 7 \text{ (la desigualdad se mantiene)} & \\
 & -25 \le 7 - 2x^2 \le 7 &
\end{array}
$$

luego, si $-4 \le x \le 2$, entonces $-25 \le 7 - 2x^2 \le 7$. ★

Ejemplo 2.14 *: Si* $-4 < x \le 6$, *demuestre que* $-\dfrac{9}{4} \le x^2 - 3x \le 18$.

Demostración : Observemos que la desigualdad a demostrar presenta combinaciones de expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratemos de reescribir dicha espresión de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x, para ello completamos cuadrados.

Es conocido que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

así, para $a = 1$, $b = -3$ y $c = 0$, se tiene que

$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Con lo que debemos demostrar

$$\text{Si} \quad -4 < x \le 6, \quad \text{entonces} \quad -\frac{9}{4} \le \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \le 18.$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-4 < x \le 6$ se le resta $\dfrac{3}{2}$.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se eleva al cuadrado. Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6), esto nos llevará a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero.

3. Por último, al resultado obtenido en la parte 2. se le resta $\frac{9}{4}$.

Entonces,

$$-4 < x \leq 6$$

$$\Big\downarrow \text{ Restamos } \tfrac{3}{2} \text{ (la desigualdad se mantiene)}$$

$$-\frac{11}{2} < x - \frac{3}{2} \leq \frac{9}{2}$$

Parte negativa ↙ ↘ Parte positiva

$$-\frac{11}{2} < x - \frac{3}{2} < 0 \qquad\qquad 0 \leq x - \frac{3}{2} \leq \frac{9}{2}$$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia) ↓ ↓ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)

$$\frac{121}{4} > \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 > 0 \qquad\qquad 0 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$$

↘ ↙ Entonces $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \in \left[0, \frac{81}{4}\right] \bigcup \left(0, \frac{121}{4}\right)$

$$0 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$$

$$\Big\downarrow \text{ Restamos } \tfrac{9}{4} \text{ (la desigualdad se mantiene)}$$

$$-\frac{9}{4} \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \leq 18$$

luego, si $-4 < x \leq 6$, entonces $-\frac{9}{4} \leq x^2 - 3x \leq 18$. ★

Ejemplo 2.15 *: Si* $\frac{1}{2} \leq x < 5$, *demuestre que* $\frac{17}{7} \leq 3 - \frac{2}{x+3} < \frac{11}{4}$.

Demostración : Observemos que la expresión $f(x) = 3 - \frac{2}{x+3}$ no tiene sentido si $x = -3$, ya que con ese valor se obtendría una división entre cero, puesto que, ese valor, $x = -3$, no pertenece al intervalo de estudio $\left(\frac{1}{2}, 5\right]$, no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $\frac{1}{2} \leq x < 5$ se le suma 3.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se le aplica el inverso multiplicativo.
3. Al resultado obtenido en la parte 2. se multiplica por -2.
4. Por último, al resultado obtenido en la parte 3. se le suma 3.

$$\frac{1}{2} \leq x < 5 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{7}{2} \leq x + 3 < 8 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{2}{7} \geq \frac{1}{x+3} > \frac{1}{8}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Multiplicamos por } -2\\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad -\frac{4}{7} \leq -\frac{2}{x+3} < -\frac{2}{8} \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Sumamos } 3\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{17}{7} \leq 3-\frac{2}{x+3} < \frac{11}{4}$$

Luego, si $\frac{1}{2} \leq x < 5$, entonces $\frac{17}{7} \leq 3 - \frac{2}{x+3} < \frac{11}{4}$. ★

Ejemplo 2.16 *: Si $0 \leq x \leq 2$, demuestre que $-4 \leq \frac{x+2}{x-3} \leq -\frac{2}{3}$.*

Demostración : Observemos que la expresión $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$ no tiene sentido si $x = 3$, ya que con ese valor se obtendría una división entre cero, puesto que, ese valor, $x = 3$, no pertenece al intervalo de estudio $[0, 2]$, no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Por otra parte, la desigualdad a demostrar presenta un cociente entre expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratamos de reescribir dicha espresión de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x, para ello, rescribimos la expresión f como

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x+2-3+3}{x-3} = \frac{x-3+5}{x-3} = \frac{x-3}{x-3} + \frac{5}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3},$$

por lo tanto,

$$f(x) = \frac{x+2}{x-3} = 1 + \frac{5}{x-3}.$$

Con lo que debemos demostrar

$$\text{Si} \quad 0 \leq x \leq 2, \quad \text{entonces} \quad -4 \leq 1 + \frac{5}{x-3} \leq -\frac{2}{3}$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $0 \leq x \leq 2$ se le resta 3.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se le aplica el inverso multiplicativo.
3. Al resultado obtenido en la parte 2. se multiplica por 5.
4. Por último, al resultado obtenido en la parte 3. se le suma 1.

$$0 \leq x \leq 2 \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Restamos } 3\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad -3 \leq x-3 \leq -1 \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)}\\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad -\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x-3} \geq -1$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Multiplicamos por } 5\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad -\frac{5}{3} \geq \frac{5}{x-3} \geq -5 \qquad \underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Sumamos } 1\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \qquad -\frac{2}{3} \geq 1+\frac{5}{x-3} \geq -4$$

Luego, si $0 \leq x \leq 2$, entonces $-4 \leq \frac{x+2}{x-3} \leq -\frac{2}{3}$. ★

Ejemplo 2.17 *: Si* $x \in (-1,2)$, *demuestre que* $\dfrac{2}{5} < 2 - \dfrac{x^3}{5} < \dfrac{11}{5}$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in (-1,2) \qquad \text{es equivalente a} \qquad -1 < x < 2,$$

así, procedemos de la siguiente manera: elevar al cubo la desigualdad $-1 < x < 2$, multiplicar por $-\dfrac{1}{5}$ y sumar 2.

$$-1 < x < 2 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } (\cdot)^3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad -1 < x^3 < 8 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Multiplicamos por } -\frac{1}{5} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{5} > -\frac{x^3}{5} > -\frac{8}{5}$$

$$\underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{11}{5} > 2 - \frac{x^3}{5} > \frac{2}{5}$$

Luego, si $-1 < x < 2$, entonces $\dfrac{2}{5} < 2 - \dfrac{x^3}{5} < \dfrac{11}{5}$. ★

Ejemplo 2.18 *: Demuestre que si* $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 1\right]$, *entonces* $-5 \leq \dfrac{2x^3 - 7}{2 - x^3} < -\dfrac{11}{4}$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 1\right] \qquad \text{es equivalente a} \qquad -\sqrt[3]{2} < x \leq 1.$$

Observemos que la expresión $f(x) = \dfrac{2x^3 - 7}{2 - x^3}$ no tiene sentido si $x = \sqrt[3]{2}$, ya que con ese valor se obtendría una división entre cero, puesto que, ese valor, $x = \sqrt[3]{2}$, no pertenece al intervalo de estudio $\left(-\sqrt[3]{2}, 1\right]$, no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Por otra parte, la desigualdad a demostrar presenta un cociente que es combinación de expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratemos de reescribir dicho cociente de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x. Puesto que, el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador, se dividen los polinomios

$$\begin{array}{r|l} 2x^3 - 7 & -x^3 + 2 \\ \cline{2-2} 2x^2 + 4 & -2 \\ \hline -3 & \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x) = \frac{2x^3 - 7}{2 - x^3} = -2 - \frac{3}{2 - x^3} = -2 + \frac{3}{x^3 - 2}.$$

Con lo que debemos demostrar:

$$\text{Si} \quad -\sqrt[3]{2} < x \leq 1, \quad \text{entonces} \quad -5 \leq \frac{3}{x^3 - 2} - 2 < -\frac{11}{4}.$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-\sqrt[3]{2} < x \leq 1$ se eleva al cubo.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se le suma -2.

3. Al resultado obtenido en la parte 2. se le aplica el inverso multiplicativo.
4. Al resultado obtenido en la parte 3. se multiplica por 3.
5. Por último, al resultado obtenido en la parte 4. se le suma -2.

Entonces

$$-\sqrt[3]{2} < x \leq 1 \quad \underset{\substack{\text{Aplicamos } (\cdot)^3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad -2 < x^3 \leq 1 \quad \underset{\substack{\text{Sumamos } -2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad -4 < x^3 - 2 \leq -1 \quad \underset{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{1}{4} > \frac{1}{x^3-2} \geq -1$$

$$\underset{\substack{\text{Multiplicamos por } 3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{3}{4} > \frac{3}{x^3-2} \geq -3 \quad \underset{\substack{\text{Sumamos } -2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{11}{4} > \frac{3}{x^3-2} - 2 \geq -5$$

Luego, si $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 1\right]$, entonces $-5 \leq \dfrac{2x^3-7}{2-x^3} < -\dfrac{11}{4}$. ★

Ejemplo 2.19 *: Si* $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$, *demuestre que* $2 \leq x^4 + 2 < 27$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right] \qquad \text{es equivalente a} \qquad -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{5},$$

así, debemos elevar a la cuatro la desigualdad $-\sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}$ y sumar 2.

Es conocido que al elevar a la cuatro una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 23 y ejercicio 24, esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$-\sqrt{2} < x \leq \sqrt{5}$$

Parte negativa: $-\sqrt{2} < x < 0$ ⟶ Aplicamos $(\cdot)^4$ (la desigualdad cambia) ⟶ $4 > x^4 > 0$

Parte positiva: $0 \leq x \leq \sqrt{5}$ ⟶ Aplicamos $(\cdot)^4$ (la desigualdad se mantiene) ⟶ $0 \leq x^4 \leq 25$

Entonces $x^4 \in (0,4) \bigcup [0,25]$

$$0 \leq x^4 \leq 25$$

Sumamos 2 (la desigualdad se mantiene)

$$2 \leq x^4 + 2 < 27$$

luego, si $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$, entonces $2 \leq x^4 + 2 < 27$. ★

Ejemplo 2.20 *: Si* $x \in [-3, 2]$, *demuestre que* $0 \leq x^4 + 2x^2 \leq 99$.

Demostración : Observemos que la desigualdad involucra dos operaciones sobre la incógnita x, así, que tratemos de reescribir la expresión de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x. Puesto que, ambas operaciones son pares, completamos cuadrado.

Es conocido que

$$az^2+bz+c=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a}.$$

Como, x^4+2x^2 lo podemos escribir de la forma

$$x^4+2x^2=\left(x^2\right)^2+2\left(x^2\right),$$

entonces, completamos cuadrado para la variable x^2 y los coeficientes $a=1$, $b=-3$ y $c=0$,

$$x^4+2x^2=\left(x^2+1\right)^2-1.$$

Además,

$$x\in[-3,2] \qquad \text{es equivalente a} \qquad -3\leq x\leq 2,$$

así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-3\leq x\leq 2$ se le aplica "elevar al cuadrado".
2. Al resultado obtenido en la parte 1. le sumamos 1.
3. Al resultado obtenido en la parte 2. se le aplica "elevar al cuadrado".
4. Por último, al resultado obtenido en la parte 3. se le suma -1

Entonces, como debemos elevar al cuadrado y el intervalo considerado $-3\leq x\leq 2$, contiene valores negativos, positivos y al cero, dividimos dicho intervalo en su parte negativa y positiva-cero

$$\begin{tikzcd}
 & -3\leq x\leq 2 \arrow[dl, "\text{Parte negativa}"'] \arrow[dr, "\text{Parte positiva}"] & \\
-3\leq x<0 \arrow[d, "\text{Aplicamos } (\cdot)^2"', "\text{(la desigualdad cambia)}"] & & 0\leq x\leq 2 \arrow[d, "\text{Aplicamos } (\cdot)^2", "\text{(la desigualdad se mantiene)}"'] \\
9\geq x^2>0 \arrow[dr] & & 0\leq x^2\leq 4 \arrow[dl, "\text{Entonces } x^2\in[0,4]\bigcup(0,9)"] \\
 & 0\leq x^2\leq 9 \arrow[d, "\text{Sumamos } 1", "\text{(la desigualdad se mantiene)}"'] & \\
 & 1\leq x^2+1\leq 10 \arrow[d, "\text{Aplicamos } (\cdot)^2", "\text{(la desigualdad se mantiene)}"'] & \\
 & 1\leq \left(x^2+1\right)^2\leq 100 \arrow[d, "\text{Restamos } 1", "\text{(la desigualdad se mantiene)}"'] & \\
 & 0\leq \left(x^2+1\right)^2-1\leq 99 &
\end{tikzcd}$$

luego, si $-3\leq x\leq 2$, entonces $0\leq x^4+2x^2\leq 99$. ★

Ejemplo 2.21 *: Si* $x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)$, *demuestre que* $0\leq\left(\frac{2-3x}{4x+3}\right)^4<\frac{2401}{16}$.

Demostración : Tenemos que

$$x\in\left(-\frac{1}{2},1\right) \qquad \text{es equivalente a} \qquad -\frac{1}{2}<x<1,$$

Observemos que la expresión $f(x)=\left(\dfrac{2-3x}{4x+3}\right)^4$ no tiene sentido si $x=-\dfrac{3}{4}$, ya que con ese valor se obtendría una división entre cero, puesto que , ese valor, $x=-\dfrac{3}{4}$, no pertenece al intervalo de estudio $\left(-\dfrac{1}{2},1\right)$, no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Por otra parte, la desigualdad a demostrar presenta un cociente entre expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratamos de reescribir dicha espresión de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x, puesto que, los polinomios del numerador y denominador tiene grado iguales podemos dividirlos

$$\begin{array}{r|l} -3x+2 & 4x+3 \\ \cline{2-2} 3x+\dfrac{9}{4} & -\dfrac{3}{4} \\ \cline{1-1} \dfrac{17}{4} & \end{array}$$

por lo tanto,

$$f(x)=\left(\frac{2-3x}{4x+3}\right)^4=\left(\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3}-\frac{3}{4}\right)^4.$$

Con lo que debemos demostrar que:

$$\text{Si}\quad -\frac{1}{2}<x<1,\quad \text{entonces}\quad 0\leq\left(\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3}-\frac{3}{4}\right)^4<\frac{2401}{16}.$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-\dfrac{1}{2}<x<1$ se multiplica por 4.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se le suma 3.
3. Al resultado obtenido en la parte 2. se le aplica el inverso multiplicativo.
4. Al resultado obtenido en la parte 3. se multiplica por $\dfrac{17}{4}$.
5. Al resultado obtenido en la parte 4. se le suma $-\dfrac{3}{4}$.
6. Por último, al resultado obtenido en la parte 5. se le aplica "elevar a la cuatro". Es conocido que al elevar a la cuatro una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 23 y ejercicio 24, esto nos llevará, si fuese necesario, a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero.

Entonces

$$-\frac{1}{2}<x<1 \quad \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad -2<4x<4 \quad \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad 1<4x+3<7 \quad \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad 1>\frac{1}{4x+3}>\frac{1}{7}$$

$\boxed{\text{Multiplicamos por } 4 \text{ (la desigualdad se mantiene)}}$ $\boxed{\text{Sumamos } 3 \text{ (la desigualdad se mantiene)}}$ $\boxed{\text{Aplicamos } \tfrac{1}{(\cdot)} \text{ (la desigualdad cambia)}}$

$$\underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad \frac{17}{4}>\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3}>\frac{17}{28} \quad \underset{\uparrow}{\Longrightarrow} \quad \frac{7}{2}>\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3}-\frac{3}{4}>-\frac{1}{7}$$

$\boxed{\text{Multiplicamos por } \tfrac{17}{4} \text{ (la desigualdad se mantiene)}}$ $\boxed{\text{Sumamos } -\tfrac{3}{4} \text{ (la desigualdad se mantiene)}}$

así, se tiene que

$$-\frac{1}{7} < \frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4} < \frac{7}{2},$$

aplicamos, ahora $(\cdot)^4$, puesto que la expresión $\dfrac{17}{4}\dfrac{1}{4x+3} - \dfrac{3}{4}$ está entre un número negativo y otro positivo, debemos separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero.

$$-\frac{1}{7} < \frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4} < \frac{7}{2}$$

Parte negativa

$$-\frac{1}{7} < \frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4} < 0$$

Aplicamos $(\cdot)^4$
(la desigualdad cambia)

$$\frac{1}{2401} < \left(\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4}\right)^4 > 0$$

Parte positiva

$$0 \leq \frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4} < \frac{7}{2}$$

Aplicamos $(\cdot)^4$
(la desigualdad se mantiene)

$$0 \leq \left(\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4}\right)^4 < \frac{2401}{16}$$

Entonces

$$\left(\tfrac{17}{4}\tfrac{1}{4x+3} - \tfrac{3}{4}\right)^4 \in \left(0, \tfrac{1}{2401}\right] \bigcup \left[0, \tfrac{2401}{16}\right)$$

$$0 \leq \left(\frac{17}{4}\frac{1}{4x+3} - \frac{3}{4}\right)^4 < \frac{2401}{16}$$

luego, si $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, demuestre que $0 \leq \left(\dfrac{2-3x}{4x+3}\right)^4 < \dfrac{2401}{16}$. ★

Ejemplo 2.22 *: Demuestre que si* $-1 \leq x < 2$, *entonces* $-1 \leq \dfrac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+2} \leq \dfrac{7}{5}$.

Demostración : Observemos que la desigualdad a demostrar presenta un cociente que es combinación de expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratemos de reescribir dicho cociente de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x. Puesto que, los polinomios del numerador y denominador tiene grado iguales podemos dividirlos

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 - 4x + 1 & x^2 - 2x + 2 \\ \cline{2-2} -2x^2 + 4x - 4 & 2 \\ \hline -3 & \end{array}$$

de aquí,

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+2} = 2 - \frac{3}{x^2-2x+2}.$$

Ahora, completamos cuadrado en el denominador. Es conocido que

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

así, para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 2$, se tiene que

$$x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1,$$

por lo tanto

$$\frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+2} = 2 - \frac{3}{x^2-2x+2} = \frac{2x^2-4x+1}{x^2-2x+2} = 2 - \frac{3}{(x-1)^2+1}.$$

Observemos que la expresión $f(x) = 2 - \dfrac{3}{(x-1)^2 + 1}$ siempre tiene sentido, ya que el denominador nunca se anulará, pues es la suma de dos términos positivos, por lo que no tenemos que hacer ninguna consideración partícular sobre el intervalo a estudiar, $[-1, 2)$.

Entonces, debemos demostrar que

$$\text{Si} \quad -1 \leq x < 2, \quad \text{entonces} \quad -1 \leq 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 1} \leq \frac{7}{5}.$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-1 \leq x < 2$ se le resta 1.
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se eleva al cuadrado
3. Al resultado obtenido en la parte 2. se le suma 1.
4. Al resultado obtenido en la parte 3, se le aplica el inverso multiplicativo.
5. Al resultado obtenido en la parte 4. se multiplica por -3.
6. Por último, al resultado obtenido en la parte 5. se le suma 2.

Entonces

$$-1 \leq x < 2$$

$$\Big\downarrow \ \text{Restamos } 1 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$-2 \leq x - 1 < 1$$

Parte negativa:

$$-2 \leq x - 1 < 0$$

$$\Big\downarrow \ \text{Aplicamos } (\cdot)^2 \ \text{(la desigualdad cambia)}$$

$$4 \geq (x-1)^2 > 0$$

Parte positiva:

$$0 \leq x - 1 < 1$$

$$\Big\downarrow \ \text{Aplicamos } (\cdot)^2 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$0 \leq (x-1)^2 < 1$$

Entonces $(x-1)^2 \in (0, 4] \bigcup [0, 1)$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 4$$

$$\Big\downarrow \ \text{Sumamos } 1 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$1 \leq (x-1)^2 + 1 \leq 5$$

$$\Big\downarrow \ \text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \ \text{(la desigualdad cambia)}$$

$$1 \geq \frac{1}{(x-1)^2 + 1} \geq \frac{1}{5}$$

$$\Big\downarrow \ \text{Multiplicamos por } -3 \ \text{(la desigualdad cambia)}$$

$$-3 \leq -\frac{3}{(x-1)^2 + 1} \leq -\frac{3}{5}$$

$$\Big\downarrow \ \text{Sumamos } 2 \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$-1 \leq 2 - \frac{3}{(x-1)^2 + 1} \leq \frac{7}{5}$$

luego, si $-1 \leq x < 2$, entonces $-1 \leq \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 2} \leq \dfrac{7}{5}$. ★

Ejemplo 2.23 *: Si* $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 1$, *demuestre que* $\dfrac{1}{9} \leq \dfrac{x-4}{x^4-4x^3+8x-32} \leq \dfrac{8}{37}$.

Demostración : Observemos que la desigualdad a demostrar presenta cocientes que son combinaciones de expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratemos de reescribir dichos cocientes de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x.

A diferencia de lo realizado en el ejemplo 2.22, donde dividimos los polinomios y luego completamos cuadrados, en este ejemplo factorizamos el polinomio del denominador.

En virtud que, el grado del polinomio es 4 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces del polinomio y por ende, su factorización.

Los divisores del término independiente, $a_0 = -32$, son ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16 y ± 32.

- Para $x = -1$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 0 & 8 & -32 \\
-1 & & -1 & 5 & -5 & -3 \\
\hline
 & 1 & -5 & 5 & 3 & -35
\end{array}
\quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi
$$

Por lo tanto, $x = -1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 1$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 0 & 8 & -32 \\
1 & & 1 & -3 & -3 & 5 \\
\hline
 & 1 & -3 & -3 & 5 & -27
\end{array}
\quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi
$$

Por lo tanto, $x = 1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = -2$

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 0 & 8 & -32 \\
-2 & & -2 & 12 & -24 & 32 \\
\hline
 & 1 & -6 & 12 & -16 & 0
\end{array}
\quad \longleftarrow \quad \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark
$$

Por lo tanto, $x = -2$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio del denominador se puede escribir como

$$
p(x) = x^4 - 4x^3 + 8x - 32 = (x+2) \underbrace{\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}_{\uparrow \; \boxed{\text{Polinomio de } 3^{\text{er}} \text{ grado}}},
$$

donde, el polinomio de tercer grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -4 & 0 & 8 & -32 \\
-2 & & -2 & 12 & -24 & 32 \\
\hline
 & 1 & -6 & 12 & -16 & 0 \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\
 & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \boxed{d} &
\end{array}
$$

Factorizamos el polinomio $q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$, por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini. Volvemos a buscar las raíces en los divisores, excepto con $x = \pm 1$.

- Para $x = -2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -16 \\ -2 & & -2 & 16 & -56 \\ \hline & 1 & -8 & 28 & -72 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = -2$ **no** vuelve a ser raíz del polinomio.

- Para $x = 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -16 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & -8 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = 2$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = -4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -16 \\ -4 & & -4 & 40 & -108 \\ \hline & 1 & -10 & 52 & -124 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = -4$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -16 \\ 4 & & 4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = 4$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio dado se puede escribir como

$$q(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16 = (x-4)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -16 \\ 4 & & 4 & -8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & 4 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = x^2 - 2x + 4$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -2$ y $c = 4$,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

esto implica que, la expresión $r(x) = x^2 - 2x + 4$ es un polinomio **irreducible**, luego no se puede factorizar más de lo que ya está.

Luego, el polinomio del denominador se factoriza como

$$x^4 - 4x^3 + 8x - 32 = (x+2)(x-4)\left(x^2 - 2x + 4\right),$$

así, si $x \neq 4$, entonces

$$\frac{x-4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 32} = \frac{\cancel{x-4}}{(x+2)\cancel{(x-4)}\left(x^2-2x+4\right)} = \frac{1}{(x+2)\left(x^2-2x+4\right)},$$

pero $(x+2)\left(x^2-2x+4\right) = x^3 + 8$, con lo que

$$\frac{x-4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 32} = \frac{1}{x^3+8}, \qquad \text{si} \quad x \neq 4.$$

Observemos que la expresión $f(x) = \dfrac{1}{x^3+8}$, si $x = 4$, no tiene sentido si $x = -2$, ya que con ese valor se obtendría una división entre cero, puesto que , ese valor, $x = -2$, no pertenece al intervalo de estudio $\left[-\dfrac{3}{2}, 1\right]$, no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Con lo que debemos demostrar que:

$$\text{Si} \quad -\frac{3}{2} \leq x \leq 1, \;\; x \neq 4 \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{9} \leq \frac{1}{x^3+8} \leq \frac{8}{37}.$$

Así, procedemos de la siguiente manera

1. A la desigualdad $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 1$ se le aplica "elevar al cubo".
2. Al resultado obtenido en la parte 1. se le suma 8.
3. Por último, al resultado obtenido en la parte 2. se le aplica el inverso multiplicativo.

Entonces

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq 1 \underset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } (\cdot) \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} -\frac{27}{8} \leq x^3 \leq 1 \underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 8 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \frac{37}{8} \leq x^3 + 8 \leq 9 \underset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \frac{8}{37} \geq \frac{1}{x^3+8} \geq \frac{1}{9}$$

luego, si $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 1$, $x \neq 4$, entonces $\dfrac{1}{9} \leq \dfrac{1}{x^3+8} \leq \dfrac{8}{37}$. ★

Ejemplo 2.24 *: Demuestre que si* $2 \leq x < 5$, *entonces*

$$\frac{1}{5} < \frac{x^2+x}{2x^2+9x+4} \cdot \frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x-3} \cdot \frac{2x^2+5x-12}{2x^3+x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Demostración : Observemos que la desigualdad a demostrar presenta cocientes que son combinaciones de expresiones que involucran a la incógnita x, así, que tratemos de reescribir dichos cocientes de forma tal que aparezca combinaciones de operaciones sobre la incógnita x.

A diferencia de lo realizado en el ejemplo 2.22, donde dividimos los polinomios y luego completamos cuadrados, en este ejemplo factorizamos los polinomios.

- Para $p_1(x) = x^2 + x$: Por ser un polinomio de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende su factorización u observar que el binomio tiene como factor común a x, así,

$$p_1(x) = x^2 + x = x(x+1).$$

- Para $p_2(x) = 2x^2 + 9x + 4$: Por ser un polinomio de segundo grado aplicamos la resolvente con $a = 2$, $b = 9$ y $c = 4$, para obtener sus raíces y por ende su factorización.

$$x = \frac{-(9) \pm \sqrt{(9)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81-32}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-9 \pm 7}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-9+7}{4} = -\dfrac{1}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-9-7}{4} = -4 \end{cases}$$

entonces

$$p_2(x) = 2(x+4)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

- Para $p_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$: Por ser un polinomio de segundo grado aplicamos la resolvente con $a = 4$, $b = 4$ y $c = 1$, para obtener sus raíces y por ende su factorización.

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(4)(1)}}{2(4)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-4+0}{8} = -\dfrac{1}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-4-0}{8} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

entonces

$$p_3(x) = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

- Para $p_4(x) = 2x^2 - x - 3$: Por ser un polinomio de segundo grado aplicamos la resolvente con $a = 2$, $b = -1$ y $c = -3$, para obtener sus raíces y por ende su factorización.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = \dfrac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

entonces

$$p_4(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+1).$$

- Para $p_5(x) = 2x^2 + 5x - 12$: Por ser un polinomio de segundo grado aplicamos la resolvente con $a = 2$, $b = 5$ y $c = -12$, para obtener sus raíces y por ende su factorización.

$$x = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-12)}}{2(2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-5+11}{4} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-5-11}{4} = -4 \end{cases}$$

entonces

$$p_5(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+4).$$

- Para $p_6(x) = 2x^3 + x^2$: Observamos que x^2 es factor común en este binomio, así,

$$p_6(x) = 2x^3 + x^2 = x^2(2x+1).$$

Entonces

$$\frac{x^2+x}{2x^2+9x+4}\cdot\frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x-3}\cdot\frac{2x^2+5x-12}{2x^3+x^2}$$

$$=\frac{x\,(x+1)}{2\,(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x^2\,(2x+1)}$$

Simplificando la expresión

$$\frac{x\,(x+1)}{2\,(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{4\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x^2\,(2x+1)}$$

$$=\frac{x\,(x+1)}{\cancel{2}\,(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\cancel{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\cancel{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x^2\,(2x+1)}$$

$$=\frac{x\,(x+1)}{(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x^2\,(2x+1)}$$

- Si $x\neq 0$, podemos cancelar un término x

$$\frac{\cancel{x}\,(x+1)}{(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x^{\cancel{2}}\,(2x+1)}$$

$$=\frac{(x+1)}{(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+1)}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x\,(2x+1)}.$$

- Si $x\neq -1$, podemos cancelar los términos $x+1$

$$\frac{\cancel{(x+1)}}{(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)\cancel{(x+1)}}\cdot\frac{2\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x\,(2x+1)}$$

$$=\frac{2}{(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)(x+4)}{x\,(2x+1)}$$

- Si $x\neq -4$, podemos cancelar los términos $x+4$

$$\frac{2}{\cancel{(x+4)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)\cancel{(x+4)}}{x\,(2x+1)}=\frac{2}{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)}\cdot\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x\,(2x+1)}$$

- Si $x \neq -\dfrac{1}{2}$, podemos cancelar los términos $x + \dfrac{1}{2}$

$$\frac{2}{\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)}\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x\,(2x+1)} = \frac{\cancel{2}\cancel{\left(x+\frac{1}{2}\right)}}{\left(x-\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x\,\cancel{(2x+1)}} = \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{x}$$

- Si $x \neq \dfrac{3}{2}$, podemos cancelar los términos $x - \dfrac{3}{2}$

$$\frac{1}{\cancel{\left(x-\frac{3}{2}\right)}} \cdot \frac{\cancel{\left(x-\frac{3}{2}\right)}}{x} = \frac{1}{x}$$

Así, si $x \neq 0$, $x \neq -1$, $x \neq -4$, $x \neq -\dfrac{1}{2}$ y $x \neq \dfrac{3}{2}$, entonces

$$\frac{x^2+x}{2x^2+9x+4} \cdot \frac{4x^2+4x+1}{2x^2-x-3} \cdot \frac{2x^2+5x-12}{2x^3+x^2} = \frac{1}{x},$$

por lo que, debemos demostrar,

$$\text{si} \quad 2 \leq x < 5, \quad \text{entonces} \quad \frac{1}{5} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}.$$

Observemos que los valores excluidos en la simplificación, ninguno de ellos pertenecen al intervalo a estudiar $[2,5)$, así, que no tenemos que hacer ninguna consideración partícular al respecto.

Entonces, a la desigualdad $2 \leq x < 5$, le aplicamos $\dfrac{1}{(\cdot)}$, la desigualdad cambia (ver ejercicio 20) y obtenemos

$$\frac{1}{2} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{5}.$$

Luego, se demuestra que si $2 \leq x < 5$, entonces $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{2}$. ★

Ejercicios

1. Despeje x suponiendo que a, b y c son constantes positivas:

   a) $a\,(bx-c) \geq bc$ **b)** $ax+bc \leq c-bx$ **c)** $a \leq bx+c < 2a$

2. Despeje x suponiendo que a, b y c son constantes negativas: **a)** $ax+b<c$; **b)** $\dfrac{ax+b}{c} \leq b$.

3. Exprese las siguientes desigualdades en notación de intervalo

   1. $0 < x < 1$ 2. $0 \leq x < \pi$ 3. $-2 \leq x \leq 2$ 4. $-\dfrac{1}{2} < x \leq 6$ 5. $3 \geq x \geq -4$

   6. $\sqrt{2} \leq x < e$ 7. $a \leq x \leq b$ 8. $a \geq x > b$ 9. $m \leq x < n$ 10. $7 \geq x > 2$

   11. $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{7}{2}$ 12. $e^2 < x < \pi^2$ 13. $2 < x < -3$ 14. $1 \leq x \leq 1$ 15. $1 > x > 1$

   16. $x < 0$ 17. $x > 0$ 18. $x \leq 0$ 19. $x \geq 0$ 20. $x < 5$ 21. $x \geq -2$

   22. $x > -4$ 23. $x \leq \pi$ 24. $x < -\dfrac{1}{2}$ 25. $x \geq e^2$ 26. $-\infty < x < \infty$

4. Expresar los siguientes intervalos como desigualdades

1. $x \in (0,1)$ 2. $x \in [-2,5]$ 3. $x \in (2,4]$ 4. $x \in [-1,3)$ 5. $x \in (-\infty,2]$

6. $x \in [b,c)$ 7. $x \in [\pi,\infty)$ 8. $x \in (a,b)$ 9. $x \in (-\infty,-3)$ 10. $x \in \left(-\frac{3}{2},\sqrt{2}\right]$

11. $x \in \mathbb{R}$ 12. $x \in [0,\infty)$ 13. $x \in [-\pi,\pi]$ 14. $x \in (a,\infty)$ 15. $x \in (-\infty,0]$

5. Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

(a) Para toda x, se tiene que $x^2 > x$.
(b) Para toda x, se tiene que $x < x+1$.
(c) Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $x^2 = 1$.
(d) Si $I_1 = (-2,0]$ e $I_2 = (0,2]$, entonces $I_1 \bigcup I_2 = (-2,2]$.
(e) Si $I_1 = (-2,0]$ e $I_2 = (0,2]$, entonces $I_1 \bigcap I_2 = \{0\}$.
(f) Para toda x, se tiene que $x \geq x^2$.
(g) Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $x \geq x^2$.
(h) Si $a \leq b$, entonces $a < b$ y $a = b$.
(i) Sean
$$A = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x < 0\} \qquad \text{y} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > 0\},$$
entonces $A \bigcap B = \varnothing$.
(j) Si $x \geq 0$, $y > 0$, entonces $\dfrac{x}{y} \geq 0$.
(k) Si $x < 0$, $y = 0$, entonces $\dfrac{y}{x} = 0$.
(l) Si $x > 0$, entonces $\dfrac{1}{x} > 0$.
(m) Si $x^2 \geq 0$, entonces $x \geq 0$.
(n) Si $x^3 < 0$, entonces $x < 0$.
(o) Si $x \in [0,1]$, entonces $x^2 - x \leq 0$.
(p) Si $x^2 - x \leq 0$, entonces $x \geq 1$.

6. Responda **VERDADERO** o **FALSO** las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta.

1. $[-2,3) \subseteq (-3,1)$ 2. $[-2,3) \subseteq (-1,4)$ 3. $(0,1) \in [0,1]$ 4. $(0,1) \subseteq [0,1]$

5. $[0,1] \subseteq (0,1]$ 6. $1 \in [-1,1)$ 7. $-1 \in [-1,1)$ 8. $\varnothing \subset [-\pi,\pi]$

9. $3 \in [-2,3] \bigcap (3,5]$ 10. $3 \in [-2,3] \bigcup (3,5]$ 11. $3 \in [-2,3) \bigcup (3,5]$

12. $3 \in [-2,3) \bigcap (3,5]$ 13. $0 \in (-\infty,\infty)$ 14. $-e \in (-3,5] \bigcap [-1,7]$

15. $[-1,2] \subseteq (-2,3) \bigcap \left(-\frac{3}{2},7\right]$ 16. $(0,5] \subseteq (0,5) \bigcup [5,7]$ 17. $(0,5] \subseteq [0,3) \bigcup (3,7]$

18. $[-3,-1) \subseteq [-3,0)$ 19. $[-3,-1) \subseteq (-6,-2] \bigcap (-3,0]$ 20. $[2,5] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{4\}$

21. $-\infty \in \mathbb{R}$ 22. $\infty \subset \mathbb{R}$ 23. $\infty \in \mathbb{R}$ 24. $\pi \in [-\pi,\pi)$ 25. $\pi \in [a,b]$

26. $(1,7] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 27. $[1,7] \subseteq \mathbb{R} \setminus \{1\}$ 28. $\{0\} \subset [-1,3) \setminus \{0\}$

7. Exprese las siguientes desigualdades en notación de intervalo

1. $x < 0$ con $x \neq -1$ 2. $x > 0$ con $x \neq \pm\sqrt{2}$ 3. $x \leq 3$ con $x \neq 0$

4. $\pi \leq x$ con $x \neq \pi^2$ 5. $-2 < x < 3$ con $x \neq -1$ 6. $0 \leq x < 6$ con $x \neq 1,\ x \neq \dfrac{7}{2}$

7. $-1 \leq x \leq 3$ con $x \neq 0$ 8. $-6 \leq x \leq 5$ con $x^2 + 5x + 6 \neq 0$

9. $-5 \leq x < \dfrac{1}{2}$ con $x^2 - 1 \neq 0$ 10. $\sqrt{2} < x < 5$ con $x^3 - 8 \neq 0$

8. Sean $I_1 = (-4, 5)$, $I_2 = (-2, 7]$, $I_3 = [-5, 0]$, $I_4 = [1, 6)$. Representar en la recta real, en forma algebraica y conjuntista los siguientes intervalos

   1. $I_1 \bigcup I_3$ 2. $I_2 \bigcup I_4$ 3. $I_1 \bigcap I_3$ 4. $I_1 \bigcap I_2$ 5. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_4$ 6. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$

9. Sean $I_1 = [0, 5)$, $I_2 = (-2, 1]$, $I_3 = [1, 6]$, $I_4 = (-1, 6)$. Representar en la recta real, en forma algebraica y conjuntista los siguientes intervalos

   1. $I_1 \bigcup I_2$ 2. $I_3 \bigcup I_4$ 3. $I_1 \bigcap I_3$ 4. $I_4 \bigcap I_2$ 5. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap I_2$ 6. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$

10. Sean $I_1 = \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, $I_2 = (0, 1)$, $I_3 = \left(\dfrac{\pi}{2}, 4\right]$, $I_4 = \left(-1, \dfrac{3}{2}\right]$. Representar en la recta real, en forma algebraica y conjuntista los siguientes intervalos

   1. $I_1 \bigcup I_2$ 2. $I_3 \bigcup I_2$ 3. $I_1 \bigcap I_4$ 4. $I_4 \bigcap I_2$ 5. $(I_4 \bigcup I_3) \bigcap I_2$ 6. $(I_1 \bigcup I_3) \bigcap (I_4 \bigcup I_2)$

11. Demostrar que si x es un número real, entonces $x^2 \geq 0$.

12. Demuestre que si a y b son números reales, entonces $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

13. Determine el primer entero N para el cual sea verdadera la proposición para cada $n \geq N$ y luego demuestre la proposicón para cada $n \geq N$.

   1. $3n + 25 < 3^n$ 2. $2^n > 2n + 1$ 3. $n^2 \leq 2^n$

14. Escriba el recíproco y el contrarrecíproco de las siguientes proposiciones

   (a) Si un número dado no posee un factor primo cuyo cuadrado sea menor o igual que ese número, entonces el número es primo.
   (b) Si $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.
   (c) Si $7x - 5 \leq 2$, entonces $x \leq 1$.
   (d) Si $x \in [0, 1]$, entonces $x^2 - x \leq 0$.
   (e) Si $-1 \leq x \leq 1$, entonces $|x| \geq x^2$.
   (f) Si $x \in (-3, 1)$, entonces $1 \leq x^2 + 1 < 10$.

15. Demuestre que si $m, b, x, y \in \mathbb{R}$, tales que $m > 0$ y $x < y$, entonces $mx + b < my + b$.

16. Demuestre que si $m, b, x, y \in \mathbb{R}$, tales que $m < 0$ y $x < y$, entonces $mx + b > my + b$.

17. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $a^2 < b^2$.

18. Demuestre que si $a < 0$, $b < 0$ y $a < b$, entonces $a^2 > b^2$.

19. Demuestre que si $a < b$, entonces $a^3 < b^3$.

20. Demuestre que si $a < b$ entonces $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.

21. Demuestre que si $a > 0$, $b > 0$ y $a < b$, entonces $\dfrac{1}{a^2} > \dfrac{1}{b^2}$.

22. Demuestre que si $a<0$, $b<0$ y $a<b$, entonces $\dfrac{1}{a^2}<\dfrac{1}{b^2}$.

23. Demuestre que si $a>0$, $b>0$ y $a<b$, entonces $a^4<b^4$.

24. Demuestre que si $a<0$, $b<0$ y $a<b$, entonces $a^4>b^4$.

25. Demuestre que si $a<b$, entonces $a^5<b^5$.

26. El número $\dfrac{1}{2}(a+b)$ se llama el **promedio** o **media aritmética** de a y de b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números, es decir, demuestre que

$$a<b \qquad \text{implica que} \qquad a<\frac{a+b}{2}<b.$$

27. Marque con una X la opción correcta según lo demostrado en los ejercicios del 15 al 24

Comportamiento de la desigualdad

Aplicación	Mantiene la desigualdad	Cambia la desigualdad
$m(\ \ )+b,\ m>0$		
$m(\ \ )+b,\ m<0$		
$(\ \ )^2$ para números positivos		
$(\ \ )^2$ para números negativos		
$(\ \ )^3$		
$(\ \ )^4$ para números positivos		
$(\ \ )^4$ para números negativos		
$\dfrac{1}{(\ \ )}$		
$\dfrac{1}{(\ \ )^2}$ para números positivos		
$\dfrac{1}{(\ \ )^2}$ para números negativos		

28. Demuestre que si $x\in\mathbb{R}$ entonces $x^4\in[0,\infty)$.

29. Demuestre que si $-2\leq x<5$, entonces $1\leq 2x+5<15$.

30. Si $\dfrac{2}{3}<x\leq\dfrac{5}{2}$, demuestre que $\dfrac{5}{3}<2x+\dfrac{1}{3}\leq\dfrac{16}{3}$.

31. Demuestre que si $-\dfrac{2}{3}<x<4$, entonces $-10<2-3x<4$.

32. Si $-4\leq x<3$, demuestre que $-12\leq 3-5x<23$.

33. Si $-\dfrac{7}{2} < x \leq \dfrac{4}{3}$, demuestre que $-\dfrac{29}{4} < 2x - \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{29}{12}$.

34. Demuestre que si $\sqrt{3} < x < 2\sqrt{3}$, entonces $-3 < 3 - \sqrt{3}x < 0$.

35. Demuestre que si $x \in [1,4]$, entonces $1 \leq x^2 \leq 16$.

36. Demuestre que si $x \in \left(0, \sqrt{7}\right]$, entonces $0 < x^2 \leq 7$.

37. Demuestre que si $x \in \left[\sqrt{2}, \sqrt[4]{25}\right)$, entonces $2 \leq x^2 < 5$.

38. Demuestre que si $x \in (-5,-2]$, entonces $4 \leq x^2 < 25$.

39. Demuestre que si $x \in [-\pi,-1)$, entonces $1 < x^2 \leq \pi^2$.

40. Demuestre que si $x \in (-e,0)$, entonces $0 < x^2 < e^2$.

41. Demuestre que si $x \in [-5,3)$, entonces $0 \leq x^2 \leq 25$.

42. Demuestre que si $x \in (-3,4)$, entonces $0 \leq x^2 < 16$.

43. Demuestre que si $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$, entonces $0 \leq x^2 \leq 2$.

44. Demuestre que si $x \in [-5,4]$, entonces $0 \leq x^2 \leq 25$.

45. Demuestre que si $x \in \left[-\sqrt{5}, 2\right)$, entonces $0 \leq x^2 \leq 5$.

46. Si $-6 \leq x \leq 3$, demuestre que $-1 \leq x^2 - 1 \leq 35$.

47. Si $x \in (-3,1)$, demuestre que $1 \leq x^2 + 1 < 10$.

48. Si $-4 \leq x \leq 2$, demuestre que $-25 \leq 7 - 2x^2 \leq 7$.

49. Si $-1 < x < 3$, demuestre que $-\dfrac{53}{2} < \dfrac{1}{2} - 3x^2 \leq \dfrac{1}{2}$.

50. Si $1 \leq x \leq 5$, demuestre que $2 \leq x^2 + x \leq 30$.

51. Si $-4 < x \leq 6$, demuestre que $-\dfrac{9}{4} \leq x^2 - 3x \leq 18$.

52. Demuestre que si $x \in [-2,3]$, entonces $-15 \leq 5x - 2x^2 + 3 \leq \dfrac{49}{8}$.

53. Si $\dfrac{1}{2} \leq x < 5$, demuestre que $\dfrac{17}{7} \leq 3 - \dfrac{2}{x+3} < \dfrac{11}{4}$.

54. Si $-3 < x \leq 1$, demuestre que $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{2x+7}{x+5} \leq \dfrac{3}{2}$.

55. Si $0 \leq x \leq 2$, demuestre que $-4 \leq \dfrac{x+2}{x-3} \leq -\dfrac{2}{3}$.

56. Si $-2 < x \leq 0$, demuestre que $-\dfrac{1}{6} \leq \dfrac{x+1}{4-x} \leq \dfrac{1}{4}$.

57. Si $-2 < x < 0$, demuestre que $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1-2x}{3+x} < 5$.

58. Si $x \in (-1,2)$, demuestre que $\dfrac{2}{5} < 2 - \dfrac{x^3}{5} < \dfrac{11}{5}$.

59. Demuestre que si $x \in (-3,1]$, entonces $-\dfrac{69}{2} \leq \dfrac{4}{3} x^3 + \dfrac{3}{2} \leq \dfrac{17}{6}$.

60. Demuestre que si $x \in [-4,2]$, entonces $-13 \leq 3 - 2x^3 \leq 127$.

61. Demuestre que si $x \in \left(0, \sqrt{3}\right)$, entonces $-\dfrac{15}{2} < \dfrac{3}{2} - \sqrt{3}x^3 < \dfrac{3}{2}$.

62. Si $-\dfrac{1}{3} < x \leq \dfrac{7}{3}$, demuestre que $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{3}{2x - x^2 + 3} \leq \dfrac{27}{20}$.

63. Demuestre que si $x \in [-3, -1)$, entonces $-2 < \dfrac{4}{x - 2x^2 + 1} \leq -\dfrac{1}{5}$.

64. Si $1 \leq x \leq 5$, demuestre que $-1 \leq \dfrac{-2}{x^2 + x} \leq -\dfrac{1}{15}$.

65. Demuestre que si $x \in \left[-\dfrac{3}{4}, \dfrac{1}{5}\right)$, entonces $-\dfrac{5}{4} \leq \dfrac{1 - 4x - 6x^2}{3x^2 + 2x - 1} < \dfrac{1}{12}$.

66. Si $-2 \leq x < 2$, demuestre que $\dfrac{13}{5} \leq \dfrac{3x^2 - 25}{x^2 - 9} \leq \dfrac{25}{9}$.

67. Demuestre que si $x \in (-2, 1]$, entonces $-3 \leq 1 - \dfrac{4}{4 - 3x^3} < \dfrac{6}{7}$.

68. Si $-1 < x < 2$, entonces $\dfrac{74}{19} < 4 + \dfrac{2}{x^3 - 27} < \dfrac{55}{14}$.

69. Demuestre que si $x \in \left(-\sqrt[3]{2}, 1\right]$, entonces $-5 \leq \dfrac{2x^3 - 7}{2 - x^3} < -\dfrac{11}{4}$.

70. Demuestre que si $x \in \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$, entonces $-\dfrac{132}{31} \leq \dfrac{4x^3 - 13}{4 - x^3} \leq -\dfrac{13}{4}$.

71. Si $0 \leq x < \dfrac{3}{2}$, entonces $\dfrac{5}{2} \leq \dfrac{6x - 6x^2 + 2x^3 - 5}{(x^2 - x + 1)(x - 2)} < \dfrac{22}{7}$.

72. Si $-3 < x \leq -\dfrac{1}{2}$, entonces $\dfrac{1019}{339} < \dfrac{18x - 36x^2 + 24x^3 + 7}{6x - 12x^2 + 8x^3 + 3} \leq \dfrac{7}{2}$.

73. Si $-\dfrac{1}{4} \leq x < 1$, entonces $-\dfrac{169}{151} \leq \dfrac{x\left(6x + x^2 + 12\right)}{12x + 6x^2 + x^3 + 5} < \dfrac{19}{24}$.

74. Demuestre que $x \in (-1, 1)$, entonces $\dfrac{8}{5} < \dfrac{3x^3 + 5}{2x^3 + 3} < 2$.

75. Demuestre que si $x \in (1, 2]$, entonces $1 < x^4 \leq 16$.

76. Demuestre que si $x \in [0, \sqrt{\pi}]$, entonces $0 \leq x^4 \leq \pi^2$.

77. Si $\dfrac{1}{4} \leq x < 3$, entonces $\dfrac{1}{16} \leq x^4 < 81$.

78. Demuestre que si $x \in [-3, -1]$, entonces $0 \leq x^4 \leq 81$.

79. Si $-\dfrac{3}{2} \leq x < 0$, entonces $0 < x^4 \leq \dfrac{81}{16}$.

80. Si $-4 < x < -\dfrac{2}{3}$, entonces $\dfrac{16}{81} < x^4 < 256$.

81. Demuestre que si $x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{3}\right)$, entonces $0 \leq x^4 \leq 25$.

82. Demuestre que si $x \in (-1, 1)$, entonces $0 \leq x^4 < 1$.

83. Demuestre que si $x \in \left[-2, \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$, entonces $0 \leq x^4 \leq 16$.

84. Si $x \in \left(-\sqrt[4]{2}, \sqrt{7}\right]$, demuestre que $0 \leq x^4 \leq 49$.

85. Si $x \in \left(-\sqrt{2}, \sqrt{5}\right]$, demuestre que $2 \leq x^4 + 2 < 27$.

86. Si $-3 \leq x < 3$, entonces $-3 < x^4 - 3 \leq 78$.

87. Demuestre que si $-2 \leq x < e$, entonces $1 \leq x^4 + 1 < e^4 + 1$.

88. Si $x \in [-3, 2]$, demuestre que $0 \leq x^4 + 2x^2 \leq 99$.

89. Demuestre que si $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$, entonces $4 < 3x^2 - x^4 + 4 \leq \dfrac{25}{4}$.

90. Si $-3 < x < 2$, entonces $-145 < 12x^2 - 3x^4 - 10 \leq 2$.

91. Si $x \in \left(-\dfrac{1}{2}, 1\right)$, demuestre que $0 \leq \left(\dfrac{2-3x}{4x+3}\right)^4 < \dfrac{2401}{16}$.

92. Demuestre que si $x \in \left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$, entonces $-\dfrac{59}{25} \leq \dfrac{3x^4 - 9x^2 - 8}{(x^2+1)(2-x)(x+2)} \leq -2$.

93. Demuestre que si $-1 \leq x < 2$, entonces $-1 \leq \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 - 2x + 2} \leq \dfrac{7}{5}$.

94. Si $\dfrac{5}{2} \leq x \leq 4$, demuestre que $\dfrac{1}{12} \leq \dfrac{x-2}{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6} \leq \dfrac{1}{33}$.

95. Si $-\dfrac{3}{2} \leq x \leq 1$, demuestre que $\dfrac{1}{9} \leq \dfrac{x-4}{x^4 - 4x^3 + 8x - 32} \leq \dfrac{8}{37}$.

96. Si $-2 < x \leq 3$, demuestre que $\dfrac{613}{121} \leq \dfrac{15x^2 - 172x + 5x^3 - 608}{3x^2 - 34x + x^3 - 120} \leq \dfrac{61}{12}$.

97. Si $-2 \leq x \leq 3$, demuestre que

$$\frac{1}{91} \leq \frac{x^2 - x - 30}{157x + 31x^2 + 2x^3 + 260} \cdot \frac{19x + 6x^2 - 130}{4x - 6x^2 + x^3 - 24} \cdot \frac{x^2 + 4}{88x - 22x^2 + 3x^3 - 160} \leq \frac{1}{56}.$$

98. Demuestre que si $2 \leq x < 5$, entonces

$$\frac{1}{5} < \frac{x^2 + x}{2x^2 + 9x + 4} \cdot \frac{4x^2 + 4x + 1}{2x^2 - x - 3} \cdot \frac{2x^2 + 5x - 12}{2x^3 + x^2} \leq \frac{1}{2}.$$

99. Si $x \in [-3, 1)$, demuestre que

$$\frac{9}{8} \leq \frac{x^2 - 5x - 50}{x^3 - 16x} \cdot \frac{14x^2 - 40x + 3x^3}{x^2 - 6x - 40} \div \frac{30x + 29x^2 + 3x^3 - 200}{4x^2 - 18x + x^3 - 72} \leq \frac{9}{7}.$$

100. Si $x \in [-2, 3)$, demuestre que $-2 < x^3 - 3x < 18$.

101. Si $x \in [-4, 1]$, demuestre que $-82 \leq x^3 + 4x - 2 \leq 3$.

Respuestas: Ejercicios

1.a. $x \geq \frac{c(a+b)}{ab}$; 1.a. $x \leq \frac{c(1-b)}{a+b}$; 1.c. $\frac{a-c}{b} \leq x < \frac{2a-c}{b}$; 2.a. $x > \frac{c-b}{a}$; 2.b. $x \leq \frac{b(c-1)}{a}$; 3.1. $(0,1)$; 3.2. $[0,\pi)$; 3.3. $[-2,2]$; 3.4. $\left(-\frac{1}{2}, 6\right]$; 3.5. $[-4,3]$; 3.6. $\left[\sqrt{2}, e\right)$; 3.7. $[a,b]$; 3.8. $(b,a]$; 3.9. $[m,n)$; 3.10. $(2,7]$; 3.11. $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{7}{2}\right]$; 3.12. $\left(e^2, \pi^2\right)$; 3.13. $(2,-3)$; 3.14. $x = 1$; 3.15. $\varnothing$; 3.16. $(-\infty.0)$; 3.17. $(0,\infty)$; 3.18. $(-\infty, 0]$; 3.19. $[0,\infty)$; 3.20. $(-\infty.5)$; 3.21. $[-2,\infty)$;

3.22. $(-4,\infty)$; 3.23. $(-\infty,\pi]$; 3.24. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; 3.25. $\left[e^2,\infty\right)$; 3.26. $\mathbb{R}$; 4.1. $0<x<1$;
4.2. $-2\leq x\leq 5$; 4.3. $2<x\leq 4$; 4.4. $-1\leq x<3$; 4.5. $x\leq 2$; 4.6. $b\leq x<c$; 4.7. $x\geq \pi$;
4.8. $a<x<b$; 4.9. $x<-3$; 4.10. $-\frac{3}{2}<x\leq\sqrt{2}$; 4.11. $-\infty<x<\infty$; 4.12. $x\geq 0$; 4.13. $-\pi\leq x\leq\pi$;
4.14. $x>a$; 4.15. $x\leq 0$; 5.a. Falso; 5.b. Verdadero; 5.c. Falso; 5.d. Verdadero; 5.e. Falso;
5.f. Falso; 5.g. Verdadero; 5.h. Falso; 5.i. Verdadero; 5.j. Verdadero; 5.k. Verdadero; 5.l. Verdadero;
5.m. Falso; 5.n. Verdadero; 5.o. Verdadero; 5.p. Falso; 6.1. Falso; 6.2. Verdadero; 6.3. Falso;
6.4. Verdadero; 6.5. Falso; 6.6. Falso; 6.7. Verdadero; 6.8. Verdadero; 6.9. Falso; 6.10. Verdadero;
6.11. Falso; 6.12. Falso; 6.13. Verdadero; 6.14. Verdadero; 6.15. Verdadero; 6.16. Verdadero;
6.17. Falso; 6.18. Verdadero; 6.19. Falso; 6.20. Falso; 6.21. Falso; 6.22. Falso; 6.23. Falso;
6.24. Falso; 6.25. Falso; 6.26. Verdadero; 6.27. Falso; 6.28. Falso; 7.1. $(-\infty,0)\setminus\{-1\}=(-\infty,-1)\bigcup(-1,0)$;
7.2. $(0,\infty)\setminus\left\{\sqrt{2}\right\}=\left(0,\sqrt{2}\right)\bigcup\left(\sqrt{2},\infty\right)$; 7.3. $(-\infty,3]\setminus\{0\}=(-\infty,0)\bigcup(0,3]$; 7.4. $[\pi,\infty)\setminus\left\{\pi^2\right\}=\left[\pi,\pi^2\right)\bigcup\left(\pi^2,\infty\right)$;
7.5. $(-2,3)\setminus\{-1\}=(-2,-1)\bigcup(-1,3)$; 7.6. $[0,6)\setminus\left\{1,\frac{7}{2}\right\}=[0,1)\bigcup\left(1,\frac{7}{2}\right)\bigcup\left(\frac{7}{2},6\right)$; 7.7. $[-1,3]\setminus\{0\}=[-1,0)\bigcup(0,3]$;
7.8. $[-6,5]\setminus\{-3,-2\}=[-6,-3)\bigcup(-3,-2)\bigcup(-2,5]$; 7.9. $\left[-5,\frac{1}{2}\right)\setminus\{-1\}=[-5,-1)\bigcup\left(-1,\frac{1}{2}\right)$;
7.10. $\left(\sqrt{2},5\right)\setminus\{2\}=\left(\sqrt{2},2\right)\bigcup(2,5)$; 8.1. $[-5,5)$; 8.2. $(-2,7]$; 8.3. $(-4,0]$; 8.4. $(-2,5)$; 8.5. $[1,5)$;
8.6. $(-2,5)$; 9.1. $(-2,5)$; 9.2. $(-1,6]$; 9.3. $[1,5)$; 9.4. $(-1,1]$; 9.5. $[0,1]$; 9.6. $[0,6)$;
10.1. $\left(0,\frac{3}{2}\right]$; 10.2. $(0,1)\bigcup\left(\frac{\pi}{2},4\right]$; 10.3. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$; 10.4. $(0,1)$; 10.5. $(0,1)$; 10.6. $\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Resolución de desigualdades.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.03

- Resolución de desigualdades.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 3.1 *: Hallar el conjunto solución de* $5-\dfrac{x-1}{3}\geq 2.$

Solución : En virtud que la expresión es de grado uno, despejamos la incógnita x.

$$5-\frac{x-1}{3}\geq 2 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } -5\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad -\frac{x-1}{2}\geq 2-5 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{x-1}{2}\geq -3 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Multiplicamos por } -2\\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \quad x-1\leq 6 \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 1\\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad x\leq 7$$

Luego, la solución de la desigualdad es $x\in(-\infty,7]$. ★

Ejemplo 3.2 *: Hallar el conjunto solución de*

$$\frac{7}{2}\,x-3\geq\frac{4}{3}-2x.$$

Solución : En virtud que, la expresión es de grado uno, despejamos la incógnita x. Tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{7}{2}\,x-3\geq\frac{4}{3}-2x \quad &\Longrightarrow \quad \frac{7}{2}\,x+2x\geq\frac{4}{3}+3 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{7}{2}+2\right)x\geq\frac{4+9}{3}\\ &\Longrightarrow \quad \frac{7+4}{2}\,x\geq\frac{13}{3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{11}{2}\,x\geq\frac{13}{3} \quad \Longrightarrow \quad x\geq\frac{26}{33},\end{aligned}$$

así, la solución de la desigualdad viene dada por $x\in\left[\dfrac{26}{33},\infty\right)$. ★

Ejemplo 3.3 *: Hallar el conjunto solución de* $x^2-16\leq 0.$

Solución : Puesto que, la expresión es de grado dos, factorizamos dicha expresión cuadrática, observemos que

$$x^2-16=(x)^2-(4)^2\,,$$

por lo que es un producto notable suma por su diferencia, es decir,

$$a^2-b^2=(a+b)\,(a-b)\,,$$

así,

$$x^2-16=(x)^2-(4)^2=(x-4)\,(x+4)\,,$$

así,

$$x^2-16\leq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad (x-4)\,(x+4)\leq 0.$$

Buscamos las raíces de los factores

- $x-4=0 \quad \Longrightarrow \quad x=4.$
- $x+4=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-4.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-4)$	$(-4,4)$	$(4,\infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in [-4,4]$. ★

Ejemplo 3.4 *: Hallar el conjunto solución de* $7x - 2x^2 - 3 < 0.$

Solución : Factorizamos la expresión cuadrática, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a=-2$, $b=7$ y $c=-3$,

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(-2)(-3)}}{2(-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-24}}{-4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-7+5}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-7-5}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = 3 \end{cases}$$

así, el polinomio $p(x) = 7x - 2x^2 - 3$ tiene como raíces a $x = \frac{1}{2}$, y $x = 3$.

Luego, la factorización del polinomio $p(x) = 7x - 2x^2 - 3$ es

$$7x - 2x^2 - 3 = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3).$$

Resolver la desigualdad

$$7x - 2x^2 - 3 < 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad -2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-3) < 0.$$

Las raíces de los factores son $x = \frac{1}{2}$, y $x = 3$.

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},3\right)$	$(3,\infty)$
$-2\left(x-\frac{1}{2}\right)$	$+$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \bigcup (3,\infty)$. ★

Ejemplo 3.5 *: Hallar el conjunto solución de* $2x^2 + 3 \leq 0.$

Solución : Factorizamos la expresión cuadrática, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a=2$, $b=0$ y $c=3$,

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)} = \frac{\pm\sqrt{-24}}{4} \longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

así, el polinomio $p(x) = 2x^2 + 3$ no tiene raíces reales, es **irreducible**.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, \infty)$
$2x+3$	$+$
	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \mathbb{R}$. ★

Ejemplo 3.6 *: Hallar el conjunto solución de* $9x^2 - 24x - x^3 + 20 \geq 0$.

Solución : Factorizamos la expresión cúbica, para ello, aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0 = 20$, son ± 1, ± 2, ± 4, ± 5, ± 10 y ± 20.

- Para $x = 2$

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 9 & -24 & 20 \\ 2 & & -2 & 14 & -20 \\ \hline & -1 & 7 & -10 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = 2$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20 = (x-2)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 9 & -24 & 20 \\ 2 & & -2 & 14 & -20 \\ \hline & -1 & 7 & -10 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = -x^2 + 7x - 10$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = 7$ y $c = -10$,

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(-1)(-10)}}{2(-1)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 40}}{-2} = \frac{-7 \pm \sqrt{9}}{-2} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-7+3}{-2} = \dfrac{-4}{-2} = 2 \\[2ex] x = \dfrac{-7-3}{-2} = \dfrac{-10}{-2} = 5 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene como raíces a $x = 2$ y $x = 5$.

Luego, la factorización del polinomio $p(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$ es

$$-x^3 + 9x^2 - 24x + 20 = -(x-2)(x-2)(x-5) = -(x-2)^2(x-5).$$

Así,

$$-x^3 + 9x^2 - 24x + 20 \geq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad -(x-2)^2(x-5) \geq 0.$$

Observemos que deseamos hallar los valores x para los cuales el producto de los términos $(x-2)^2$ y $-(x-5)$ sea mayor ó igual a cero, es conocido que el producto de dos términos es mayor o igual a cero cuando ambos tienen el mismo signo o cuando sean cero, es decir

$$ab \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} a \leq 0 & \text{y} & b \leq 0 \\ & \text{ó} & \\ a \geq 0 & \text{y} & b \geq 0 \end{cases}$$

Para la desigualdad $-(x-2)^2(x-5) \geq 0$, el caso que ambos términos sean negativos no puede ocurrir, ya que, el término $(x-2)^2$ es mayor ó igual a cero, por lo tanto, el caso que ocurre es que ambos sean positivos ó iguales a cero, así,

$$-(x-2)^2(x-5) \geq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad -(x-5) \geq 0 \qquad \text{ó} \qquad x-2=0,$$

de aquí,

$$-(x-5) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad -x+5 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 5 \geq x,$$

mientras que,

$$x-2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=2.$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad viene dada por

$$x \in (-\infty, 5] \bigcup \{2\} \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-\infty, 5].$$

★

Ejemplo 3.7 *: Hallar el conjunto solución de* $x^3 - 2x - 1 > 0$.

Solución : Factorizamos la expresión cúbica, para ello, aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0 = -1$, son ± 1.

- Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = -1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x) = x^3 - 2x - 1 = (x+1)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = x^2 - x - 1$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$,

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \\ x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene como raíces a $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Luego, la factorización del polinomio $p(x) = x^3 - 2x - 1$ es

$$x^3 - 2x - 1 = (x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Así,

$$x^3 - 2x - 1 > 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad (x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) > 0.$$

Las raíces de los factores son $x = -1$, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, -1)$	$\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left(-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \bigcup \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \infty\right)$. ★

Ejemplo 3.8 *: Hallar el conjunto solución de* $x^4 - 16 \leq 0$.

Solución : Consideremos el polinomio $p(x) = x^4 - 16$. Factorizamos dicho polinomio, lo cual se puede hacer aplicando el método de Ruffini para obtener las raíces y por ende, su factorización, ó también, observando que

$$x^4 - 16 = \underbrace{\left(x^2\right)^2 - (4)^2}_{\boxed{\begin{array}{c}\text{Producto suma por diferencia} \\ a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\end{array}}} = \left(x^2 + 4\right)\left(x^2 - 4\right),$$

como debemos factorizar el polinomio en productos de factores reales irreducibles, veamos si las expresiones $\left(x^2 + 4\right)$ y $\left(x^2 - 4\right)$, son irreducibles.

- Para x^2+4 : Por ser un polinomio de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende su factorización. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=4$,

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(4)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-16}}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

  esto implica que, la expresión x^2+4 es un polinomio **irreducible**, luego no se puede factorizar más de lo que ya está.

- Para x^2-4 : Observemos que esta expresión es un producto notable de la forma suma por su diferencia, es decir, es de la forma
$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$
  ya que,
$$x^2-4=(x)^2-(2)^2=(x+2)(x-2),$$
  luego, x^2-4 se factoriza como
$$x^2-4=(x+2)(x-2).$$

Finalmente, el polinomio $p(x)=\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)$, se factoriza como

$$p(x)=x^4-16=(x+2)(x-2)\left(x^2+4\right).$$

Por lo tanto,
$$x^4-16\leq 0 \qquad \text{se expresa como} \qquad (x+2)(x-2)\left(x^2+4\right)\leq 0.$$

Las raíces de los factores son $x=-2$ y $x=2$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-2)$	$(-2,2)$	$(2,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
x^2+4	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x\in[-2,2]$. ★

Ejemplo 3.9 *: Hallar el conjunto solución de* $2x^4+x^3-32x^2+59x-30>0.$

Solución : En virtud que, el grado de la expresión es 4 aplicamos el método de Ruffini para obtener las raíces de la expresión y por ende, su factorización

Para efecto de la resolución del ejemplo, consideramos el polinomio

$$p(x)=2x^4+x^3-32x^2+59x-30.$$

Los divisores del término independiente, $a_0=30$, son ±1, ±2, ±3, ±5, ±6, ±10, ±15 y ±30

- Para $x=-1$

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\ -1 & & -2 & 1 & 31 & -90 \\ \hline & 2 & -1 & -31 & 90 & -120 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x=-1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\ 1 & & 2 & 3 & -29 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & -29 & 30 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \ \checkmark$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **si** es raíz del polinomio p.

Así, el polinomio se puede escribir como

$$p(x) = 2x^4 + x^3 - 32x^2 + 59x - 30 = (x-1)\underbrace{\left(ax^3 + bx^2 + cx + d\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 3^{\text{er}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de tercer grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{c|rrrrr} & 2 & 1 & -32 & 59 & -30 \\ 1 & & 2 & 3 & -29 & 30 \\ \hline & \underset{\boxed{a}}{\underset{\uparrow}{2}} & \underset{\boxed{b}}{\underset{\uparrow}{3}} & \underset{\boxed{c}}{\underset{\uparrow}{-29}} & \underset{\boxed{d}}{\underset{\uparrow}{30}} & 0 \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30$, por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini. Volvemos a buscar las raíces en los divisores, excepto con $x = -1$.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & 3 & -29 & 30 \\ 1 & & 2 & 5 & -24 \\ \hline & 2 & 5 & -24 & 6 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \ \chi$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **no** vuelve a ser raíz del polinomio.

- Para $x = -2$

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & 3 & -29 & 30 \\ -2 & & -4 & 2 & 54 \\ \hline & 2 & -1 & -27 & 84 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \ \chi$$

  Por lo tanto, $x = -2$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 2$

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & 3 & -29 & 30 \\ 2 & & 4 & 14 & -30 \\ \hline & 2 & 7 & -15 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \ \checkmark$$

  Por lo tanto, $x = 2$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio q se puede escribir como

$$q(x) = 2x^3 + 3x^2 - 29x + 30 = (x-2)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 3 & -29 & 30 \\ 2 & & 4 & 14 & -30 \\ \hline & 2 & 7 & -15 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Factorizamos el polinomio $r(x) = 2x^2 + 7x - 15$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 7$ y $c = -15$,

$$x = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(2)(-15)}}{2(2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+120}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{169}}{4} = \frac{-7 \pm 13}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-7+13}{4} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-7-13}{4} = -5 \end{cases}$$

así, el polinomio r tiene dos raíces reales, $x = \dfrac{3}{2}$ y $x = -5$, luego, la factorización de r es

$$r(x) = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5).$$

Por lo tanto, el polinomio q, se factoriza como

$$q(x) = (x-2)\,r(x) = 2(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5).$$

Finalmente, la factorización del polinomio p viene dada por

$$p(x) = (x-1)\,q(x) = 2(x-1)(x-2)\left(x - \frac{3}{2}\right)(x+5),$$

que es equivalente a

$$p(x) = (x-1)(x-2)(2x-3)(x+5).$$

Así,

$$2x^4 + x^3 - 32x^2 + 59x - 30 > 0 \qquad \text{se expresa como} \qquad (x-1)(x-2)(2x-3)(x+5) > 0.$$

Las raíces de los factores son $x = 1$, $x = 2$, $x = \dfrac{3}{2}$ y $x = -5$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 1)$	$\left(1, \frac{3}{2}\right)$	$\left(\frac{3}{2}, 2\right)$	$(2, \infty)$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in (-\infty, -5) \bigcup \left(1, \dfrac{3}{2}, \right) \bigcup (2, \infty)$. ★

Ejemplo 3.10 : *Hallar el conjunto solución de* $2t^4 + 4t^2 - 6 < 0$.

Solución : Consideremos el polinomio $p(t) = 2t^4 + 4t^2 - 6$. Observemos que el trinomio dado es de cuarto grado con la particularidad que los términos dados son de potencias pares, así, podemos proponer el cambio de variable

$$t^2 = z \qquad \Longrightarrow \qquad t^4 = z^2,$$

con lo que, el polinomio dado de cuarto grado en variable t se transforma en un polinomio de segundo grado en la nueva variable z, es decir,

$$p(z) = 2z^2 + 4z - 6,$$

puesto que, el polinomio es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$,

$$z = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{4} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} z = \dfrac{-4+8}{4} = \dfrac{4}{4} = 1 \\ \\ z = \dfrac{-4-8}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

así, el polinomio p en variable z tiene dos raíces reales, $z = 1$ y $z = -3$, luego, la factorización de p en variable z es

$$p(z) = 2(z-1)(z+3),$$

pero, $z = t^2$, luego, el polinomio p en variable t queda escrito como

$$p(t) = 2\left(t^2 - 1\right)\left(t^2 + 3\right),$$

como debemos factorizar el polinomio en productos de factores reales irreducibles, veamos si las expresiones $\left(t^2 - 1\right)$ y $\left(t^2 + 3\right)$, son irreducibles.

- Para $t^2 - 1$: Observemos que esta expresión es un producto notable de la forma suma por su diferencia, es decir, es de la forma

  $$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b),$$

  ya que,

  $$t^2 - 1 = (t)^2 - (1)^2 = (t+1)(t-1),$$

  luego, $t^2 - 1$ se factoriza como

  $$t^2 - 1 = (t+1)(t-1).$$

- Para $t^2 + 3$: Por ser un polinomio de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = 3$,

  $$t = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{-12}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

  esto implica que, la expresión $t^2 + 3$ es un polinomio **irreducible**, luego no se puede factorizar más de lo que ya está.

Finalmente, el polinomio $p(t) = 2\left(t^2 - 1\right)\left(t^2 + 3\right)$, se factoriza como

$$p(t) = 2t^4 + 4t^2 - 6 = 2(t+1)(t-1)\left(t^2 + 3\right).$$

Por lo tanto,

$$2t^4 + 4t^2 - 6 < 0 \qquad \text{se expresa como} \qquad 2(t+1)(t-1)\left(t^2 + 3\right) < 0.$$

Las raíces de los factores son $t = -1$ y $t = 1$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$2(t+1)$	$-$	$+$	$+$
$t-1$	$-$	$-$	$+$
t^2+3	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $t \in (-1,1)$. ★

Ejemplo 3.11 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{2x-5}{3-4x} \geq 0$.

Solución : Observemos que el numerador y el denominador son factores irreducibles, así que buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $2x-5=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\dfrac{5}{2}$.
- Denominador : $3-4x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\dfrac{3}{4}$.

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2},\infty\right)$
$2x-5$	$-$	$-$	$+$
$3-4x$	$+$	$-$	$-$
	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left(\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{2}\right]$. ★

Ejemplo 3.12 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{2-3x}{x^2-7x+6} \leq 0$.

Solución : Observemos que el numerador es un factor irreducibles, mientras que el denominador es una expresión cuadrática, por lo tanto, aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=-7$ y $c=6$,

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(6)}}{2(1)}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{7+5}{2}=\dfrac{12}{2}=6 \\[2ex] x=\dfrac{7-5}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \end{cases}$$

así, el polinomio $p(x)=x^2-7x+6$ tiene como raíces a $x=1$, y $x=6$.

Luego, la factorización del polinomio $p(x)=x^2-7x+6$ es

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6).$$

Resolver la desigualdad

$$\frac{2-3x}{x^2-7x+6}\leq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{2-3x}{(x-1)(x-6)}\leq 0,$$

así que buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $2 - 3x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{2}{3}.$

- Denominador : $(x-1)(x-6) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \quad \text{y} \quad x = 6.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, 1\right)$	$(1,6)$	$(6,\infty)$
$2-3x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad es $\quad x \in \left[\dfrac{2}{3}, 1\right) \bigcup (6, \infty).$ ★

Ejemplo 3.13 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{2x-5}{3-4x} < -2.$

Solución : Observemos que ningún lado de la desigualdad es igual a cero, como en los ejemplos anteriores, así que en primer lugar, hacemos un lado cero, es decir, comparamos con cero

$$\frac{2x-5}{3-4x} < -2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2x-5}{3-4x} + 2 < 0,$$

efectuando la operación del lado derecho de la última desigualdad

$$\frac{2x-5}{3-4x} + 2 < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x-5+2(3-4x)}{3-4x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x-5+6-8x}{3-4x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-6x}{3-4x} < 0.$$

Puesto que, el numerador y el denominador son factores irreducibles, así que buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $1 - 6x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{1}{6}.$

- Denominador : $3 - 4x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{3}{4}.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, \frac{1}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}, \frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{3}{4}, \infty\right)$
$1-6x$	$+$	$-$	$-$
$3-4x$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $\quad x \in \left(\dfrac{1}{6}, \dfrac{3}{4}\right).$ ★

Ejemplo 3.14 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{x^2+4x-5}{2x^2+1} > 1.$

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{x^2+4x-5}{2x^2+1} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+4x-5}{2x^2+1} - 1 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2+4x-5-\left(2x^2+1\right)}{2x^2+1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{4x-6-x^2}{2x^2+1} > 0.$$

Factorizamos el numerador y el denominador, para ello, buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $4x - 6 - x^2 = 0$. Aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = 4$ y $c = -6$

$$x = \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 24}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-8}}{-2} \longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

- Denominador : $2x^2 + 1 = 0$. Aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 0$ y $c = 1$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{\pm \sqrt{-8}}{4} \longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, \infty)$
$4x - 6 - x^2$	$-$
$2x^2 + 1$	$+$
	$-$

Luego, la desigualdad no tiene solución, es decir, solución vacía. ★

Ejemplo 3.15 : *Hallar el conjunto solución de* $2 \leq \dfrac{1 + x - 2x^2}{1 - x}$.

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$2 \leq \frac{1 + x - 2x^2}{1 - x} \implies 0 \leq \frac{1 + x - 2x^2}{1 - x} - 2 \implies 0 \leq \frac{1 + x - 2x^2 - 2(1 - x)}{1 - x}$$

$$\implies 0 \leq \frac{1 + x - 2x^2 - 2 + 2x}{1 - x} \implies 0 \leq \frac{3x - 2x^2 - 1}{1 - x}$$

Factorizamos el numerador y el denominador, para ello, buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : Buscamos las raíces del polinomio $p(x) = 3x - 2x^2 - 1$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = -2$, $b = 3$ y $c = -1$,

$$x = \frac{-(3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(-2)(-1)}}{2(-2)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 8}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-4} \implies \begin{cases} x = \dfrac{-3 + 1}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-3 - 1}{-4} = \dfrac{-4}{-4} = 1 \end{cases}$$

así, el polinomio p tiene como raíces a $x = 1$, y $x = \dfrac{1}{2}$. Luego, la factorización del numerador es

$$3x - 2x^2 - 1 = -2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

- Denominador : Observemos que el polinomio $q(x) = 1 - x$ ya está factorizado por ser un polinomio de grado 1 y su raíz es $x = 1$.

Por lo tanto, resolver

$$0 \leq \frac{3x-2x^2-1}{1-x} \qquad \text{es equivalente a} \qquad 0 \leq \frac{-2\,(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{1-x},$$

observemos que esta última desigualdad se puede escribir como

$$0 \leq \frac{-2\,(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{1-x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{-2\,(x-1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{-\,(x-1)} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq 2\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

siempre y cuando $x \neq 1$.

Así, si $x \neq 1$, entonces

$$0 \leq 2\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq x-\frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq x.$$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left[\dfrac{1}{2},\infty\right) - \{1\}$. ★

Ejemplo 3.16 : *Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{4}{3-x}$.

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{1}{x} \geq \frac{4}{3-x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{x}-\frac{4}{3-x} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3-x-4x}{x\,(3-x)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{3-5x}{x\,(3-x)} \geq 0.$$

Observemos que tanto el numerador como el denominador ya están factorizados, buscamos sus raíces

- Numerador : $3-5x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\dfrac{3}{5}$
- Denominador : $x\,(3-x)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=3$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{3}{5}\right)$	$\left(\frac{3}{5},3\right)$	$(3,\infty)$
$3-5x$	$+$	$+$	$-$	$-$
x	$-$	$+$	$+$	$+$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución es $x \in \left(0,\dfrac{3}{5}\right] \bigcup (3,\infty)$. ★

Ejemplo 3.17 : *Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{x+2}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+3}$.

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{x+2}{x-5} \leq \frac{x}{x+3} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x+2}{x-5}-\frac{x}{x+3} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x+2)\,(x+3)-x\,(x-5)}{(x-5)\,(x+3)} \leq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2+5x+6-x^2+5x}{(x-5)\,(x+3)} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{10x+6}{(x-5)\,(x+3)} \leq 0.$$

Observemos que tanto el numerador como el denominador ya están factorizados, buscamos sus raíces

- Numerador : $10x+6=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-\dfrac{3}{5}.$

- Denominador : $(x-5)(x+3)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=5 \quad \text{y} \quad x=-3.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-3)$	$\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$	$\left(-\frac{3}{5},5\right)$	$(5,\infty)$
$10x+6$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución es $\quad x \in (-\infty,-3) \bigcup \left[-\dfrac{3}{5},5\right).$ ★

Ejemplo 3.18 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{6}{x}+5<\dfrac{56}{x+5}.$

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{6}{x}+5<\frac{56}{x+5} \quad \Longrightarrow \quad \frac{6}{x}+5-\frac{56}{x+5}<0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{6(x+5)+5x(x+5)-56x}{x(x+5)}<0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{6x+30+5x^2+25x-56x}{x(x+5)}<0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{5x^2-25x+30}{x(x+5)}<0.$$

Factorizamos el numerador y el denominador, para ello, buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : Buscamos las raíces del polinomio $p(x)=5x^2-25x+30$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a=5$, $b=-25$ y $c=30$,

$$x=\frac{-(-25)\pm\sqrt{(-25)^2-4(5)(30)}}{2(5)}=\frac{25\pm\sqrt{625-600}}{10}=\frac{25\pm\sqrt{25}}{10} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{25+5}{10}=\dfrac{30}{10}=3 \\ \\ x=\dfrac{25-5}{10}=\dfrac{20}{10}=2 \end{cases}$$

  así, el polinomio p tiene como raíces a $x=2$, y $x=3$. Luego, la factorización del numerador es

$$5x^2-25x+30=5(x-2)(x-3).$$

- Denominador : Observemos que el polinomio $q(x)=x(x+5)$ ya está factorizado.

Por lo tanto, resolver

$$\frac{5x^2-25x+30}{x(x+5)}<0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{5(x-2)(x-3)}{x(x+5)}<0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $5(x-2)(x-3)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=2 \quad \text{y} \quad x=3.$
- Denominador : $x(x+5)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=-5.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-5)$	$(-5,0)$	$(0,2)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$5(x-2)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in (-5,0) \bigcup (2,3)$. ★

Ejemplo 3.19 *: Hallar el conjunto solución de* $\dfrac{2}{x-1} - 6x \leq \dfrac{119}{x-4} + 27.$

Solución : Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{2}{x-1} - 6x \leq \frac{119}{x-4} + 27 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{119}{x-4} + 27 - \frac{2}{x-1} + 6x$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{119(x-1) + 27(x-4)(x-1) - 2(x-4) + 6x(x-4)(x-1)}{(x-4)(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{119x - 119 + 27\left(x^2-5x+4\right) - 2x + 8 + 6x\left(x^2-5x+4\right)}{(x-4)(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{119x - 119 + 27x^2 - 135x + 108 - 2x + 8 + 6x^3 - 30x^2 + 24x}{(x-4)(x-1)}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{6x^3 - 3x^2 + 6x - 3}{(x-4)(x-1)}$$

Factorizamos el numerador y el denominador, para ello, buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador.

- Numerador : Buscamos las raíces del polinomio $p(x) = 6x^3 - 3x^2 + 6x - 3$, por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini.

  Los divisores del término independiente, $a_0 = -3$, son ± 1 y ± 3

  ⧫ Para $x = -1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ -1 & & -6 & 9 & -15 \\ \hline & 6 & -9 & 15 & -18 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = -1$ **no** vuelve a ser raíz del polinomio.

  ⧫ Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ 1 & & 6 & 3 & 9 \\ \hline & 6 & 3 & 9 & 6 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

  Por lo tanto, $x = 1$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = -3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ -3 & & -18 & 63 & -207 \\ \hline & 6 & -21 & 69 & -210 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = -3$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ 3 & & 18 & -48 & -126 \\ \hline & 6 & -16 & -42 & -129 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = 3$ **no** es raíz del polinomio.

Es conocido que todo polinomio de grado 3 tiene al menos una raíz real, por lo tanto, buscamos la(s) posible(s) raíz (raíces)

- Para $x = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ -\frac{1}{2} & & -3 & -3 & -\frac{3}{2} \\ \hline & 6 & -6 & 3 & -\frac{9}{2} \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Diferente de cero}} \quad \chi$$

Por lo tanto, $x = -\dfrac{1}{2}$ **no** es raíz del polinomio.

- Para $x = \dfrac{1}{2}$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ \frac{1}{2} & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 6 & 0 & 6 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = \dfrac{1}{2}$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x) = 6x^3 - 3x^2 + 6x - 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right) \underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 6 & -3 & 6 & -3 \\ \frac{1}{2} & & 3 & 0 & 3 \\ \hline & 6 & 0 & 6 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = 6x^2 + 6$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 6$, $b = 0$ y $c = 6$,

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(6)(6)}}{2(6)}=\frac{\pm\sqrt{-144}}{12}\longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

así, el polinomio $p(x)=6x^2+6$ no tiene raíces reales, es **irreducible**. Luego, la factorización del numerador es

$$6x^3-3x^2+6x-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(6x^2+6\right)=(2x-1)\left(3x^2+3\right).$$

- Denominador : Observemos que el polinomio $q(x)=(x-4)(x-1)$ ya está factorizado.

Por lo tanto, resolver

$$0\leq\frac{6x^3-3x^2+6x-3}{(x-4)(x-1)}\qquad\text{es equivalente a}\qquad 0\leq\frac{(2x-1)\left(3x^2+3\right)}{(x-4)(x-1)},$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $(2x-1)\left(3x^2+3\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\frac{1}{2}.$

- Denominador : $(x-4)(x-1)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=4 \quad\text{y}\quad x=1.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,4)$	$(4,\infty)$
$2x-1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3x^2+3$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es $x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\bigcup(4,\infty)$. ★

Ejemplo 3.20 *: Hallar el conjunto solución de* $-3\leq 4-7x<4$.

Solución : Para obtener la solución de esta cadena de desigualdades comenzamos restando 4 a cada término de la cadena de desigualdades

$$-3\leq 4-7x<4 \qquad\Longrightarrow\qquad -3-4\leq 4-7x-4<4-4 \qquad\Longrightarrow\qquad -7\leq -7x<0,$$

dividimos entre -7, puesto que es un número negativo, la desigualdad cambia

$$-7\leq -7x<0 \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{-7}{-7}\geq\frac{-7x}{-7}>\frac{0}{-7} \qquad\Longrightarrow\qquad 1\geq x>0.$$

Luego, la solución viene dada por $x\in(0,1]$. ★

Ejemplo 3.21 *: Hallar el conjunto solución de* $2x-1\leq\frac{x}{2}-2<5x+3$.

Solución : Se busca(n) valor(es) de x que satisfaga(n) la cadena de desigualdades dada, es decir, valor(es) de x que satisfagan, simultáneamente, las desigualdades

$$2x-1\leq\frac{x}{2}-2\quad\text{(Desigualdad I)}\qquad\text{y}\qquad\frac{x}{2}-2<5x+3\quad\text{(Desigualdad II)},$$

así, se resuelven dos desigualdades.

- **Desigualdad I :** En virtud que, las expresiones son de grado uno, despejamos x.

$$2x - 1 \leq \frac{x}{2} - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2x - \frac{x}{2} \leq -2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{3x}{2} \leq -1 \qquad \Longrightarrow \qquad x \leq -\frac{2}{3}.$$

Por lo tanto, la solución de esta desigualdad es $\text{sol}_1 : x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right]$.

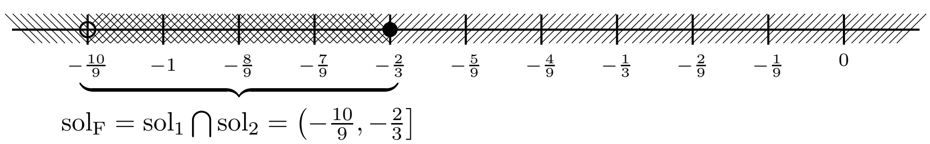
- **Desigualdad II :** En virtud que, las expresiones son de grado uno, despejamos x.

$$\frac{x}{2} - 2 < 5x + 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{x}{2} - 5x < 3 + 2 \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{9x}{2} < 5 \qquad \Longrightarrow \qquad x > -\frac{10}{9}.$$

Por lo tanto, la solución de esta desigualdad es $\text{sol}_2 : x \in \left(-\frac{10}{9}, \infty\right)$.

Así, la solución de la cadena de desigualdades $2x - 1 \leq \frac{x}{2} - 2 < 5x + 3$, la cual denotamos por sol_{F}, viene dada por la intersección de las soluciones de cada desigualdad

$$\text{sol}_{\text{F}} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \bigcap \left(-\frac{10}{9}, \infty\right) = \left(-\frac{10}{9}, -\frac{2}{3}\right].$$



★

Ejemplo 3.22 *: Hallar el conjunto solución de*

$$-\frac{2}{x} \leq \frac{2 + 7x}{5 - 2x} < 2 + x.$$

Solución : Se busca(n) valor(es) de x que satisfaga(n) la cadena de desigualdades dada, es decir, valor(es) de x que satisfagan, simultáneamente, las desigualdades

$$-\frac{2}{x} \leq \frac{2 + 7x}{5 - 2x}, \quad \text{(Desigualdad I)} \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \frac{2 + 7x}{5 - 2x} < 2 + x, \quad \text{(Desigualdad II)},$$

así, se resuelven dos desigualdades.

1. **Desigualdad I :** Se tiene

$$-\frac{2}{x} \leq \frac{2 + 7x}{5 - 2x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{2 + 7x}{5 - 2x} + \frac{2}{x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{(2 + 7x)\,x + 2\,(5 - 2x)}{x\,(5 - 2x)} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{7x^2 - 2x + 10}{x\,(5 - 2x)}$$

Factorizamos el numerador, ya que, el denominador se encuentra factorizado. Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $7x^2 - 2x + 10$. Aplicamos la resolvente para $a = 7$, $b = -2$ y $c = 10$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\,(7)\,(10)}}{2\,(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 280}}{14} = \frac{2 \pm \sqrt{-276}}{14} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

- Denominador : $x(5-2x)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=\dfrac{5}{2}$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\dfrac{5}{2}\right)$	$\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$
$7x^2-2x+10$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
$5-2x$	$+$	$+$	$-$
	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad I, es

$$\mathrm{sol}_1 : x \in \left(0,\frac{5}{2}\right).$$

2. **Desigualdad II :** Se tiene

$$\frac{2+7x}{5-2x}<2+x \quad \Longrightarrow \quad \frac{2+7x}{5-2x}-(2+x)<0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2+7x-(2+x)(5-2x)}{5-2x}<0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2+7x-\left(10+x-2x^2\right)}{5-2x}<0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{2x^2+6x-8}{5-2x}<0.$$

Factorizamos el numerador usando la resolvente para $a=2$, $b=6$ y $c=-8$

$$x=\frac{-(6)\pm\sqrt{(6)^2-4(2)(-8)}}{2(2)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{4}=\frac{-6\pm\sqrt{100}}{4}$$

$$=\frac{-6\pm 10}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{-6+10}{4}=\dfrac{4}{4}=1 \\ \\ x=\dfrac{-6-10}{4}=\dfrac{-16}{4}=-4 \end{cases}$$

así, la factorización es $2x^2+6x-8=2(x-1)(x+4)$. Resolver la desigualdad

$$\frac{2x^2+6x-8}{5-2x}<0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{2(x-1)(x+4)}{5-2x}<0$$

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $2(x-1)(x+4) \quad \Longrightarrow \quad x=1 \quad \text{y} \quad x=-4$
- Denominador : $5-2x=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\dfrac{5}{2}$

Estudiamos el signo

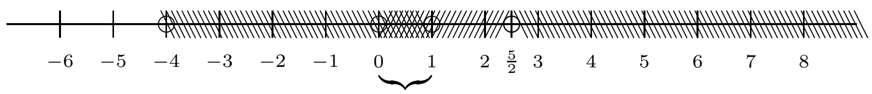
	$(-\infty,-4)$	$(-4,1)$	$\left(1,\dfrac{5}{2}\right)$	$\left(\dfrac{5}{2},\infty\right)$
$2(x-1)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$
$5-2x$	$+$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad II, es

$$\operatorname{sol}_2 : x \in (-4,1) \bigcup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$$

La solución final, $\operatorname{sol}_{\mathrm{F}}$, de la cadena de desigualdades es

$$\operatorname{sol}_{\mathrm{F}} = \operatorname{sol}_1 \bigcap \operatorname{sol}_2 = \left(0, \frac{5}{2}\right) \bigcap \left(\ (-4,1) \bigcup \left(\frac{5}{2}, \infty\right) \ \right) = (0,1)$$



$$\operatorname{sol}_{\mathrm{F}} = \operatorname{sol}_1 \bigcap \operatorname{sol}_2 = (0,1)$$

★

Ejemplo 3.23 : *Hallar el conjunto solución de* $\quad x - 3 \leq \dfrac{x^2-2}{x} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

Solución : Tenemos que, la solución de

$$x - 3 \leq \frac{x^2-2}{x} \leq \frac{1}{x^2}$$

viene dada por la intersección de las soluciones de las desigualdades

$$x - 3 \leq \frac{x^2-2}{x}, \quad \text{(Desigualdad I)} \qquad \text{y} \qquad \frac{x^2-2}{x} \leq \frac{1}{x^2}, \quad \text{(Desigualdad II)},$$

1. **Desigualdad I :** Se tiene

$$x - 3 \leq \frac{x^2-2}{x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{x^2-2}{x} - x + 3 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{x^2-2-x^2+3x}{x} \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{3x-2}{x}$$

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $3x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \dfrac{2}{3}$.
- Denominador : $x = 0$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, 0)$	$\left(0, \frac{2}{3}\right)$	$\left(\frac{2}{3}, \infty\right)$
$3x-2$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad I es $\quad \operatorname{sol}_1 : x \in (-\infty, 0) \bigcup \left[\dfrac{2}{3}, \infty\right)$.

2. **Desigualdad II :** Resolvemos la segunda desigualdad

$$\frac{x^2-2}{x} \leq \frac{1}{x^2} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2-2}{x} - \frac{1}{x^2} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x\left(x^2-2\right)-1}{x^2} \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^3-2x-1}{x^2} \leq 0$$

Factorizamos el numerador. Por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0 = -1$, son ± 1.

- Para $x=-1$

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x=-1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x)=x^3-2x-1=(x+1)\underbrace{\left(ax^2+bx+c\right)}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrl} & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & & -1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x)=x^2-x-1$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=-1$ y $c=-1$,

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \\ x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene como raíces a $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, y $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Luego, la factorización del polinomio del numerador $p(x)=x^3-2x-1$ es

$$x^3-2x-1=(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

Resolvemos la desigualdad

$$\frac{(x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{x^2}\leq 0.$$

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador.

- Numerador : $(x+1)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=0$ tenemos que

$$x=-1, \qquad x=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{y} \qquad x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

- Denominador : $x^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0.$

Estudiamos el signo

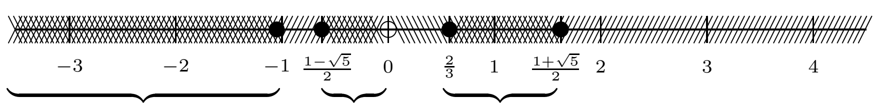
	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$	$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad II es

$$\text{sol}_2 : x \in (-\infty,-1] \bigcup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \bigcup \left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

La solución final, sol_F, de la cadena de desigualdades es

$$\begin{aligned} \text{sol}_\text{F} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 &= \left((-\infty,0) \bigcup \left[\frac{2}{3},\infty\right) \right) \bigcap \left((-\infty,-1] \bigcup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \bigcup \left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \right) \\ &= (-\infty,-1] \bigcup \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \bigcup \left[\frac{2}{3},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \end{aligned}$$



$$\text{sol}_\text{F} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = (-\infty,-1] \bigcup \left[\tfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right) \bigcup \left[\tfrac{2}{3},\tfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$$

★

Ejemplo 3.24 *: Realizar el estudio de signos de la expresión*

$$\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}.$$

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} < 0.$$

Consideremos la primera desigualdad, $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} > 0$.

Factorizamos numerador y denominador, en ambos casos, por ser polinomios cuadráticos, aplicamos la resolvente

- Numerador : $3x^2+6x+8$. Aplicamos la resolvente para $a=3$, $b=6$ y $c=8$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-96}}{6} = \frac{-6 \pm \sqrt{-60}}{6} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

- Denominador : x^2+2x+3. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=2$ y $c=3$

$$x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2}\longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

de aquí,

	$(-\infty,\infty)$
$3x^2+6x+8$	$+$
x^2+2x+3	$+$
	$+$

es decir, la expresión $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}$ siempre es mayor que cero, por lo que concluimos que

Positiva para : $x\in\mathbb{R}$ Negativa para : $\varnothing$

★

Ejemplo 3.25 *: Realizar el estudio de signos de la expresión*

$$\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}.$$

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}>0, \qquad \text{ó} \qquad \frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}<0.$$

Consideremos la primera desigualdad,

$$\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}>0.$$

Factorizamos numerador y denominador.

- Numerador : x^4-12x^2. Observemos que el término x^2 es factor común en la expresión, así,

$$x^4-12x^2=x^2\left(x^2-12\right).$$

Para la expresión $p(x)=x^2-12$ aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=-12$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(-12)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{48}}{2}=\frac{\pm4\sqrt{2}}{2}\qquad\Longrightarrow\qquad\begin{cases}x=2\sqrt{3}\\ \\ x=-2\sqrt{3}\end{cases}$$

así, el polinomio p tiene como raíces a $x=2\sqrt{3}$, y $x=-2\sqrt{3}$ y el polinomio p se factoriza como

$$p(x)=\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right).$$

Por lo tanto, el numerador se factoriza como

$$x^4-12x^2=x^2\left(x-2\sqrt{3}\right)\left(x+2\sqrt{3}\right).$$

- Denominador : x^4-8x^2+16. Consideremos el polinomio $q(x)=x^4-8x^2+16$. Observemos que el trinomio dado es de cuarto grado con la particularidad que los términos dados son de potencias pares, así, podemos proponer el cambio de variable

$$x^2=z \qquad\Longrightarrow\qquad x^4=z^2,$$

con lo que, el polinomio dado de cuarto grado en variable x se transforma en un polinomio de segundo grado en la nueva variable z, es decir,

$$q(z)=z^2-8z+16,$$

puesto que, el polinomio es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=-8$ y $c=16$,

$$z=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}=\frac{8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{2}\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases} z=\dfrac{8+0}{2}=\dfrac{8}{2}=4 \\ z=\dfrac{8-0}{2}=\dfrac{8}{2}=4\end{cases}$$

así, el polinomio q en variable z tiene dos raíces reales iguales, $z=4$ y $z=4$, luego, la factorización de q en variable z es

$$q(z)=(z-4)(z-4)=(z-4)^2,$$

pero, $z=x^2$, luego, el polinomio q en variable x queda escrito como

$$q(x)=\left(x^2-4\right)^2,$$

como debemos factorizar el polinomio en productos de factores reales irreducibles, veamos si las expresiones $\left(x^2-4\right)$ es irreducible.

- ♦ Para x^2-4 : Observemos que esta expresión es un producto notable de la forma suma por su diferencia, es decir, es de la forma

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

ya que,

$$x^2-4=(x)^2-(2)^2=(x+2)(x-2),$$

luego, x^2-4 se factoriza como

$$x^2-4=(x+2)(x-2).$$

Finalmente, el polinomio $q(x)=\left(x^2-4\right)^2$, se factoriza como

$$q(x)=x^4-8x^2+16=((x+2)(x-2))^2=(x+2)^2(x-2)^2.$$

Por lo tanto, el denominador se factoriza como

$$x^4-8x^2+16=(x+2)^2(x-2)^2.$$

Así, resolver

$$\frac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}>0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{x^2\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)}{(x+2)^2(x-2)^2}>0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $x^2\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0,\quad x=-2\sqrt{3}\quad$ y $\quad x=2\sqrt{3}$.
- Denominador : $(x+2)^2(x-2)^2=0 \quad\Longrightarrow\quad x=-2\quad$ y $\quad x=2$.

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)$	$\left(-2\sqrt{3},-2\right)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$\left(2,2\sqrt{3}\right)$	$\left(2\sqrt{3},\infty\right)$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+2\sqrt{3}$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$

es decir, la expresión $\dfrac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$ es

Positiva para : $x \in \left(-\infty, -2\sqrt{3}\right) \bigcup \left(2\sqrt{3}, \infty\right)$ Negativa para : $x \in \left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right) - \{-2, 0, 2\}$

★

Ejemplo 3.26 *: Realizar el estudio de signos de la expresión*

$$\frac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$\frac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3} > 0, \qquad \text{ó} \qquad \frac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3} < 0.$$

Consideremos la primera desigualdad,

$$\frac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3} > 0.$$

Factorizamos numerador y denominador.

- Numerador : $8x^3+96x$. Observemos que el término $8x$ es factor común en la expresión, así,

$$8x^3+96x = 8x\left(x^2+12\right).$$

Para la expresión $p(x) = x^2+12$ aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=12$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{-48}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

así, el polinomio $p(x) = x^2+12$ no tiene raíces reales, es **irreducible**. Luego, la factorización del numerador es

$$8x^3+96x = 8x\left(x^2+12\right).$$

- Denominador : $\left(x^2-4\right)^3$. Consideremos el polinomio $q(x) = x^2-4$. Observemos que esta expresión es un producto notable de la forma suma por su diferencia, es decir, es de la forma

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b),$$

ya que,

$$x^2-4 = (x)^2-(2)^2 = (x+2)(x-2),$$

luego, x^2-4 se factoriza como

$$x^2-4 = (x+2)(x-2).$$

Por lo tanto, el denominador se factoriza como

$$\left(x^2-4\right)^3 = (x+2)^3(x-2)^3.$$

Así, resolver

$$\frac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3} > 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{8x\left(x^2+12\right)}{(x+2)^3(x-2)^3} > 0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $8x\left(x^2+12\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0.$

- Denominador : $(x+2)^3(x-2)^3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x=-2 \quad$ y $\quad x=2.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-2)$	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x^2+12	$+$	$+$	$+$	$+$
$8x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$(x+2)^3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

es decir, la expresión $\dfrac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$ es

Positiva para : $\quad x \in (-2,0)\bigcup(2,\infty)$ Negativa para : $\quad x \in (-\infty,-2)\bigcup(0,2)$

★

Ejemplo 3.27 *: Realizar el estudio de signos de la expresión*

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}.$$

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}>0, \qquad \text{ó} \qquad \frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}<0.$$

Consideremos la primera desigualdad,

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}>0.$$

Manipulando algebraicamente el lado izquierdo de la desigualdad, tenemos (esto ya se realizó en la guía 7 de Matemática Inicial, ejemplo 20). Observemos que x^2-25 es un producto notable de la forma suma por su diferencia, ya que,

$$x^2-25=(x)^2-(5)^2=(x+5)(x-5),$$

con lo que se factoriza como

$$x^2-25=(x+5)(x-5)$$

así,

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}=\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{(x+5)(x-5)}$$

por lo tanto, el denominador común es $(x+5)(x-5)$, entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{(x+5)(x-5)} &= \frac{-(x+5)(x+3)-(x-5)(x-5)+(1)\left(2x^2+30\right)}{(x+5)(x-5)} \\
&= \frac{-\left(x^2+8x+15\right)-\left(x^2-10x+25\right)+\left(2x^2+30\right)}{(x+5)(x-5)} \\
&= \frac{-x^2-8x-15-x^2+10x-25+2x^2+30}{(x+5)(x-5)} \\
&= \frac{2x-10}{(x+5)(x-5)}=\frac{2(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{2}{x+5} \qquad \text{si } \ x\neq 5.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{x+3}{5-x}-\frac{x-5}{x+5}+\frac{2x^2+30}{x^2-25}=\frac{2}{x+5} \qquad \text{si} \quad x\neq 5,$$

así, resolver $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}>0$, es equivalente a resolver $\dfrac{2}{x+5}>0$, con $x\neq 5$.

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador.

- Numerador : No tiene raíces.
- Denominador : $x+5=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-5$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-5)$	$(-5,\infty)$
2	$+$	$+$
$x+5$	$-$	$+$
	$-$	$+$

Luego, la expresión $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$ es

Positiva para : $x\in(-5,\infty)-\{5\}$ Negativa para : $x\in(-\infty,-5)$.

★

Ejemplo 3.28 *: Resolver el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} 2\leq \dfrac{1+x-2x^2}{1-x} \\[2ex] \dfrac{x+2}{x-5}\leq \dfrac{x}{x+3} \end{cases}$$

Solución : Resolvemos cada una de las desigualdades por separados y luego se intersectan las soluciones.

- Para la desigualdad $2\leq \dfrac{1+x-2x^2}{1-x}$: Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 3.15 y su solución es

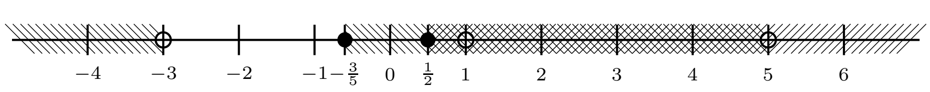
$$\text{sol}_1 : x\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}.$$

- Para la desigualdad $\dfrac{x+2}{x-5}\leq \dfrac{x}{x+3}$: Esta desigualdad se resolvió en el ejemplo 3.17 y su solución es

$$\text{sol}_2 : x\in(-\infty,-3)\bigcup\left[-\frac{3}{5},5\right).$$

Luego, la solución del sistema viene dada por

$$\text{sol}_{\text{F}}=\text{sol}_1\bigcap\text{sol}_2=\left(\left[\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}\right)\bigcap\left((-\infty,-3)\bigcup\left[-\frac{3}{5},5\right)\right)=\left[\frac{1}{2},5\right)-\{1\}.$$



$\text{sol}_{\text{F}}=\text{sol}_1\bigcap\text{sol}_2=\left[\frac{1}{2},5\right)-\{1\}$

★

Ejemplo 3.29 *: Resolver el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 < 3x^2 + 5x \\ \dfrac{x^2}{x+3} \geq x^2 - 2x \end{cases}$$

Solución : Resolvemos cada una de las desigualdades por separados y luego se intersectan las soluciones.

- Para la desigualdad $2x^2 - 3x + 5 < 3x^2 + 5x$: Comparamos con el cero, es decir,

$$2x^2 - 3x + 5 < 3x^2 + 5x \quad \Longrightarrow \quad 0 < 3x^2 + 5x - 2x^2 + 3x - 5 \quad \Longrightarrow \quad 0 < x^2 + 8x - 5.$$

puesto que, la expresión es de segundo grado podemos aplicar la resolvente para obtener sus raíces y por ende, su factorización. Aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 8$ y $c = -5$,

$$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} = \frac{-8 \pm \sqrt{64+20}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{84}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{4 \cdot 21}}{2}$$

$$= \frac{-8 \pm 2\sqrt{21}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{-8 + 2\sqrt{21}}{2} = -4 + \sqrt{21} \\ x = \dfrac{-8 - 2\sqrt{21}}{2} = -4 - \sqrt{21} \end{cases}$$

así, la factorización es

$$x^2 + 8x - 5 = \left(x + 4 - \sqrt{21}\right)\left(x + 4 + \sqrt{21}\right).$$

Por lo tanto, resolver

$$0 < x^2 + 8x - 5 \qquad \text{es equivalente a} \qquad 0 < \left(x + 4 - \sqrt{21}\right)\left(x + 4 + \sqrt{21}\right).$$

Las raíces de los factores son $x = -4 + \sqrt{21}$, y $x = -4 - \sqrt{21}$.

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, -4 - \sqrt{21}\right)$	$\left(-4 - \sqrt{21}, -4 + \sqrt{21}\right)$	$\left(-4 + \sqrt{21}, \infty\right)$
$x + 4 - \sqrt{21}$	$-$	$-$	$+$
$x + 4 + \sqrt{21}$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$\text{sol}_1 : x \in \left(-\infty, -4 - \sqrt{21}\right) \bigcup \left(-4 + \sqrt{21}, \infty\right).$$

- Para la desigualdad $\dfrac{x^2}{x+3} \geq x^2 - 2x$: Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{x^2}{x+3} \geq x^2 - 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{x+3} - x^2 + 2x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2 - x^2(x+3) + 2x(x+3)}{x+3} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{x^2 - x^3 - 3x^2 + 2x^2 + 6x}{x+3} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-x^3 + 6x}{x+3} \geq 0.$$

Factorizamos el numerador $-x^3+6x$. Observemos que el término x es factor común en la expresión, así,

$$-x^3+6x = x\left(6-x^2\right).$$

Para la expresión $p(x)=6-x^2$ aplicamos la resolvente para $a=-1$, $b=0$ y $c=6$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(-1)(6)}}{2(-1)}=\frac{0\pm\sqrt{24}}{-2}=\frac{0\pm2\sqrt{6}}{-2}= \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x=\dfrac{0+2\sqrt{6}}{-2}=-\sqrt{6} \\[2ex] x=\dfrac{0-2\sqrt{6}}{-2}=\sqrt{6}, \end{cases}$$

así, el polinomio $p(x)=6-x^2$ se factoriza como

$$6-x^2=-\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right).$$

Luego, la factorización del numerador es

$$-x^3+6x=-x\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right).$$

Por lo tanto, resolver

$$\frac{-x^3+6x}{x+3}\geq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{-x\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)}{x+3}\geq 0.$$

Las raíces de los términos son

- ⧫ Numerador : $-x\left(x+\sqrt{6}\right)\left(x-\sqrt{6}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0,\quad x=-\sqrt{6}\quad \text{y}\quad x=\sqrt{6}.$
- ⧫ Denominador : $x+3=0 \quad\Longrightarrow\quad x=-3.$

Estudiamos el signo

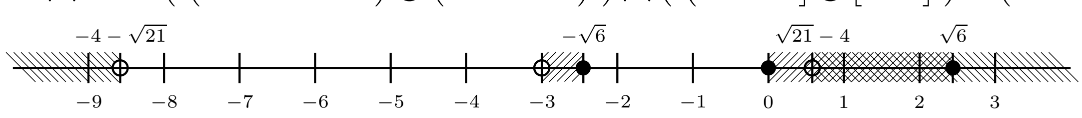
	$(-\infty,-3)$	$\left(-3,-\sqrt{6}\right)$	$\left(-\sqrt{6},0\right)$	$\left(0,\sqrt{6}\right)$	$\left(\sqrt{6},\infty\right)$
$-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x-\sqrt{6}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+\sqrt{6}$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

La solución de la desigualdad es

$$\text{sol}_2 : x\in\left(-3,-\sqrt{6}\right]\bigcup\left[0,\sqrt{6}\right].$$

Luego, la solución del sistema viene dada por

$$\text{sol}_{\text{F}}=\text{sol}_1\bigcap\text{sol}_2=\left(\left(-\infty,-4-\sqrt{21}\right)\bigcup\left(\sqrt{21}-4,\infty\right)\right)\bigcap\left(\left(-3,-\sqrt{6}\right]\bigcup\left[0,\sqrt{6}\right]\right)=\left(\sqrt{21}-4,\sqrt{6}\right]$$



$$\text{sol}_{\text{F}}=\text{sol}_1\bigcap\text{sol}_2=\left(\sqrt{21}-4,\sqrt{6}\right]$$

★

Ejemplo 3.30 : *Resolver el sistema de desigualdades*

$$\begin{cases} \dfrac{17}{5(x-6)} \leq \dfrac{7}{5(x-1)} \\[2ex] \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{x+3}{x^2+3} \geq \dfrac{2}{1-x} \end{cases}$$

Solución : Resolvemos cada una de las desigualdades por separados y luego se intersectan las soluciones.

- Para la desigualdad $\dfrac{17}{5(x-6)} \leq \dfrac{7}{5(x-1)}$: Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{17}{5(x-6)} \leq \frac{7}{5(x-1)} \implies \frac{17}{5(x-6)} - \frac{7}{5(x-1)} \leq 0 \implies \frac{17(x-1)-7(x-6)}{5(x-6)(x-1)} \leq 0$$

$$\implies \frac{17x-17-7x+42}{5(x-6)(x-1)} \leq 0 \implies \frac{10x+25}{5(x-6)(x-1)} \leq 0 \implies \frac{2x+5}{(x-6)(x-1)} \leq 0.$$

Por lo tanto, resolver

$$\frac{17}{5(x-6)} \leq \frac{7}{5(x-1)} \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{2x+5}{(x-6)(x-1)} \leq 0.$$

Las raíces de los términos son

♦ Numerador : $2x+5=0 \implies x=-\dfrac{5}{2}.$

♦ Denominador : $(x-6)(x-1)=0 \implies x=6$ y $x=1.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2},1\right)$	$(1,6)$	$(6,\infty)$
$2x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

La solución de la desigualdad es

$$\text{sol}_1 : x \in \left(-\infty,-\frac{5}{2}\right] \bigcup (1,6).$$

- Para la desigualdad $\dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{x+3}{x^2+3} \geq \dfrac{2}{1-x}$: Comparamos con el cero, es decir,

$$\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+3} \geq \frac{2}{1-x} \implies \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+3} - \frac{2}{1-x} \geq 0$$

$$\implies \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+3}{x^2+3} + \frac{2}{x-1} \geq 0$$

$$\implies \frac{x^2+3+(x+3)(x-1)^2+2\left(x^2+3\right)(x-1)}{(x-1)^2(x^2+3)} \geq 0$$

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{x+3}{x^2+3}\geq\frac{2}{1-x} \quad\Longrightarrow\quad \frac{\left(x^2+3\right)(1+2(x-1))+(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\left(x^2+3\right)(2x-1)+(x+3)(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2x^3-x^2+6x-3+(x+3)\left(x^2-2x+1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{2x^3-x^2+6x-3+x^3-2x^2+x+3x^2-6x+3}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{3x^3+x}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0.$$

Factorizamos numerador y denominador.

- Numerador : $3x^3+x$. Observemos que el término x es factor común en la expresión, así,

$$3x^3+x=x\left(3x^2+1\right).$$

  Para la expresión $p(x)=3x^2+1$ aplicamos la resolvente para $a=3$, $b=0$ y $c=1$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{\pm\sqrt{-12}}{6}\longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

  así, el polinomio $p(x)=3x^2+1$ no tiene raíces reales, es **irreducible**.

  Luego, la factorización del numerador es

$$3x^3+x=x\left(3x^2+1\right).$$

- Denominador : $(x-1)^2\left(x^2+3\right)$. Observemos que el polinomio

$$p(x)=(x-1)^2=(x-1)(x-1)$$

  se encuentra factorizado. Consideremos el polinomio $q(x)=x^2+3$, aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=3$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-12}}{2}\longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

  así, el polinomio $q(x)=x^2+3$ no tiene raíces reales, es **irreducible**.

  Por lo tanto, el denominador ya está factorizado.

Así, resolver

$$\frac{3x^3+x}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad \frac{x\left(3x^2+1\right)}{(x-1)^2\left(x^2+3\right)}\geq 0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $x\left(3x^2+1\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=0.$
- Denominador : $(x-1)^2\left(x^2+3\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad x=1.$

Estudiamos el signo

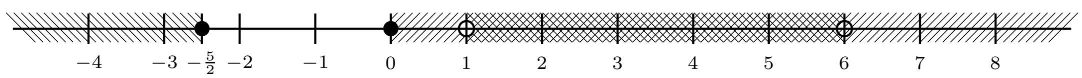
	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$3x^2+1$	$+$	$+$	$+$
$(x-2)^2$	$+$	$+$	$+$
$\left(x^2+3\right)$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$+$

La solución de la desigualdad es

$$\mathrm{sol}_2 : x \in [0,1) \bigcup (1,\infty)\,.$$

Luego, la solución del sistema viene dada por

$$\mathrm{sol_F} = \mathrm{sol}_1 \bigcap \mathrm{sol}_2 = \left(\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \bigcup (1,6) \right) \bigcap \left([0,1) \bigcup (1,\infty) \right) = (1,6)\,.$$



$$\mathrm{sol_F} = \mathrm{sol}_1 \bigcap \mathrm{sol}_2 = (1,6)$$

★

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones

1. $5x+3=2x-1$	2. $5x+3<2x-1$	3. $5x+3\geq 2x-1$	4. $5x+3>2x-1$
5. $5-\dfrac{x-1}{3}=2$	6. $5-\dfrac{x-1}{3}\geq 2$	7. $5-\dfrac{x-1}{3}\leq 2$	8. $5-\dfrac{x-1}{3}<2$
9. $\dfrac{3x}{5}+4=5x-\dfrac{4}{5}$	10. $\dfrac{3x}{5}+4<5x-\dfrac{4}{5}$	11. $\dfrac{3x}{5}+4\geq 5x-\dfrac{4}{5}$	12. $\dfrac{3x}{5}+4>5x-\dfrac{4}{5}$
13. $2x^2+3x-5=0$	14. $2x^2+3x-5<0$	15. $2x^2+3x-5\geq 0$	16. $2x^2+3x-5>0$
17. $x^2-16=0$	18. $x^2-16\leq 0$	19. $x^2-16>0$	20. $x^2-16\geq 0$
21. $\dfrac{3z+4}{5z+8}=\dfrac{3z-4}{5z+8}$	22. $\dfrac{3z+4}{5z+8}<\dfrac{3z-4}{5z+8}$	23. $\dfrac{3z+4}{5z+8}\geq\dfrac{3z-4}{5z+8}$	24. $\dfrac{3z+4}{5z+8}>\dfrac{3z-4}{5z+8}$
25. $16x^4-81=0$	26. $16x^4-81<0$	27. $16x^4-81\geq 0$	28. $16x^4-81>0$
29. $x^3+\dfrac{1}{x}=2x$	30. $x^3+\dfrac{1}{x}<2x$	31. $x^3+\dfrac{1}{x}\geq 2x$	32. $x^3+\dfrac{1}{x}>2x$
33. $\dfrac{2}{x-2}=\dfrac{1}{2+x}$	34. $\dfrac{2}{x-2}<\dfrac{1}{2+x}$	35. $\dfrac{2}{x-2}\geq\dfrac{1}{2+x}$	36. $\dfrac{2}{x-2}>\dfrac{1}{2+x}$
37. $\dfrac{7}{x+7}=\dfrac{x}{x^2-49}$	38. $\dfrac{7}{x+7}<\dfrac{x}{x^2-49}$	39. $\dfrac{7}{x+7}\geq\dfrac{x}{x^2-49}$	40. $\dfrac{7}{x+7}>\dfrac{x}{x^2-49}$
41. $\dfrac{5}{3t+2}=\dfrac{-2}{2t-1}$	42. $\dfrac{5}{3t+2}<\dfrac{-2}{2t-1}$	43. $\dfrac{5}{3t+2}\geq\dfrac{-2}{2t-1}$	44. $\dfrac{5}{3t+2}>\dfrac{-2}{2t-1}$
45. $\dfrac{a-1}{a^2+a}=\dfrac{1}{2a-2}$	46. $\dfrac{a-1}{a^2+a}<\dfrac{1}{2a-2}$	47. $\dfrac{a-1}{a^2+a}\geq\dfrac{1}{2a-2}$	48. $\dfrac{a-1}{a^2+a}>\dfrac{1}{2a-2}$

49. $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}=\frac{1}{3x}-\frac{3}{4}$ 50. $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}<\frac{1}{3x}-\frac{3}{4}$ 51. $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}\geq\frac{1}{3x}-\frac{3}{4}$ 52. $\frac{1}{x}+\frac{1}{4}>\frac{1}{3x}-\frac{3}{4}$

53. $\frac{2}{t+1}=\frac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 54. $\frac{2}{t+1}<\frac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 55. $\frac{2}{t+1}\geq\frac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 56. $\frac{2}{t+1}>\frac{t^2-t^3}{t^4+2}$

57. $\frac{1}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}=\frac{2}{a+2}$ 58. $\frac{1}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}<\frac{2}{a+2}$ 59. $\frac{1}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}\geq\frac{2}{a+2}$

60. $\frac{1}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}>\frac{2}{a+2}$ 61. $\frac{3x^2-2x+4}{2-x}=1-2x$ 62. $\frac{3x^2-2x+4}{2-x}<1-2x$

63. $\frac{3x^2-2x+4}{2-x}\geq 1-2x$ 64. $\frac{3x^2-2x+4}{2-x}>1-2x$ 65. $\frac{6t^2}{9t^2-1}-\frac{2}{3}=-\frac{2}{3t-1}$

66. $\frac{6t^2}{9t^2-1}-\frac{2}{3}<-\frac{2}{3t-1}$ 67. $\frac{6t^2}{9t^2-1}-\frac{2}{3}\geq-\frac{2}{3t-1}$ 68. $\frac{6t^2}{9t^2-1}-\frac{2}{3}>-\frac{2}{3t-1}$

69. $\frac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}=0$ 70. $\frac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}<0$ 71. $\frac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}\geq 0$

72. $\frac{(t-2)\left(t^2-2t-15\right)}{t^2-3}>0$

2. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $4-3x>0$ 2. $\frac{7}{2}x-3\geq\frac{4}{3}-2x$ 3. $4x-3<2x+5$ 4. $\frac{1}{2}(x+2)-3<8x-1$

5. $3+2(2x-1)-(5-x)\leq x-15$ 6. $3\left(2-\frac{5t}{6}\right)\leq 6-\frac{t}{2}$ 7. $\frac{3t-1}{2}+\frac{t}{5}\leq 2t+\frac{3(1-t)}{10}$

8. $4-x^2\geq 0$ 9. $6x+x^2>-9$ 10. $2x^2-3x+6>0$ 11. $4x^2+3-\sqrt{2}x\leq 0$

12. $2x^2+3\leq 0$ 13. $2x^2+3\geq 0$ 14. $x^2-16\leq 0$ 15. $\frac{\left(x^2-x-2\right)\left(x^2+1\right)}{x}<0$

16. $x-\frac{5}{x}<4$ 17. $4(x+3)^2\geq 4$ 18. $2t^2+3t-5\geq 0$ 19. $\frac{x-1/2}{x-5}\geq\frac{3}{4}-\frac{3x+1}{4x}$

20. $x^2+x>0$ 21. $9x^2-24x-x^3+20\geq 0$ 22. $2x^4+x^3-32x^2+59x-30>0$

23. $\frac{1}{x}\geq\frac{4}{3-x}$ 24. $\frac{x^2+4x-5}{2x^2+1}>1$ 25. $\frac{x+2}{x-5}\leq\frac{x}{x+3}$ 26. $\frac{1}{a^2-4}+\frac{3}{a-2}\geq\frac{2}{a+2}$

27. $\frac{2-3x}{x^2-7x+6}\leq 0$ 28. $\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4\right)}{x}\leq 0$ 29. $\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4\right)}{x^2}\leq 0$

30. $\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4\right)^2}{x}\leq 0$ 31. $\frac{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4\right)^2}{x^2}\leq 0$ 32. $\frac{6}{x}+5<\frac{56}{x+5}$

33. $x^3-8\geq 0$ 34. $x^2-8x^5\leq 0$ 35. $42x^2-6x^4\geq 36$ 36. $(2x+5)^2-9<0$

37. $(2-3x)^2-1\leq 0$ 38. $16-(4x-3)^2>0$ 39. $(x-1)^3-8\geq 0$ 40. $\frac{1}{x^2}>1$

41. $\frac{2x^2-5x+2}{\left(x^2-1\right)^2}<0$ 42. $x^3+3x^2\leq 13x+15$ 43. $\frac{2}{t+1}<\frac{t^2-t^3}{t^4+2}$ 44. $x^4-16\leq 0$

45. $-1<2x-5<7$ 46. $4x<2x+1<3x+2$ 47. $(3x-4)(2x+3)>(x+2)(x-1)$

48. $x^4+5x^3+5x^2-5x-6\geq 0$ 49. $-2\leq\frac{2-7x}{5+2x}<3$ 50. $\frac{2x^2-3x+1}{x^2-2x+1}>0$

51. $2x-1\le 5x-3\le 9-3x$ 52. $x>1-x\ge 3+2x$ 53. $1-x\ge 3-2x\ge x-6$

54. $-3\le 4-7x<4$ 55. $-\dfrac{2}{x}\le\dfrac{2-7x}{5+2x}<2-x$ 56. $-1\le\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}\le 5$

57. $x-3\le\dfrac{x^2-2}{x}\le\dfrac{1}{x^2}$ 58. $0<x-\dfrac{1}{x}<2x-1\le\dfrac{3x}{x-2}$ 59. $7x-2x^2-3<0$

60. $16x^4-81\le 0$ 61. $2t^4+4t^2-6<0$ 62. $x^3-2x-1>0$ 63. $\dfrac{2x-5}{3-4x}\ge 0$

64. $2\le\dfrac{1+x-2x^2}{1-x}$ 65. $-\dfrac{2}{x}\le\dfrac{2+7x}{5-2x}<2+x$ 66. $\dfrac{2}{x-1}-6x\le\dfrac{119}{x-4}+27$

67. $(3x-4)^3+8\le(x+1)^2-\left(x^2-x+3\right)$ 68. $\dfrac{2x-5}{3-4x}<0$ 69. $\dfrac{2x-5}{3-4x}<-2$

70. $2x-1\le\dfrac{x}{2}-2<5x+3$ 71. $(2x-2)^2-(4-x)^2<(1-x)^2-4$ 72. $\dfrac{1}{(x-1)^3}\ge 1$

73. $\dfrac{x-1}{x^2-1}-\dfrac{x+4}{x^2-16}\le 0$ 74. $\dfrac{1}{(x-1)^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}\ge 1$

3. Realizar el estudio de signos de las siguientes expresiones y graficar los respectivos conjuntos soluciones.

1. $(x+3)^2$ 2. x^3-27 3. $-x^2+x-10$ 4. $2x^4-x^3-6x^2$ 5. $2x^4+2x^2+\dfrac{1}{2}$

6. $\dfrac{x^3}{27}-8$ 7. $x^3-\dfrac{1}{x}$ 8. $\dfrac{x+5}{x^2+x-12}$ 9. $\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{2+x}$ 10. $\dfrac{2+x}{3-x}-\dfrac{x}{1+x}$

11. $7t-9t^2$ 12. $8x^3+1$ 13. $\dfrac{(x-2)\left(x^2-2x-15\right)}{x^2-3}$ 14. $\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-4x+3\right)$

15. x^4-16 16. $4x^2+29x+30$ 17. $\dfrac{\left(x^2-4x+3\right)(x+3)}{x^4-81}$ 18. $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}$

19. $\dfrac{5}{x^2-4}-\dfrac{3-x}{4-x^2}$ 20. $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+7}{x^2-1}-\dfrac{x-2}{x+1}$ 21. $\dfrac{x+3}{5-x}-\dfrac{x-5}{x+5}+\dfrac{2x^2+30}{x^2-25}$

22. $\dfrac{x^3+x^2-12x}{x^2-3x}\cdot\dfrac{3x^2-10x+3}{3x^2+11x-4}$ 23. $\dfrac{2x}{x^2-9}+\dfrac{x}{x^2+6x+9}-\dfrac{3}{x+3}$ 24. $\dfrac{8x^3+96x}{\left(x^2-4\right)^3}$

25. $\dfrac{2\left(x^2-3x+4\right)}{4-x^2}$ 26. $\dfrac{x^4-12x^2}{x^4-8x^2+16}$ 27. $\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ 28. $\dfrac{-4(x-4)}{(x-2)^3}$

29. $\dfrac{8x-40}{(x-2)^4}$ 30. $\dfrac{x}{x-2}+\dfrac{2-x}{x+3}-\dfrac{x^2+3}{x^2+x-6}$

4. Resolver los siguientes sistemas de desigualdades

1. $\begin{cases}5x-2\ge 4x+7\\ 4-3x<-6\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\dfrac{x-2}{4}-\dfrac{x-3}{2}\le 3-\dfrac{2x-1}{6}\\ \dfrac{4x-1}{6}+2x>13-\dfrac{x-1}{4}\end{cases}$ 3. $\begin{cases}\dfrac{x+1}{4}+2x\ge\dfrac{1-4x}{6}+13\\ \dfrac{x-2}{4}+\dfrac{2x-1}{6}\le 3+\dfrac{x-3}{2}\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{2\left(6-x^2\right)}{3}\le\dfrac{x(3-2x)}{3}-1\\ \left(x+\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>(x+2)(x-3)+\dfrac{2}{3}\end{cases}$ 5. $\begin{cases}-x^2+5x-4\ge 0\\ 3x^2-4x+8\le 3(x-1)^2\end{cases}$

6. $\begin{cases} x - \dfrac{5}{x} < 4 \\ 2x^2 + 3x - 5 \geq 0 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} \dfrac{3x^2 + x - 1}{3} \geq (x+1)(x-2) - \dfrac{3}{2} \\ (x-1)^2 - \dfrac{5}{3} < x\left(x + \dfrac{3}{5}\right) \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 - 6x + 5 \leq 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{4 - x^2}{(x-1)^2} > 0 \\ 3x \leq x^2 + 2 \end{cases}$ 10. $\begin{cases} \dfrac{\left(x^2 - x - 2\right)\left(x^2 + 1\right)}{x} < 0 \\ \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{\left(x^2 - 1\right)^2} < 0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 4} \geq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-5} < 0 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2 \leq \dfrac{1 + x - 2x^2}{1 - x} \\ \dfrac{x+2}{x-5} \leq \dfrac{x}{x+3} \end{cases}$ 13. $\begin{cases} 2x^2 - 3x + 5 < 3x^2 + 5x \\ \dfrac{x^2}{x+3} \geq x^2 - 2x \end{cases}$ 14. $\begin{cases} \dfrac{17}{5(x-6)} \leq \dfrac{7}{5(x-1)} \\ \dfrac{1}{(x-1)^2} + \dfrac{x+3}{x^2+3} \geq \dfrac{2}{1-x} \end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{2x-6}{5} - \dfrac{x-1}{10} < \dfrac{x}{5} \\ \dfrac{2-x}{3} - \dfrac{2x-3}{6} \leq 0 \\ x^2 - 10x - 24 \geq 0 \end{cases}$ 16. $\begin{cases} -1 < 2x - 5 < 7 \\ 1 - x \geq 3 - 2x \geq x - 6 \\ -2 \leq \dfrac{2 - 7x}{5 + 2x} < 3 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x^2 - 8x + 12 \leq 0 \\ x^2 + x - 6 > 0 \\ \dfrac{1}{x+1} \leq 1 + \dfrac{2}{x-1} \end{cases}$

5. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $\sqrt{-x} \geq 5$ 2. $\sqrt{16 - x^2} > 3$ 3. $\sqrt{\dfrac{1}{x+3}} < 1$ 4. $\sqrt{x^2 - 9} > 4$ 5. $\sqrt{x^2 - 9} < 4$

6. $\sqrt{\dfrac{3-x}{x+4}} > 3$ 7. $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} > 2$ 8. $\sqrt{\dfrac{3x-9}{2x+4}} \leq 2$ 9. $0 < \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}} \leq 3$

10. $1 \leq \sqrt{\dfrac{4-3x}{1-x^2}} < \sqrt{3}$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $x = -\frac{4}{3}$; 1.2. $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$; 1.3. $\left[-\frac{4}{3}, \infty\right)$; 1.4. $\left(-\frac{4}{3}, \infty\right)$; 1.5. $x = 10$; 1.6. $(-\infty, 10]$; 1.7. $[10, \infty)$;
1.8. $(10, \infty)$; 1.9. $x = \frac{12}{11}$; 1.10. $\left(\frac{12}{11}, \infty\right)$; 1.11. $\left(-\infty, \frac{12}{11}\right]$; 1.12. $\left(-\infty, \frac{12}{11}\right)$; 1.13. $x = -\frac{5}{2}$, $x = 1$;
1.14. $\left(-\frac{5}{2}, 1\right)$; 1.15. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right] \bigcup [1, \infty)$; 1.16. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \bigcup (1, \infty)$; 1.17. $x = -4$, $x = 4$; 1.18. $[-4, 4]$;
1.19. $(-\infty, -4) \bigcup (4, \infty)$; 1.20. $(-\infty, -4] \bigcup [4, \infty)$; 1.21. $\varnothing$; 1.22. $\left(-\infty, -\frac{8}{5}\right)$; 1.23. $\left(-\frac{8}{5}, \infty\right)$;
1.24. $\left(-\frac{8}{5}, \infty\right)$; 1.25. $x = \frac{3}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$; 1.26. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$; 1.27. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \bigcup \left[\frac{3}{2}, \infty\right)$; 1.28. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$;
1.29. $x = 1$, $x = -1$; 1.30. $(-\infty, -1) \bigcup (-1, 0)$; 1.31. $(0, \infty) \bigcup \{-1\}$; 1.32. $(0, 1) \bigcup (1, \infty)$; 1.33. $x = -6$;
1.34. $(-\infty, -6) \bigcup (-2, 2)$; 1.35. $[-6, -2) \bigcup (2, \infty)$; 1.36. $(-6, -2) \bigcup (2, \infty)$; 1.37. $x = \frac{49}{6}$;
1.38. $(-\infty, -7) \bigcup \left(7, \frac{49}{6}\right)$; 1.39. $(-7, 7) \bigcup \left[\frac{49}{6}, \infty\right)$; 1.40. $(-7, 7) \bigcup \left(\frac{49}{6}, \infty\right)$; 1.41. $x = \frac{1}{16}$;
1.42. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{16}, \frac{1}{2}\right)$; 1.43. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{16}\right] \bigcup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 1.44. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{16}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 1.45. $a = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$, $a = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$;
1.46. $(-\infty, -1) \bigcup \left(0, \frac{5-\sqrt{17}}{2}\right) \bigcup \left(1, \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$; 1.47. $(-1, 0) \bigcup \left[\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \bigcup \left[\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$;
1.48. $(-1, 0) \bigcup \left(\frac{5-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \bigcup \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$; 1.49. $x = -\frac{2}{3}$; 1.50. $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$; 1.51. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right] \bigcup (0, \infty)$;
1.52. $\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \bigcup (0, \infty)$; 1.53. $\varnothing$; 1.54. $(-\infty, -1)$; 1.55. $(-1, \infty)$; 1.56. $(-1, \infty)$; 1.57. $a = -11$;
1.58. $(-\infty, -11) \bigcup (-2, 2)$; 1.59. $[-11, -2) \bigcup (2, \infty)$; 1.60. $(-11, -2) \bigcup (2, \infty)$; 1.61. $x = -2$, $x = -1$;
1.62. $(-2, -1) \bigcup (2, \infty)$; 1.63. $(-\infty, -2] \bigcup [-1, 2)$; 1.64. $(-\infty, -2) \bigcup (-1, 2)$; 1.65. $t = -\frac{4}{9}$;
1.66. $\left(-\infty, -\frac{4}{9}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$; 1.67. $\left[-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$; 1.68. $\left(-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right) \bigcup \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$; 1.69. $t = 2$, $t = -3$, $t = 5$;

1.70. $(-\infty,-3)\bigcup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcup(2,5)$; 1.71. $\left[-3,-\sqrt{3}\right)\bigcup\left(\sqrt{3},2\right]\bigcup[5,\infty)$; 1.72. $\left(-3,-\sqrt{3}\right)\bigcup\left(\sqrt{3},2\right)\bigcup(5,\infty)$;

2.1. $\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$; 2.2. $\left[\frac{26}{33},\infty\right)$; 2.3. $(-\infty,4)$; 2.4. $\left(-\frac{2}{15},\infty\right)$; 2.5. $\left(-\infty,-\frac{11}{4}\right]$; 2.6. $[0,\infty)$; 2.7. $\mathbb{R}$;

2.8. $[-2,2]$; 2.9. $\mathbb{R}-\{-3\}$; 2.10. $\mathbb{R}$; 2.11. $\varnothing$; 2.12. $\varnothing$; 2.13. $\mathbb{R}$; 2.14. $[-4,4]$; 2.15. $(-\infty,-1)\bigcup(0,2)$;

2.16. $(-\infty,-1)\bigcup(0,5)$; 2.17. $(-\infty,-4]\bigcup[-2,\infty)$; 2.18. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\bigcup[1,\infty)$; 2.19. $(-\infty,-1]\bigcup\left(0,\frac{5}{4}\right]\bigcup(5,\infty)$;

2.20. $(-\infty,-1)\bigcup(0,\infty)$; 2.21. $(-\infty,5]$; 2.22. $(-\infty,-5)\bigcup\left(1,\frac{3}{2}\right)\bigcup(2,\infty)$; 2.23. $\left(0,\frac{3}{5}\right]\bigcup(3,\infty)$; 2.24. $\varnothing$;

2.25. $(-\infty,-3)\bigcup\left[-\frac{3}{5},5\right)$; 2.26. $[-11,-2)\bigcup(2,\infty)$; 2.27. $\left[\frac{2}{3},1\right)\bigcup(6,\infty)$; 2.28. $(-\infty,-2]\bigcup(0,2]$;

2.29. $[-2,0)\bigcup(0,2]$; 2.30. $(-\infty,0)\bigcup\{2\}$; 2.31. $x=-2$, $x=2$; 2.32. $(-5,0)\bigcup(2,3)$; 2.33. $[2,\infty)$;

2.34. $\left[\frac{1}{2},\infty\right)\bigcup\{0\}$; 2.35. $\left[-\sqrt{6},-1\right]\bigcup\left[1,\sqrt{6}\right]$; 2.36. $(-4,-1)$; 2.37. $\left[\frac{1}{3},1\right]$; 2.38. $\left(-\frac{1}{4},\frac{7}{4}\right)$; 2.39. $[3,\infty)$;

2.40. $(-1,0)\bigcup(0,1)$; 2.41. $\left(\frac{1}{2},2\right)\setminus\{1\}$; 2.42. $(-\infty,-5]\bigcup[-1,3]$; 2.43. $(-\infty,-1)$; 2.44. $[-2,2]$;

2.45. $(2,6)$; 2.46. $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$; 2.47. $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\bigcup\left(\sqrt{2},\infty\right)$; 2.48. $(-\infty,-3]\bigcup[-2,-1]\bigcup[1,\infty)$; 2.49. $(-1,4]$;

2.50. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\bigcup(1,\infty)$; 2.51. $\left[\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right]$; 2.52. $\varnothing$; 2.53. $[2,3]$; 2.54. $(0,1]$; 2.55. $\left(-1,\frac{3-\sqrt{79}}{7}\right]\bigcup\left(0,\frac{3+\sqrt{79}}{7}\right]$;

2.56. $\left(-\infty,-\frac{3+\sqrt{33}}{4}\right]\bigcup\left[\frac{3-\sqrt{57}}{8},\frac{\sqrt{33}-3}{4}\right]\bigcup\left[\frac{3+\sqrt{57}}{8},\infty\right)$; 2.57. $(-\infty,-1]\bigcup\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\bigcup\left[\frac{2}{3},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$; 2.58. $\left(2,\sqrt{3}+2\right]$;

2.59. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\bigcup(3,\infty)$; 2.60. $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]$; 2.61. $(-1,1)$; 2.62. $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\bigcup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$; 2.63. $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right]$;

2.64. $\left[\frac{1}{2},\infty\right)-\{1\}$; 2.65. $(0,1)$; 2.66. $\left[\frac{1}{2},1\right)\bigcup(4,\infty)$; 2.67. $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$; 2.68. $\left(-\infty,\frac{3}{4}\right)\bigcup\left(\frac{5}{2},\infty\right)$;

2.69. $\left(\frac{1}{6},\frac{3}{4}\right)$; 2.70. $\left(-\frac{10}{9},-\frac{2}{3}\right)$; 2.71. $\left(-\frac{1+\sqrt{19}}{2},\frac{\sqrt{19}-1}{2}\right)$; 2.72. $(1,2]$; 2.73. $(-\infty,-1)\bigcup(4,\infty)-\{-4\}$;

2.74. $\varnothing$; 3.1. Pos. $\mathbb{R}-\{-3\}$, Neg. $\varnothing$; 3.2. Pos. $(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,3)$; 3.3. Pos. $\varnothing$, Neg. $\mathbb{R}$;

3.4. Pos. $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\bigcup(2,\infty)$, Neg. $\left(-\frac{3}{2},2\right)-\{0\}$; 3.5. Pos. $\mathbb{R}$, Neg. $\varnothing$; 3.6. Pos. $(6,\infty)$, Neg. $(-\infty,6)$;

3.7. Pos. $(-1,0)\bigcup(1,\infty)$, Neg. $(-\infty,-1)\bigcup(0,1)$; 3.8. Pos. $(-5,-4)\bigcup(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,-5)\bigcup(-4,3)$;

3.9. Pos. $(-6,-2)\bigcup(2,\infty)$, Neg. $(-\infty,-6)\bigcup(-2,2)$; 3.10. Pos. $(-1,3)$, Neg. $(-\infty,-1)\bigcup(3,\infty)$;

3.11. Pos. $\left(0,\frac{7}{9}\right)$, Neg. $(-\infty,0)\bigcup\left(\frac{7}{9},\infty\right)$; 3.12. Pos. $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$, Neg. $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$;

3.13. Pos. $\left(-3,-\sqrt{3}\right)\bigcup\left(\sqrt{3},2\right)\bigcup(5,\infty)$, Neg. $(-\infty,-3)\bigcup\left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)\bigcup(2,5)$;

3.14. Pos. $(-\infty,-1)\bigcup(1,2)\bigcup(3,\infty)$, Neg. $(-1,1)\bigcup(2,3)$; 3.15. Pos. $(-\infty,-2)\bigcup(2,\infty)$, Neg. $(-2,2)$;

3.16. Pos. $(-\infty,-6)\bigcup\left(-\frac{5}{4},\infty\right)$, Neg. $\left(-6,-\frac{5}{4}\right)$; 3.17. Pos. $(1,\infty)\setminus\{3\}$, Neg. $(-\infty,1)\setminus\{-3\}$;

3.18. Pos. $\mathbb{R}$, Neg. $\varnothing$; 3.19. Pos. $(-\infty,-2)\bigcup(2,8)$, Neg. $(-2,2)\bigcup(8,\infty)$; 3.20. Pos. $(1,\infty)$, Neg. $(-\infty,1)\setminus\{-1\}$;

3.21. Pos. $(-5,\infty)-\{5\}$, Neg. $(-\infty,-5)$; 3.22. Pos. $(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,3)\setminus\left\{-4,0,\frac{1}{3}\right\}$;

3.23. Pos. $(-\infty,-9)\bigcup(3,\infty)$, Neg. $(-9,3)\setminus\{-3\}$; 3.24. Pos. $(-2,0)\bigcup(2,\infty)$, Neg. $(-\infty,-2)\bigcup(0,2)$;

3.25. Pos. $(-2,2)$, Neg. $(-\infty,-2)\bigcup(2,\infty)$; 3.26. Pos. $\left(-\infty,-2\sqrt{3}\right)\bigcup\left(2\sqrt{3},\infty\right)$, Neg. $\left(-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)\setminus\{-2,0,2\}$;

3.27. Pos. $(3,\infty)$, Neg. $(-\infty,3)\setminus\{2\}$; 3.28. Pos. $(2,4)$, Neg. $(-\infty,2)\bigcup(4,\infty)$; 3.29. Pos. $(5,\infty)$, Neg. $(-\infty,5)\setminus\{2\}$;

3.30. Pos. $\left(-3,\frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)\bigcup\left(2,\frac{7+\sqrt{21}}{2}\right)$, Neg. $(-\infty,-3)\bigcup\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2},2\right)\bigcup\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2},\infty\right)$; 4.1. $[9,\infty)$; 4.2. $\left(\frac{23}{5},26\right]$;

4.3. $\left[\frac{31}{7},26\right]$; 4.4. $[5,\infty)$; 4.5. $\varnothing$; 4.6. $\left(-\infty,-\frac{5}{2}\right]\bigcup[1,5)$; 4.7. $\left(-\frac{10}{39},\infty\right)$; 4.8. $[1,4]$; 4.9. $(-2,1)$;

4.10. $\left(\frac{1}{2},2\right)\setminus\{1\}$; 4.11. $[1,2]\bigcup(4,5)$; 4.12. $\left[\frac{1}{2},5\right)\setminus\{1\}$; 4.13. $\left(\sqrt{21}-4,\sqrt{6}\right]$; 4.14. $(1,6)$; 4.15. $\varnothing$;

4.16. $(2,3]$; 4.17. $(2,6]$; 5.1. $(-\infty,-25]$; 5.2. $\left(-\sqrt{7},\sqrt{7}\right)$; 5.3. $(-2,\infty)$; 5.4. $(-\infty,-5)\bigcup(5,\infty)$;

5.5. $(-5,-3]\bigcup[3,5)$; 5.6. $\left(-4,-\frac{33}{10}\right)$; 5.7. $\left(-\frac{7}{3},-2\right)$; 5.8. $(-\infty,-5]\bigcup[3,\infty)$; 5.9. $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; 5.10. $\varnothing$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Valor absoluto.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.04

- Valor absoluto. Definición. Propiedades.
- Resolución de ecuaciones e inecuaciones con valores absolutos.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 4.1 *: Escribir la definición de valor absoluto para la expresión* $|2x+5|$ *y haga un esquema indicando como se divide la recta real con esta expresión.*

Solución : Por definición de valor absoluto se tiene

$$|(\cdot)| = \begin{cases} (\cdot) & \text{si} \quad (\cdot) \geq 0 \\ -(\cdot) & \text{si} \quad (\cdot) < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad 2x+5 \geq 0 \\ -(2x+5) & \text{si} \quad 2x+5 < 0, \end{cases}$$

al resolver una de las desigualdades que aparecen en la definición se obtiene la manera como se secciona la recta real al aplicar la definición de valor absoluto para la expresión $2x+5$.

Resolvemos la desigualdad $2x+5 \geq 0$.

$$2x+5 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x \geq -5 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -\frac{5}{2},$$

de aquí, se obtiene que

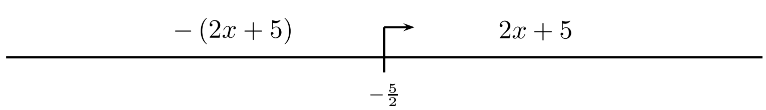
$$|2x+5| = 2x+5 \quad \text{cuando} \quad x \geq -\frac{5}{2},$$

por lo que

$$|2x+5| = -(2x+5) \quad \text{cuando} \quad x < -\frac{5}{2},$$

así, se tiene

$$|2x+5| = \begin{cases} 2x+5 & \text{si} \quad x \geq -\dfrac{5}{2} \\ -(2x+5) & \text{si} \quad x < -\dfrac{5}{2}. \end{cases}$$



★

Ejemplo 4.2 *: Escribir la definición de valor absoluto para cada expresión* $\left|\dfrac{x+3}{x^2-2x}\right|$ *y haga un esquema indicando como se divide la recta real con esta expresión.*

Solución : Por definición de valor absoluto se tiene

$$|(\cdot)| = \begin{cases} (\cdot) & \text{si} \quad (\cdot) \geq 0 \\ -(\cdot) & \text{si} \quad (\cdot) < 0. \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\left|\frac{x+3}{x^2-2x}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-2x} & \text{si} \quad \dfrac{x+3}{x^2-2x} \geq 0 \\ -\left(\dfrac{x+3}{x^2-2x}\right) & \text{si} \quad \dfrac{x+3}{x^2-2x} < 0, \end{cases}$$

al resolver una de las desigualdades que aparecen en la definición se obtiene la manera como se secciona la recta real al aplicar la definición de valor absoluto para la expresión $\dfrac{x+3}{x^2-2x}$.

Resolvemos la desigualdad $\dfrac{x+3}{x^2-2x} < 0$.

Factorizamos el denominador $x^2 - 2x$. Observemos que el término x es factor común en la expresión, así,

$$x^2 - 2x = x\,(x-2)\,.$$

Luego, la factorización del denominador es

$$x^2 - 2x = x\,(x-2)\,.$$

Por lo tanto, resolver

$$\frac{x+3}{x^2-2x} < 0 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{x+3}{x\,(x-2)} < 0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $x+3=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-3.$
- Denominador : $x\,(x-2)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=0 \quad \text{y} \quad x=2.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-3)$	$(-3,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

de aquí, se obtiene que

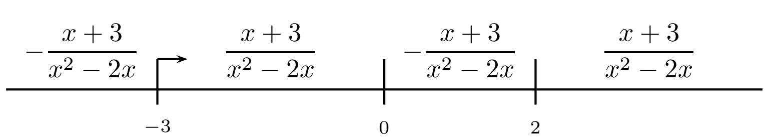
$$\left|\frac{x+3}{x^2-2x}\right| = \frac{x+3}{x^2-2x} \qquad \text{cuando} \quad x \in [-3,0) \bigcup (2,\infty)\,,$$

por lo que,

$$\left|\frac{x+3}{x^2-2x}\right| = -\frac{x+3}{x^2-2x} \qquad \text{cuando} \quad x \in (-\infty,-3) \bigcup (0,2)\,,$$

así, se tiene

$$\left|\frac{x+3}{x^2-2x}\right| = \begin{cases} \dfrac{x+3}{x^2-2x} & \text{si} \quad x \in [-3,0) \bigcup (2,\infty) \\ -\dfrac{x+3}{x^2-2x} & \text{si} \quad x \in (-\infty,-3) \bigcup (0,2)\,. \end{cases}$$



★

Ejemplo 4.3 *: Demostrar que si* $a \in \mathbb{R}$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $|a^n| = |a|^n$.

Demostración : Tenemos que

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{veces}},$$

así,

$$|a^n| = |a \cdot a \cdot a \cdots a| = \underbrace{|a| \cdot |a| \cdot |a| \cdots |a|}_{n-\text{veces}} = |a|^n .$$

★

Ejemplo 4.4 *: Demostrar que* $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces* $|a-b| = |b-a|$.

Demostración : Tenemos que, la expresión $a-b$ se puede escribir como

$$\underbrace{a-b}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } -1}}} = -(-a+b) = -(b-a),$$

es decir,

$$a-b = -(b-a),$$

así,

$$|a-b| = |-(b-a)| = |-1| \cdot |b-a| = |b-a|,$$

ya que, $|-1| = 1$. Luego

$$|a-b| = |b-a|.$$

★

Ejemplo 4.5 *: Demuestre que si* $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces* $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Demostración : Tenemos que, a se puede escribir como

$$a = a - b + b,$$

de aquí,

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Desigualdad triangular} \\ |x+y| \leq |x|+|y|}}}}{\leq} |a-b| + |b|,$$

es decir,

$$|a| \leq |a-b| + |b| \qquad \Longrightarrow \qquad |a| - |b| \leq |a-b|.$$

★

Ejemplo 4.6 *: Responda* ***VERDADERA*** *o* ***FALSA*** *las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta*

1. *Si* $a, b \in \mathbb{R}$, *entonces* $|a+b| = |a| + |b|$.
2. *Para todo* a *y* b, *se tiene* $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$.
3. *Para todo* a, b *y* c, *se tiene* $|a+b-c| \leq |a| + |b| + |c|$.

Solución : 1. Usando un contraejemplo: Sean $a = -3$ y $b = 5$, entonces

$$a + b = (-3) + (5) = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad |a+b| = |2| = 2,$$

por otro lado,

$$|a| + |b| = |-3| + |5| = 3 + 5 = 8,$$

de aquí,

$$|-3+5| = 2 \neq 8 = |-3| + |5|.$$

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

2. Tenemos que

$$\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}=|a|+|b|\neq a+b.$$

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

3. Tenemos que

$$|a+b-c|=|a+(b-c)|\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Desigualdad triangular } |x+y|\leq|x|+|y|}}}{\leq}|a|+|b-c|=|a|+|b+(-c)|\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Desigualdad triangular } |x+y|\leq|x|+|y|}}}{\leq}|a|+|b|+|-c|,$$

es decir,

$$|a+b-c|\leq|a|+|b|+|-c|,$$

pero,

$$|-c|=|(-1)\,c|=|-1|\cdot|c|=(1)\cdot|c|=|c|,$$

de aquí,

$$|a+b-c|\leq|a|+|b|+|c|.$$

Por lo tanto, la proposición es **VERDADERA**. ★

Ejemplo 4.7 *: Demuestre que las raíces de la ecuación cuadrática* $ax^2+bx+c=0$, *con* $a\neq 0$, *son*

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Demostración : Dividimos la ecuación entre a,

$$ax^2+bx+c=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2+\frac{b}{a}\,x+\frac{c}{a}=0,$$

completamos cuadrado, para ello sumamos y restamos $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ y se obtiene

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0 \quad\Longrightarrow\quad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

$$\Longrightarrow\quad \underbrace{x^2+2\,(x)\left(\frac{b}{2a}\right)+\left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Cuadrado perfecto } a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}}}=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}\quad\Longrightarrow\quad\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad}}}}{\Longrightarrow}\quad\sqrt{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}=\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}\quad\Longrightarrow\quad\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\underbrace{\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\text{Propiedades de radicales } \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}}}$$

$$\Longrightarrow\quad\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}}\quad\Longrightarrow\quad\left|x+\frac{b}{2a}\right|=\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2\,|a|},$$

por definición de valor absoluto, se tiene

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad x=-\frac{b}{2a}\pm\,\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

de aquí,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Esta expresión es conocida como la **resolvente**. ★

Ejemplo 4.8 *: Demuestre que si $a\geq 0$, $b\geq 0$ y $a<b$, entonces $\sqrt{a}<\sqrt{b}$.*

Demostración : Observemos que si

Hipótesis 1 : $a\geq 0$; Hipótesis 2 : $b\geq 0$; Hipótesis 3 : $a\leq b$; Tesis : $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

entonces, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Es conocido que $\sqrt{x^2}=|x|$, para todo $x\in\mathbb{R}$. En partícular, si $x\geq 0$, entonces

$$x=\sqrt{x^2}=\left(\sqrt{x}\right)^2.$$

Por las hipótesis 1 y 2, se tiene

$$a=\sqrt{a^2}=\left(\sqrt{a}\right)^2 \qquad \text{y} \qquad b=\sqrt{b^2}=\left(\sqrt{b}\right)^2,$$

por lo tanto, la hipótesis 3, se puede escribir como

$$\left(\sqrt{a}\right)^2\leq\left(\sqrt{b}\right)^2,$$

de aquí,

$$\left(\sqrt{a}\right)^2\leq\left(\sqrt{b}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2}_{\uparrow\ \boxed{\text{Producto notable } c^2-d^2=(c+d)(c-d)}}\leq 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\leq 0,$$

como el producto de dos términos es menor a cero si y solo si los términos tienen signos contrario e igual a cero si uno de los términos es cero, y puesto que, $\sqrt{(\cdot)}$ siempre es mayor ó igual a cero, se tiene que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ siempre es positivo o igual a cero, por lo tanto, **nunca** será negativo, así,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\leq 0 \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\geq 0 & \text{No se cumple} \\ \qquad\qquad\qquad \text{ó} & \\ \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\geq 0 \quad \text{y} \quad \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\leq 0 & \text{Si se cumple,} \end{cases}$$

de aquí,

$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{a}-\sqrt{b}\leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{a}\leq\sqrt{b}.$$

Luego, queda demostrado que

$$\text{si} \quad 0\leq a\leq b, \quad \text{entonces,} \quad \sqrt{a}\leq\sqrt{b},$$

es decir,

$$\boxed{\text{la operación “raíz cuadrada” mantiene desigualdades.}}$$

★

Ejemplo 4.9 *: Demuestre que* $\sqrt{x} \geq 0$, *para todo* $x \geq 0$.

Demostración : Tenemos que,

$$x \geq 0 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{x} \geq \sqrt{0} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} \geq 0$$

Luego,

$$\sqrt{x} \geq 0, \quad \text{para todo } x \geq 0,$$

es decir,

$$\boxed{\text{la “raíz cuadrada” siempre es mayor o igual a cero.}}$$

★

Ejemplo 4.10 *: El número* $\sqrt{ab}$ *se llama la **media geométrica** de dos números positivos* a *y* b*. Pruebe que*

$$a < b \qquad \textit{implica que} \qquad a < \sqrt{ab} < b.$$

Demostración : Observemos que si

Hipótesis 1 : $a > 0$; Hipótesis 2 : $b > 0$; Hipótesis 3 : $a < b$; Tesis : $a < \sqrt{ab} < b$

entonces, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Comenzando con la hipótesis 3, como

$a < b$	(Hipótesis 3)
$\downarrow$	Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por a, como a es positiva (Hipótesis 1) la desigualdad **no** cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)
$a^2 < ab$	
$\downarrow$	Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, la misma no cambia pues la aplicación $\sqrt{(\cdot)}$ mantiene desigualdades (ver ejemplo 4.8)
$\lvert a\rvert < \sqrt{ab}$	
	Como a es positiva (Hipótesis 1), se tiene que $\lvert a\rvert = a$
$a < \sqrt{ab}$	(Desigualdad I)

por otro lado, podemos hacer las mismas operaciones, pero esta vez multiplicando por b

$a < b$	(Hipótesis 3)
$\downarrow$	Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por b, como b es positiva (Hipótesis 2) la desigualdad **no** cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)
$ab < b^2$	
$\downarrow$	Aplicamos raíz cuadrada a ambos lados de la desigualdad, la misma no cambia pues la aplicación $\sqrt{(\cdot)}$ mantiene desigualdades (ver ejemplo 4.8)
$\sqrt{ab} < \lvert b\rvert$	
	Como b es positiva (Hipótesis 2), se tiene que $\lvert b\rvert = b$
$\sqrt{ab} < b$	(Desigualdad II)

Entonces, tenemos

$$a < \sqrt{ab} \qquad \text{y} \qquad \sqrt{ab} < b,$$

con lo que concluimos que

$$\text{si} \quad 0 < a < b, \qquad \text{entonces} \quad a < \sqrt{ab} < b.$$

★

Ejemplo 4.11 *: Si* $1 < x < 7$, *demuestre que* $\sqrt{3} < \sqrt{x+2} < 3$.

Demostración : Tenemos que a la desigualdad $1 < x < 7$ debemos sumar 2 y aplicar la raíz cuadrada.

$$1 < x < 7 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Sumamos } 2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \quad 3 < x+2 < 9 \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt{3} < \sqrt{x+2} < \sqrt{9}$$

como $\sqrt{9} = 3$, se tiene que, si $1 < x < 7$, entonces $\sqrt{3} < \sqrt{x+2} < 3$. ★

Ejemplo 4.12 *: Demuestre que* $1 \leq \sqrt{x^2+1} < \sqrt{10}$, *si* $x \in (-3, 1)$.

Demostración : Tenemos que

$$x \in (-3, 1) \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad -3 < x < 1,$$

así, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-3 < x < 1$, sumar 1 y aplicar la raíz cuadrada.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6) de la Guía 2, esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$\begin{array}{ccc}
 & -3 < x < 1 & \\
\text{Parte negativa} \ \swarrow & & \searrow \ \text{Parte positiva} \\
-3 < x < 0 & & 0 \leq x < 1 \\
\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}} \downarrow & & \downarrow \substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}} \\
9 > x^2 > 0 & & 0 \leq x^2 < 1 \\
\searrow & & \swarrow \ \text{Consideramos } \ x^2 \in (0,9) \bigcup [0,1] \\
 & 0 \leq x^2 < 9 & \\
 & \downarrow \substack{\text{Sumamos } 1 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}} & \\
 & 1 \leq x^2 + 1 < 10 & \\
 & \downarrow \substack{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}} & \\
 & \sqrt{1} \leq \sqrt{x^2+1} < \sqrt{10}, &
\end{array}$$

como $\sqrt{1} = 1$, se tiene que, si $x \in (-3, 1)$, entonces $1 \leq \sqrt{x^2+1} < \sqrt{10}$. ★

Ejemplo 4.13 *: Demuestre que si* $x \in [-1, 2]$ *entonces* $\sqrt{\dfrac{14-3x^2}{x^2+3}} \in \left[\sqrt{\dfrac{2}{7}}, \sqrt{\dfrac{14}{3}}\right]$.

Demostración : En primer lugar, tratemos de reescribir el cociente dentro de la raíz cuadrada de una forma más "cómoda" para manipular, para ello efectuamos el cociente

Dividimos los polinomios

$$\begin{array}{r|l} -3x^2+14 & x^2+3 \\ \cline{2-2} 3x^2+\ \ 9 & -3 \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

de aquí,

$$-3x^2+14=(-3)\left(x^2+3\right)+(23),$$

dividimos cada término de la igualdad por el polinomio del denominador $q(x)=x^2+3$ y obtenemos

$$\frac{-3x^2+14}{x^2+3}=\frac{(-3)\left(x^2+3\right)}{x^2+3}+\frac{23}{x^2+3},$$

es decir,

$$\frac{-3x^2+14}{x^2+3}=-3+\frac{23}{x^2+3}.$$

Luego, debemos demostrar que

$$\text{si} \quad x\in[-1,2], \quad \text{entonces} \quad \sqrt{\frac{23}{x^2+3}-3}\in\left[\sqrt{\frac{2}{7}},\sqrt{\frac{14}{3}}\right].$$

Tenemos que,

$$x\in[-1,2] \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad -1\leq x\leq 2,$$

así, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-1\leq x\leq 2$, sumar 3, aplicar el inverso multiplicativo, multiplicar por 23, sumar -3 y aplicar la raíz cuadrada.

Es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de los términos que aparecen en la expresión, ver ejercicio 17 y ejercicio 18 (ejemplo 2.6) de la Guía 2, esto nos lleva a separar la desigualdad en dos desigualdades, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos y al cero, así,

$$-1\leq x\leq 2$$

Parte negativa ↙ ↘ Parte positiva

$$-1\leq x<0 \qquad\qquad 0\leq x\leq 2$$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia) ↓ ↓ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)

$$1\geq x^2>0 \qquad\qquad 0\leq x^2\leq 4$$

↘ ↙ Consideramos $x^2\in(0,1]\bigcup[0,4]$

$$0\leq x^2\leq 4$$

↓ Sumamos 3 (la desigualdad se mantiene)

$$3\leq x^2+3\leq 7$$

↓ Aplicamos $\dfrac{1}{(\cdot)}$ (la desigualdad cambia)

$$\frac{1}{3}\geq\frac{1}{x^2+3}\geq\frac{1}{7}$$

↓ Multiplicamos por 23 (la desigualdad se mantiene)

$$\frac{23}{3}\geq\frac{23}{x^2+3}\geq\frac{23}{7}$$

$$\frac{23}{3} \geq \frac{23}{x^2+3} \geq \frac{23}{7}$$

$$\Big\downarrow \; \text{Sumamos } -3 \; \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$\frac{14}{3} \geq \frac{23}{x^2+3} - 3 \geq \frac{2}{7}$$

$$\Big\downarrow \; \text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \; \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$\sqrt{\frac{14}{3}} \geq \sqrt{\frac{23}{x^2+3} - 3} \geq \sqrt{\frac{2}{7}}.$$

Se tiene que, si $x \in [-1, 2]$ entonces $\sqrt{\dfrac{14-3x^2}{x^2+3}} \in \left[\sqrt{\dfrac{2}{7}}, \sqrt{\dfrac{14}{3}}\right]$. ★

Ejemplo 4.14 : *Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades.*

1. $\dfrac{|2x^2-x-3|}{5x-1} < 0$ 2. $\dfrac{|2x^2-x-3|}{5x-1} \leq 0$ 3. $\dfrac{5x-1}{|2x^2-x-3|} \leq 0$ 4. $\left|\dfrac{2x^2-x-3}{5x-1}\right| \leq 0$

Solución : 1. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{|2x^2-x-3|}{5x-1} < 0.$

Es conocido que un cociente es negativo si el numerador y denominador tienen signos diferentes, en vista que la expresión valor absoluto siempre es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x-1<0$, despejamos x,

$$5x-1<0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x<1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x<\frac{1}{5},$$

de aquí,

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right).$$

Por otro lado, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **estricta**, $(<)$, por lo que, no pertenecen a la solución aquellos valores x que hagan cero al numerador, es decir, al valor absoluto, así,

$$|2x^2-x-3| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2-x-3=0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática usando la resolvente para $a=2$, $b=-1$ y $c=-3$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\[2ex] x = \dfrac{1-5}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

así, las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x=-1 \qquad \text{y} \qquad x=\frac{3}{2},$$

por lo tanto, se debe excluir de la solución obtenida, $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right)$, al valor $x=-1$, el cual pertenece a este intervalo.

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right) - \{-1\}$.

2. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} \leq 0.$

Es conocido que un cociente es negativo si el numerador y denominador tienen signos diferentes, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x-1<0$, despejamos x, se obtiene que $x<\frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right).$$

En este caso, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **menor ó igual**, por lo que, aquellos valores x que hagan cero al numerador, es decir, al valor absoluto, deben pertenecer a la solución, siempre y cuando dichos valores no anulen al denominador. Resolvemos la ecuación $\left|2x^2-x-3\right|=0$,

$$\left|2x^2-x-3\right|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2-x-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1 \quad \text{y} \quad x=\frac{3}{2},$$

como, el valor $x=-1$, ya pertenece al intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$, solo debemos añadir a dicho intervalo el valor $x=\dfrac{3}{2}$, entonces, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \bigcup \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

3. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{5x-1}{\left|2x^2-x-3\right|} \leq 0.$

Es conocido que un cociente es negativo si el numerador y denominador tienen signos diferentes, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x-1\leq 0$, despejamos x, se obtiene que $x\leq\frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right].$$

Por otro lado, observemos que el denominador es la expresión valor absoluto, por lo que, los valores x que hagan cero al valor absoluto no pueden pertenecer a la solución, así,

$$\left|2x^2-x-3\right|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2-x-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1 \quad \text{y} \quad x=\frac{3}{2},$$

puesto que, el valor $x=-1$, pertenece al intervalo $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right]$, debemos excluirlo, entonces, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right] - \{-1\}.$$

4. Resolvemos la desigualdad $\left|\dfrac{2x^2-x-3}{5x-1}\right| \leq 0.$

Es conocido que la expresión valor absoluto es siempre positiva o igual a cero, observemos que la desigualdad que deseamos resolver es del tipo **menor ó igual** a cero, por lo tanto, dicha desigualdad solo tendrá sentido si el valor absoluto es igual a cero, así, la solución viene dada por

$$\left|\frac{2x^2-x-3}{5x-1}\right|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x^2-x-3}{5x-1}=0,$$

un cociente es igual a cero para aquellos valores $x\in\mathbb{R}$, tales que, el numerador sea igual a cero, siempre y cuando dichos valores x no anulen al denominador, por lo tanto, resolvemos

$$\left\{\begin{array}{l} 2x^2 - x - 3 = 0 \\ \\ 5x - 1 \neq 0 \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -1 \qquad \text{y} \qquad x = \dfrac{3}{2} \\ \\ \qquad\qquad x \neq \dfrac{1}{5}, \end{array}\right.$$

luego, la solución de la desigualdad es

$$x = -1 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x = \frac{3}{2}.$$

★

Ejemplo 4.15 *: Hallar el conjunto solución de cada una de las siguientes desigualdades.*

1. $\dfrac{\left|2x^2 - x - 3\right|}{5x - 1} > 0$ 2. $\dfrac{\left|2x^2 - x - 3\right|}{5x - 1} \geq 0$ 3. $\dfrac{5x - 1}{\left|2x^2 - x - 3\right|} \geq 0$ 4. $\left|\dfrac{2x^2 - x - 3}{5x - 1}\right| \geq 0$

Solución : 1. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{\left|2x^2 - x - 3\right|}{5x - 1} > 0.$

Es conocido que un cociente es positivo si el numerador y denominador tienen signos iguales, en vista que la expresión valor absoluto siempre es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x - 1 > 0$, despejamos x,

$$5x - 1 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 5x > 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x > \frac{1}{5},$$

de aquí,

$$x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right).$$

Por otro lado, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **estricta**, $(>)$, por lo que no pertenecen a la solución aquellos valores x que hagan cero al numerador, es decir, al valor absoluto, así,

$$\left|2x^2 - x - 3\right| = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 - x - 3 = 0.$$

Resolvemos la ecuación cuadrática usando la resolvente para $a = 2$, $b = -1$ y $c = -3$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} \quad \Longrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{1 + 5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \\ x = \dfrac{1 - 5}{4} = \dfrac{-4}{4} = -1 \end{array}\right.$$

así, las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x = -1 \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad x = \frac{3}{2},$$

por lo tanto, se debe excluir de la solución obtenida, $x \in \left(\dfrac{1}{5}, \infty\right)$, al valor $x = \dfrac{3}{2}$, el cual pertenece a este intervalo.

Luego, la solución de la desigualdad es $x \in \left(\dfrac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}.$

2. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{\left|2x^2 - x - 3\right|}{5x - 1} \geq 0.$

Es conocido que un cociente es positivo si el numerador y denominador tienen signos iguales, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x - 1 > 0$, despejamos x, se obtiene que $x > \frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right).$$

En este caso, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **mayor ó igual**, por lo que, aquellos valores x que hagan cero al numerador, es decir, al valor absoluto, deben pertenecer a la solución, siempre y cuando dichos valores no anulen al denominador. Resolvemos la ecuación $\left|2x^2 - x - 3\right| = 0$,

$$\left|2x^2 - x - 3\right| = 0 \quad \iff \quad 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \iff \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{2},$$

como, el valor $x = \frac{3}{2}$, ya pertenece al intervalo $\left(\frac{1}{5}, \infty\right)$ solo debemos añadir a dicho intervalo el valor $x = -1$ entonces, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right) \bigcup \{-1\}.$$

3. Resolvemos la desigualdad $\dfrac{5x - 1}{|2x^2 - x - 3|} \geq 0.$

Es conocido que un cociente es positivo si el numerador y denominador tienen signos iguales, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x - 1 \geq 0$, despejamos x, se obtiene que $x \geq \frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left[\frac{1}{5}, \infty\right).$$

Por otro lado, observemos que el denominador es la expresión valor absoluto, por lo que los valores x que hagan cero al valor absoluto no pueden pertenecer a la solución, así,

$$\left|2x^2 - x - 3\right| = 0 \quad \iff \quad 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \iff \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{2},$$

puesto que, el valor $x = \frac{3}{2}$, pertenece al intervalo $\left[\frac{1}{5}, \infty\right)$, debemos excluirlo, entonces, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left[\frac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}.$$

4. Resolvemos la desigualdad $\left|\dfrac{2x^2 - x - 3}{5x - 1}\right| \geq 0.$

Es conocido que la expresión valor absoluto siempre es positivo o igual a cero, por lo tanto, la solución de esta desigualdad es cualquier número real, excepto aquellos que anulen al denominador, el cual es

$$5x - 1 = 0 \quad \iff \quad x = \frac{1}{5},$$

luego, la solución de la desigualdad es

$$x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}.$$

★

Observación : Comparar los ejemplos 4.14 y 4.15. ¿Qué observa?

Ejemplo 4.16 *: Hallar el conjunto solución de* $\left|\dfrac{2 - 3x}{1 + 2x}\right| \leq 4.$

Solución : Por definición de valor absoluto

$$\left|\frac{2 - 3x}{1 + 2x}\right| = \begin{cases} \dfrac{2 - 3x}{1 + 2x} & \text{si} \quad \dfrac{2 - 3x}{1 + 2x} \geq 0 \\[2ex] -\dfrac{2 - 3x}{1 + 2x} & \text{si} \quad \dfrac{2 - 3x}{1 + 2x} < 0 \end{cases}$$

tenemos que

$$\left|\frac{2-3x}{1+2x}\right| \leq 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \dfrac{2-3x}{1+2x} \leq 4 & \text{si} \quad \dfrac{2-3x}{1+2x} \geq 0 \\ \\ -\dfrac{2-3x}{1+2x} \leq 4 & \text{si} \quad \dfrac{2-3x}{1+2x} < 0. \end{cases}$$

Observemos que al multiplicar por -1 a la expresión $-\dfrac{2-3x}{1+2x} \leq 4$, se obtiene $\dfrac{2-3x}{1+2x} \geq -4$, por lo que se desea encontrar los valores de x que satisfagan a

$$-4 \leq \frac{2-3x}{1+2x} \qquad \text{y} \qquad \frac{2-3x}{1+2x} \leq 4, \qquad \text{es decir,} \qquad -4 \leq \frac{2-3x}{1+2x} \leq 4.$$

Para obtener la solución de esta cadena de desigualdades, resolvemos las dos desigualdades asociadas y se intersectan las soluciones.

Se resuelven las dos desigualdades

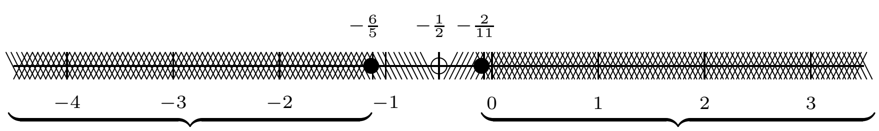
Desigualdad I	Desigualdad II
$-4 \leq \dfrac{2-3x}{1+2x}$	$\dfrac{2-3x}{1+2x} \leq 4$
$0 \leq \dfrac{2-3x}{1+2x} + 4$	$\dfrac{2-3x}{1+2x} - 4 \leq 0$
$0 \leq \dfrac{2-3x+4(1+2x)}{1+2x}$	$\dfrac{2-3x-4(1+2x)}{1+2x} \leq 0$
$0 \leq \dfrac{6+5x}{1+2x}$	$\dfrac{-2-11x}{1+2x} \leq 0$
Raíces : $x = -\dfrac{6}{5}, \quad x = -\dfrac{1}{2}$	Raíces : $x = -\dfrac{2}{11}, \quad x = -\dfrac{1}{2}$
Estudiamos el signo	Estudiamos el signo
$\text{sol}_1 : x \in \left(-\infty, -\dfrac{6}{5}\right] \bigcup \left(-\dfrac{1}{2}, \infty\right)$	$\text{sol}_2 : x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right) \bigcup \left[-\dfrac{2}{11}, \infty\right)$

Desigualdad I:

	$\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right)$	$\left(-\frac{6}{5}, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
$5x+6$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Desigualdad II:

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{2}{11}\right)$	$\left(-\frac{2}{11}, \infty\right)$
$-11x-2$	$+$	$+$	$-$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$



$$\text{sol}_F = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \left(-\infty, -\tfrac{6}{5}\right] \bigcup \left[-\tfrac{2}{11}, \infty\right)$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \bigcup \left[-\frac{2}{11}, \infty\right)$$

★

Ejemplo 4.17 : *Hallar el conjunto solución de*

$$\left|\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{2x}\right|>\frac{3}{2}$$

Solución : Observemos que

$$\left|\frac{2x}{x+1}-\frac{x+1}{2x}\right|>\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{4x^2-(x+1)^2}{2x(x+1)}\right|>\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{4x^2-\left(x^2+2x+1\right)}{2x(x+1)}\right|>\frac{3}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \left|\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}\right|>\frac{3}{2},$$

tenemos, por definición de valor absoluto, que

$$\left|\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}\right|>\frac{3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad \dfrac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}\geq 0 \\[2ex] -\dfrac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\dfrac{3}{2} & \text{si} \quad \dfrac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}<0 \end{cases},$$

es decir, tenemos dos desigualdades a resolver

$$\text{Caso negativo :} \quad -\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\frac{3}{2}, \qquad \text{(Desigualdad I)}$$

$$\text{Caso positivo :} \quad \frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\frac{3}{2}, \qquad \text{(Desigualdad II)}$$

se desea encontrar los valores de x que satisfagan a

$$-\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\frac{3}{2} \qquad \text{ó} \qquad \frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\frac{3}{2}.$$

Para obtener la solución de estas desigualdades, resolvemos las dos desigualdades y se unen las soluciones.

Se resuelven las dos desigualdades

Desigualdad I

$$-\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}>\frac{3}{2}$$

$$0>\frac{3x^2-2x-1}{2x(x+1)}+\frac{3}{2}$$

$$0>\frac{3x^2-2x-1+3x(x+1)}{2x(x+1)}$$

$$0>\frac{6x^2+x-1}{2x(x+1)}$$

Raíces : $x=0, \quad x=-1, \quad x=-\dfrac{1}{2}, \quad x=\dfrac{1}{3}$

	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$	$\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
$6\left(x+\frac{1}{2}\right)$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\text{sol}_1 : x\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)\bigcup\left(0,\frac{1}{3}\right)$$

Desigualdad II

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x\,(x+1)} > \frac{3}{2}$$

$$\frac{3x^2-2x-1}{2x\,(x+1)} - \frac{3}{2} > 0$$

$$\frac{3x^2-2x-1-3x\,(x+1)}{2x\,(x+1)} > 0$$

$$\frac{-5x-1}{2x\,(x+1)} > 0$$

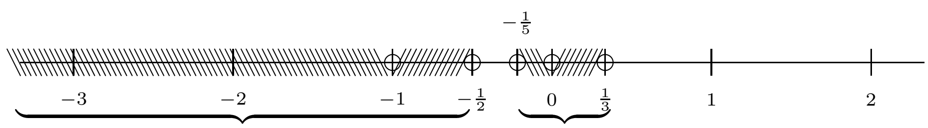
$$\text{Raíces :} \quad x=-\frac{1}{5}, \quad x=0, \quad x=-1$$

	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,-\frac{1}{5}\right)$	$\left(-\frac{1}{5},0\right)$	$(0,\infty)$
$-5x-1$	$+$	$+$	$-$	$-$
$2x$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\text{sol}_2 : x \in (-\infty,-1) \bigcup \left(-\frac{1}{5},0\right)$$

Entonces, la solución final es

$$\text{sol}_{\text{F}} = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 = \left(\left(-1,-\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(0,\frac{1}{3}\right) \right) \bigcup \left((-\infty,-1) \bigcup \left(-\frac{1}{5},0\right) \right)$$



$$\text{sol}_{\text{F}} = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 = \left(-\infty,-\tfrac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\tfrac{1}{5},\tfrac{1}{3}\right) - \{-1,0\}$$

Luego,

$$\text{sol}_{\text{F}} = \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right) - \{-1,0\}$$

★

Ejemplo 4.18 : *Hallar el conjunto solución de las siguientes desigualdades.*

1. $2-\left|4x^2+x-9\right| > 5$
2. $2-\left|4x^2+x-9\right| \geq 5$
3. $2-\left|4x^2+x-9\right| < 5$
4. $2-\left|4x^2+x-9\right| \leq 5$

Solución : 1. Tenemos que

$$2-\left|4x^2+x-9\right| > 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2-5 > \left|4x^2+x-9\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 > \left|4x^2+x-9\right|,$$

observemos que deseamos encontrar los valores de x que haga que la expresión $\left|4x^2+x-9\right|$ sea menor que un número negativo, pero es conocido que el valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, por lo tanto, nunca será negativo, así, la solución de la desigualdad es **vacía**.

2. Tenemos que

$$2-\left|4x^2+x-9\right| \geq 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2-5 \geq \left|4x^2+x-9\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 \geq \left|4x^2+x-9\right|,$$

por el mismo razonamiento utilizado en el item 1, concluimos que la solución de esta desigualdad también es **vacía**.

3. Tenemos que

$$2-\left|4x^2+x-9\right| < 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2-5 < \left|4x^2+x-9\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 < \left|4x^2+x-9\right|,$$

observemos que deseamos encontrar los valores de x que haga que la expresión $\left|4x^2+x-9\right|$ sea mayor que un número negativo, como el valor absoluto siempre es mayor o igual a cero, cualquier valor x satisface que el valor absoluto sea mayor que un número negativo, así, la solución de la desigualdad son los valores $x \in \mathbb{R}$.

4. Tenemos que

$$2-\left|4x^2+x-9\right| \leq 5 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2-5 \leq \left|4x^2+x-9\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3 \leq \left|4x^2+x-9\right|,$$

por el mismo razonamiento usado en 3, concluimos que la solución de esta desigualdad también es $x \in \mathbb{R}$. ★

Ejemplo 4.19 *: Hallar el conjunto solución de*

$$\left|x^2-3x-5\right| \geq \left|x^2+6\right|$$

Solución : Es conocido que

$$|(\cdot)|^2 = (\cdot)^2,$$

además, elevar al cuadrado mantiene desigualdades si los términos son positivos como es el caso de la expresión valor absoluto, así,

$$\left|x^2-3x-5\right| \geq \left|x^2+6\right| \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|x^2-3x-5\right|^2 \geq \left|x^2+6\right|^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(x^2-3x-5\right)^2 \geq \left(x^2+6\right)^2,$$

resolvemos esta última desigualdad

$$\left(x^2-3x-5\right)^2 \geq \left(x^2+6\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \overbrace{\left(x^2-3x-5\right)^2-\left(x^2+6\right)^2}^{\boxed{\substack{\text{Suma por su diferencia con} \\ a=x^2-3x-5 \quad \text{y} \quad b=x^2+6}}} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Bigg(\overbrace{\left(x^2-3x-5\right)+\left(x^2+6\right)}^{\boxed{a+b}}\Bigg)\Bigg(\overbrace{\left(x^2-3x-5\right)-\left(x^2+6\right)}^{\boxed{a-b}}\Bigg) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left(2x^2-3x+1\right)\left(-3x-11\right) \geq 0,$$

factorizamos el polinomio de grado 2, para hallar sus raíces aplicamos la resolvente para $a=2$, $b=-3$ y $c=1$

$$x=\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2-4(2)(1)}}{2(2)}=\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}=\frac{3 \pm \sqrt{1}}{4}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{4}=1 \\[2mm] \dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

así, la factorización del polinomio es

$$2x^2-3x+1=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

por lo que debemos resolver la siguientes desigualdad

$$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(-3x-11) \geq 0.$$

Buscamos las raíces de la expresión

$$x-1=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=1, \qquad\qquad x-\frac{1}{2}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{1}{2}, \qquad\qquad -3x-11=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-\frac{11}{3}.$$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,-\dfrac{11}{3}\right)$	$\left(-\dfrac{11}{3},\dfrac{1}{2}\right)$	$\left(\dfrac{1}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
$2(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-3x-11$	$+$	$-$	$-$	$-$
	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución es

$$x\in\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right]\bigcup\left[\frac{1}{2},1\right].$$

★

Ejemplo 4.20 *: Hallar el conjunto solución de* $|2x+4|-|x-1|\leq 4.$

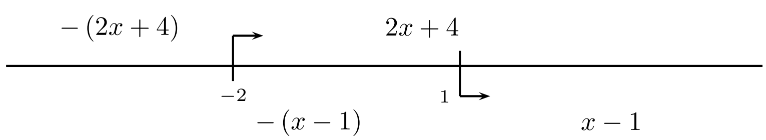
Solución : Por la definición de valor absoluto

$$|2x+4|=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad 2x+4\geq 0\\ -(2x+4) & \text{si} \quad 2x+4<0\end{cases}=\begin{cases}2x+4 & \text{si} \quad x\geq -2\\ -(2x+4) & \text{si} \quad x<-2\end{cases}$$

y

$$|x-1|=\begin{cases}x-1 & \text{si} \quad x-1\geq 0\\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1<0\end{cases}=\begin{cases}x-1 & \text{si} \quad x\geq 1\\ -(x-1) & \text{si} \quad x<1\end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$(-\infty,-2)$	$[-2,1)$	$[1,\infty)$
$-(2x+4)$	$2x+4$	$2x+4$
$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$

Caso I : Intervalo $(-\infty,-2)$. La desigualdad

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{se expresa como} \qquad -(2x+4)-(1-x)\leq 4,$$

resolvemos,

$$-(2x+4)-(1-x)\leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad -x\leq 9 \quad\Longleftrightarrow\quad x\geq 9 \quad\Longleftrightarrow\quad x\in[-9,\infty),$$

entonces

$$\text{sol}_1: x\in[-9,\infty)\bigcap(-\infty,-2)=[-9,-2) \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\text{sol}_1: x\in[-9,-2).}$$

Caso II : Intervalo $[-2,1)$. La desigualdad

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{se expresa como} \qquad 2x+4-(1-x)\leq 4,$$

resolvemos,

$$2x+4-(1-x)\leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad 3x\leq 1 \quad\Longleftrightarrow\quad x\leq \frac{1}{3} \quad\Longleftrightarrow\quad x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right],$$

entonces

$$\text{sol}_2 : x\in\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\bigcap[-2,1)=\left[-2,\frac{1}{3}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\text{sol}_2 : x\in\left[-2,\frac{1}{3}\right).}$$

Caso III : Intervalo $[1,\infty)$. La desigualdad

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{se expresa como} \qquad 2x+4-(x-1)\leq 4,$$

resolvemos,

$$2x+4-(x-1)\leq 4 \quad\Longleftrightarrow\quad x\leq -1 \quad\Longleftrightarrow\quad (-\infty,-1],$$

entonces

$$\text{sol}_3 : x\in(-\infty,-1]\bigcap[1,\infty)=\varnothing \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\text{sol}_3 : \varnothing.}$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F=\text{sol}_1\bigcup\text{sol}_2\bigcup\text{sol}_3=[-9,-2)\bigcup\left[-2,\frac{1}{3}\right)\bigcup\varnothing=\left[-9,\frac{1}{3}\right) \quad\Longrightarrow\quad x\in\left[-9,\frac{1}{3}\right).$$

★

Ejemplo 4.21 *: Hallar el conjunto de todas las soluciones de*

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}<1.$$

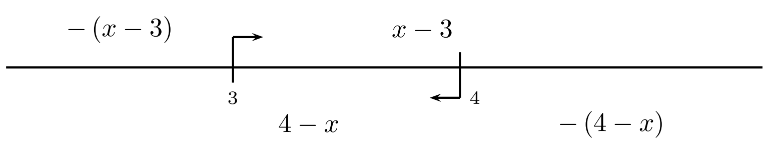
Solución : Por la definición de valor absoluto

$$|x-3|=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x-3\geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x-3<0 \end{cases}=\begin{cases} x-3 & \text{si} \quad x\geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x<3 \end{cases}$$

y

$$|4-x|=\begin{cases} 4-x & \text{si} \quad 4-x\geq 0 \\ -(4-x) & \text{si} \quad 4-x<0 \end{cases}=\begin{cases} 4-x & \text{si} \quad 4\geq x \\ -(4-x) & \text{si} \quad 4<x \end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$(-\infty,3)$	$[3,4]$	$(4,\infty)$
$-(x-3)$	$x-3$	$x-3$
$4-x$	$4-x$	$-(4-x)$

Caso I : Intervalo $(-\infty,3)$. La desigualdad

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}<1, \qquad \text{se expresa como} \qquad \frac{-(x-3)-2}{(4-x)-1}<1,$$

resolvemos,

$$\frac{-(x-3)-2}{(4-x)-1}<1 \iff \frac{1-x}{3-x}<1 \iff \frac{1-x}{3-x}-1<0 \iff \frac{1-x-(3-x)}{3-x}<0$$

$$\iff \frac{1-x-3+x}{3-x}<0 \iff \frac{-2}{3-x}<0.$$

Por lo tanto, resolver

$$\frac{-(x-3)-2}{(4-x)-1}<1 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{-2}{3-x}<0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : No tiene raíz.
- Denominador : $3-x=0 \iff x=3.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
-2	$-$	$-$
$3-x$	$+$	$-$
	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x\in(-\infty,3)$. Luego, la solución en el intervalo $(-\infty,3)$ es

$$\text{sol}_1 : x\in(-\infty,3)\bigcap(-\infty,3)=(-\infty,3) \iff \boxed{\text{sol}_1 : x\in(-\infty,3)\,.}$$

Caso II : Intervalo $[3,4]$. La desigualdad

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1}<1, \qquad \text{se expresa como} \qquad \frac{(x-3)-2}{(4-x)-1}<1,$$

resolvemos,

$$\frac{(x-3)-2}{(4-x)-1}<1 \iff \frac{x-5}{3-x}<1 \iff \frac{x-5}{3-x}-1<0 \iff \frac{x-5-(3-x)}{3-x}<0$$

$$\iff \frac{x-5-3+x}{3-x}<0 \iff \frac{2x-8}{3-x}<0 \iff \frac{2\,(x-4)}{3-x}<0.$$

Por lo tanto, resolver

$$\frac{(x-3)-2}{(4-x)-1}<1 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{2\,(x-4)}{3-x}<0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $2\,(x-4)=0 \iff x-4=0 \iff x=4$
- Denominador : $3-x=0 \iff x=3.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,3)$	$(3,4)$	$(4,\infty)$
$2(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$3-x$	$+$	$-$	$-$
	$-$	$+$	$-$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x \in (-\infty,3)\bigcup(4,\infty)$. Luego, la solución en el intervalo $[3,4]$ es

$$\text{sol}_2 : x \in \Big(\,(-\infty,3)\bigcup(4,\infty)\,\Big)\bigcap[3,4] = \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{sol}_2 : \varnothing.}$$

Caso III : Intervalo $(4,\infty)$. La desigualdad

$$\frac{|x-3|-2}{|4-x|-1} < 1, \qquad \text{se expresa como} \qquad \frac{(x-3)-2}{-(4-x)-1} < 1,$$

resolvemos,

$$\frac{(x-3)-2}{-(4-x)-1} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-5}{-4+x-1} < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-5}{x-5} < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1<0 \quad \text{con} \quad x \neq 5,$$

lo cual es una contradicción, con lo que, la solución de la desigualdad es vacía. Luego, la solución en el intervalo $(4,\infty)$ es

$$\text{sol}_3 : x \in \varnothing\bigcap(4,\infty) = \varnothing \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{sol}_3 : \varnothing.}$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F = \text{sol}_1\bigcup\text{sol}_2\bigcup\text{sol}_3 = (-\infty,3)\bigcup\varnothing\bigcup\varnothing = (-\infty,3) \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-\infty,3)\,.$$

★

Ejemplo 4.22 *: Hallar el conjunto solución de la siguiente inecuación*

$$\left|x^2-16\right| + 2 \leq 1 + |2x|\,.$$

Solución : Por la definición de valor absoluto

$$|x-3| = \begin{cases} x^2-16 & \text{si} \quad x^2-16 \geq 0 \\ -\left(x^2-16\right) & \text{si} \quad x^2-16 < 0 \end{cases}$$

resolvemos una de las desigualdades, $x^2-16 \geq 0$ ó $x^2-16<0$, para conocer para que valores de x se considera la expresión x^2-16 y para cuales se considera la expresión $-\left(x^2-16\right)$. Resolvemos $x^2-16\geq 0$.

Resolver

$$x^2-16 \geq 0 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad (x-4)(x+4) \geq 0.$$

Las raíces de los términos son $(x-4)(x+4)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=4 \quad \text{y} \quad x=-4.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-4)$	$(-4,4)$	$(4,\infty)$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

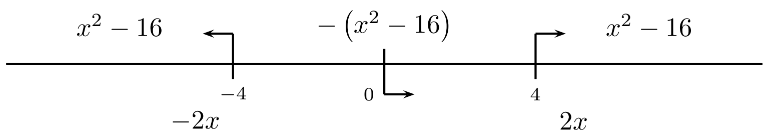
así,

$$|x-3| = \begin{cases} x^2-16 & \text{si} \quad x^2-16 \geq 0 \\ -\left(x^2-16\right) & \text{si} \quad x^2-16 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x^2-16 & \text{si} \quad x \in (-\infty,-4] \bigcup [4,\infty) \\ -\left(x^2-16\right) & \text{si} \quad -4 < x < 4. \end{cases}$$

Por otra parte,

$$|2x| = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad 2x \geq 0 \\ -2x & \text{si} \quad 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -2x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$(-\infty,-4]$	$(-4,0)$	$[0,4)$	$[4,\infty)$
x^2-16	$-\left(x^2-16\right)$	$-\left(x^2-16\right)$	x^2-16
$-2x$	$-2x$	$2x$	$2x$

Caso I : Intervalo $(-\infty,-4)$. La desigualdad

$$\left|x^2-16\right| + 2 \leq 1 + |2x|, \qquad \text{se expresa como} \qquad \left(x^2-16\right) + 2 \leq 1 + (-2x),$$

resolvemos,

$$\left(x^2-16\right) + 2 \leq 1 + (-2x) \iff x^2 - 14 \leq 1 - 2x \iff x^2 + 2x - 15 \leq 0,$$

factorizamos la expresción cuadrática usando la resolvente para $a = 1$, $b = 2$ y $c = -15$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-15)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} \implies \begin{cases} x = \dfrac{-2+8}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x = \dfrac{-2-8}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5, \end{cases}$$

por lo tanto, la expresión cuadrática se factoriza

$$x^2 + 2x - 15 = (x-3)(x+5),$$

así, resolver

$$x^2 + 2x - 15 \leq 0 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad (x-3)(x+5) \leq 0.$$

Las raíces de los términos son $(x-3)(x+5) = 0 \iff x = 3$ y $x = -5$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-5)$	$(-5,3)$	$(3,\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x \in [-5,3]$. Luego, la solución en el intervalo $(-\infty,-4]$ es

$$\text{sol}_1 : x \in [-5,3] \bigcap (-\infty,-4] = [-5,-4] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{sol}_1 : x \in [-5,-4]\,.}$$

Caso II : Intervalo $(-4,0)$. La desigualdad

$$\left|x^2-16\right| + 2 \leq 1 + |2x|\,, \qquad \text{se expresa como} \qquad -\left(x^2-16\right) + 2 \leq 1 + (-2x)\,,$$

resolvemos,

$$-\left(x^2-16\right) + 2 \leq 1 + (-2x) \quad \Longleftrightarrow \quad -x^2+18 \leq 1-2x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leq x^2-2x-17,$$

factorizamos la expresión cuadrática usando la resolvente para $a=1$, $b=-2$ y $c=-17$

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-17)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4+68}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{72}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{36 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{2 \pm 6\sqrt{2}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{2+6\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\left(1+3\sqrt{2}\right)}{2} = 1+3\sqrt{2} \\[2ex] x = \dfrac{2-6\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2\left(1-3\sqrt{2}\right)}{2} = 1-3\sqrt{2}, \end{cases}$$

por lo tanto, la expresión cuadrática se factoriza

$$x^2-2x-17 = \left(x - \left(1+3\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1-3\sqrt{2}\right)\right),$$

así, resolver

$$0 \leq x^2-2x-17 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad 0 \leq \left(x - \left(1+3\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1-3\sqrt{2}\right)\right).$$

Las raíces de los términos son

$$\left(x - \left(1+3\sqrt{2}\right)\right)\left(x - \left(1-3\sqrt{2}\right)\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1+3\sqrt{2} \quad \text{y} \quad x = 1-3\sqrt{2}.$$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, 1-3\sqrt{2}\right)$	$\left(1-3\sqrt{2}, 1+3\sqrt{2}\right)$	$\left(1+3\sqrt{2}, \infty\right)$
$\left(x-\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)$	$-$	$-$	$+$
$\left(x-\left(1-3\sqrt{2}\right)\right)$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x \in \left(-\infty, 1-3\sqrt{2}\right] \bigcup \left[1+3\sqrt{2}, \infty\right)$. Luego, la solución en el intervalo $(-4,0)$ es

$$\text{sol}_2 : x \in \left(\left(-\infty, 1-3\sqrt{2}\right] \bigcup \left[1+3\sqrt{2}, \infty\right) \right) \bigcap (-4,0) = \left[1-3\sqrt{2}, 0\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\text{sol}_2 : x \in \left[1-3\sqrt{2}, 0\right).}$$

Caso III : Intervalo $[0,4)$. La desigualdad

$$\left|x^2-16\right| + 2 \leq 1 + |2x|\,, \qquad \text{se expresa como} \qquad -\left(x^2-16\right) + 2 \leq 1 + (2x)\,,$$

resolvemos,

$$-\left(x^2-16\right)+2\leq 1+(2x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -x^2+18\leq 1+2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0\leq x^2+2x-17,$$

factorizamos la expresión cuadrática usando la resolvente para $a=1$, $b=2$ y $c=-17$

$$x=\frac{-(2)\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-17)}}{2(1)}=\frac{-2\pm\sqrt{4+68}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{72}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{36\cdot 2}}{2}$$

$$=\frac{-2\pm 6\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x=\dfrac{-2+6\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\left(-1+3\sqrt{2}\right)}{2}=-1+3\sqrt{2} \\ \\ x=\dfrac{-2-6\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\left(-1-3\sqrt{2}\right)}{2}=-1-3\sqrt{2}, \end{cases}$$

por lo tanto, la expresión cuadrática se factoriza

$$x^2-2x-17=\left(x-\left(3\sqrt{2}-1\right)\right)\left(x+\left(1+3\sqrt{2}\right)\right),$$

así, resolver

$$0\leq x^2+2x-17 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad 0\leq\left(x-\left(3\sqrt{2}-1\right)\right)\left(x+\left(1+3\sqrt{2}\right)\right).$$

Las raíces de los términos son

$$\left(x-\left(3\sqrt{2}-1\right)\right)\left(x+\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=3\sqrt{2}-1 \quad \text{y} \quad x=-1-3\sqrt{2}.$$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,-1-3\sqrt{2}\right)$	$\left(-1-3\sqrt{2},3\sqrt{2}-1\right)$	$\left(3\sqrt{2}-1,\infty\right)$
$\left(x-\left(3\sqrt{2}-1\right)\right)$	$-$	$-$	$+$
$\left(x+\left(1+3\sqrt{2}\right)\right)$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x\in\left(-\infty,-1-3\sqrt{2}\right]\bigcup\left[3\sqrt{2}-1,\infty\right)$. Luego, la solución en el intervalo $[0,4)$ es

$$\text{sol}_3: x\in\left(\left(-\infty,-1-3\sqrt{2}\right]\bigcup\left[3\sqrt{2}-1,\infty\right)\right)\bigcap[0,4)=\left[0,3\sqrt{2}-1\right] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\text{sol}_3: x\in\left[0,3\sqrt{2}-1\right].}$$

Caso IV : Intervalo $[4,\infty)$. La desigualdad

$$\left|x^2-16\right|+2\leq 1+|2x|, \qquad \text{se expresa como} \qquad \left(x^2-16\right)+2\leq 1+(2x),$$

resolvemos,

$$\left(x^2-16\right)+2\leq 1+(2x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-14\leq 1+2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2-2x-15\leq 0,$$

factorizamos la expresión cuadrática usando la resolvente para $a=1$, $b=-2$ y $c=-15$

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-15)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{64}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x=\dfrac{2+8}{2}=\dfrac{10}{2}=5 \\ \\ x=\dfrac{2-8}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3, \end{cases}$$

por lo tanto, la expresión cuadrática se factoriza

$$x^2 - 2x - 15 = (x+3)(x-5),$$

así, resolver

$$x^2 - 2x - 15 \leq 0 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad (x+3)(x-5) \leq 0.$$

Las raíces de los términos son $(x+3)(x-5) = 0 \iff x = -3$ y $x = 5$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 5)$	$(5, \infty)$
$x-5$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad viene dada por $x \in [-3, 5]$. Luego, la solución en el intervalo $[4, \infty)$ es

$$\text{sol}_4 : x \in [-3, 5] \bigcap [4, \infty) = [4, 5] \qquad \iff \qquad \boxed{\text{sol}_4 : x \in [4, 5].}$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 \bigcup \text{sol}_3 \bigcup \text{sol}_4 = [-5, -4] \bigcup \left[1 - 3\sqrt{2}, 0\right) \bigcup \left[0, 3\sqrt{2} - 1\right] \bigcup [4, 5],$$

es decir,

$$x \in [-5, -4] \bigcup \left[1 - 3\sqrt{2}, 3\sqrt{2} - 1\right] \bigcup [4, 5]$$

★

Ejemplo 4.23 *: Resolver* $\quad ||x+1| + |x-2| + 1| \leq x.$

Solución : Observemos, en primer lugar, que la expresión

$$|x+1| + |x-2| + 1$$

siempre es mayor que cero, así, la desigualdad nos queda

$$|x+1| + |x-2| + 1 \leq x.$$

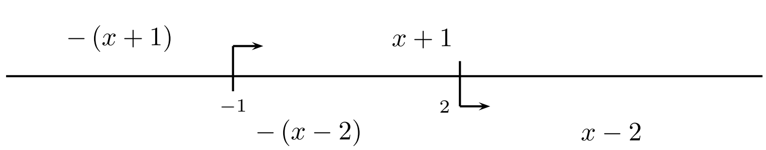
Por la definición de valor absoluto

$$|x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x+1 \geq 0 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x+1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x+1 & \text{si} \quad x \geq -1 \\ -(x+1) & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$$

y

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2 & \text{si} \quad x \geq 2 \\ -(x-2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$(-\infty,-1)$	$[-1,2)$	$[2,\infty)$
$-(x+1)$	$x+1$	$x+1$
$-(x-2)$	$-(x-2)$	$x-2$

Caso I : Intervalo $(-\infty,-1)$. La desigualdad

$$|x+1|+|x-2|+1\leq x, \qquad \text{se expresa como} \qquad -(x+1)-(x-2)\leq x-1,$$

resolvemos,

$$-(x+1)-(x-2)\leq x-1 \iff -3x\leq -2 \iff x\geq \frac{2}{3},$$

entonces,

$$\text{sol}_1=\left[\frac{2}{3},\infty\right)\bigcap(-\infty,-1)=\varnothing \iff \boxed{\text{sol}_1:\varnothing.}$$

Caso II : Intervalo $[-1,2)$. La desigualdad

$$|x+1|+|x-2|+1\leq x, \qquad \text{se expresa como} \qquad (x+1)-(x-2)\leq x-1,$$

resolvemos,

$$x+1-(x-2)\leq x-1 \iff 3\leq x-1 \iff 4\leq x,$$

entonces,

$$\text{sol}_2=(4,\infty]\bigcap[-1,2)=\varnothing \iff \boxed{\text{sol}_2:\varnothing.}$$

Caso III : Intervalo $[2,\infty)$. La desigualdad

$$|x+1|+|x-2|+1\leq x, \qquad \text{se expresa como} \qquad (x+1)+(x-2)\leq x-1,$$

resolvemos,

$$(x+1)+(x-2)\leq x-1 \iff 2x-1\leq x-1 \iff x\leq 0 \iff x\in(-\infty,0],$$

entonces,

$$\text{sol}_3=(-\infty,0]\bigcap[2,\infty)=\varnothing \iff \boxed{\text{sol}_3:\varnothing.}$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F=\text{sol}_1\bigcup\text{sol}_2\bigcup\text{sol}_3=\varnothing\bigcup\varnothing\bigcup\varnothing=\varnothing.$$

★

Ejemplo 4.24 *: Resolver* $-x(x-1)^2|x-3|\geq 0.$

Solución : Es conocido que el producto de dos términos es mayor a cero, cuando los términos tienen el mismo signo y es igual a cero cuando uno, al menos uno, de los términos es igual a cero, así,

$$-x(x-1)^2|x-3|>0 \iff -x,\ (x-1)^2|x-3| \quad \text{tienen el mismo signo}$$

y

$$-x(x-1)^2|x-3|=0 \iff -x=0 \quad \text{ó} \quad (x-1)^2=0 \quad \text{ó} \quad |x-3|=0.$$

Comenzamos con el caso que sea positivo. Observemos que la expresión $(x-1)^2|x-3|$ es mayor que cero, por ser el producto de dos términos positivos, así, la desigualdad $-x(x-1)^2|x-3| > 0$, solo se cumplirá cuando

$$-x > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0)$$

Estudiemos el caso de la igualdad a cero. Resolviendo cada igualdad que se desprenden de este caso, obtenemos

- $-x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$
- $(x-1)^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1.$
- $|x-3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 3.$

Luego, la solución a la desigualdad dada es

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup \{0, 1, 3\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (-\infty, 0] \bigcup \{1, 3\}.$$

$\bigstar$

Ejemplo 4.25 *: Resolver* $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} \leq 0.$

Solución : Buscamos los valores $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la desigualdad se cumple, siempre y cuando

$$\left|2-x^2\right| + 1 \neq 0,$$

lo cual es para todo los números reales, pues dicha expresión nunca será iguala cero, ya que siempre es positiva, por ser la suma de expresiones positivas.

Es conocido que el cociente de dos términos es menor a cero, cuando el término del numerador tiene signo contrario al término del denominador y es igual a cero cuando el términos del numerador es igual a cero, siempre y cuando esos valores no anulen al denominador, así,

$$\frac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|2-x^2\right|(x+2)(x-4), \quad \left|2-x^2\right|+1 \quad \text{tienen signos contrario.}$$

ó

$$\frac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|2-x^2\right|(x+2)(x-4) = 0, \quad \text{siempre y cuando} \quad \left|2-x^2\right|+1 \neq 0.$$

1. Resolvemos la inecuación $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} < 0.$

   Observemos que el término del denominador es un término positivo, por ser la suma de expresiones positivas, así, puesto que, esta desigualdad será verdadera cuando los términos del numerador y del denominador tengan signos contrario, se tiene que, el término del numerador debe ser negativo, es decir,

   $$\frac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|2-x^2\right|(x+2)(x-4) < 0,$$

   es conocido que el producto de dos términos es menor que cero, cuando los términos tienen signos contrario, así,

   $$\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left|2-x^2\right|, \quad (x+2)(x-4) \quad \text{tienen signos contrario,}$$

   pero, $\left|2-x^2\right|$ es positivo, por ser un valor absoluto, por lo tanto,

   $$\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x+2)(x-4) < 0,$$

Las raíces de los términos son $(x+2)(x-4)=0 \iff x=-2$ y $x=4$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-2)$	$(-2,4)$	$(4,\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad $(x+2)(x-4)<0$ viene dada por $x\in(-2,4)$.

Luego, la solución de la desigualdad $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1}<0$ es $x\in(-2,4)$.

2. Resolvemos la ecuación $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1}=0.$

   Puesto que, un cociente es igual a cero cuando el términos del numerador es igual a cero, siempre y cuando esos valores no anulen al denominador, se tiene

$$\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)=0, \quad \text{siempre y cuando} \quad \left|2-x^2\right|+1\neq 0,$$

   como, $\left|2-x^2\right|+1$ siempre positivo, por ser suma de expresiones positivas, se tiene que siempre en diferente de cero. Luego,

$$\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)=0 \quad\iff\quad \left|2-x^2\right|=0, \quad x+2=0 \quad \text{y} \quad x-4=0,$$

   donde

   - $\left|2-x^2\right|=0 \iff 2-x^2=0 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}.$
   - $x+2=0 \iff x=-2.$
   - $x-4=0 \iff x=4.$

   Luego, las soluciones de la ecuación $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1}=0$ son $x=\pm\sqrt{2}$, $x=-2$ y $x=4$.

Finalmente, la solución de la desigualdad $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1}\leq 0$ es

$$x\in(-2,4)\bigcup\left\{\pm\sqrt{2},-2,4\right\} \qquad\Longrightarrow\qquad x\in[-2,4]\bigcup\left\{\pm\sqrt{2}\right\}.$$

★

Ejemplo 4.26 *: Estudiar el signo de la expresión* $|x|^2+|x|-2$.

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$|x|^2+|x|-2>0 \qquad \text{ó} \qquad |x|^2+|x|-2<0.$$

Consideremos la primera desigualdad, $|x|^2+|x|-2>0$.

Observemos que $|x|^2+|x|-2$ es una expresión cuadrática en variable $|x|$, así, que factorizamos la expresión aplicando la resolvente para $a=1$, $b=1$ y $c=-2$

$$|x|=\frac{-(1)\pm\sqrt{(1)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} |x|=\dfrac{-1-3}{2}=-2 \\[2mm] |x|=\dfrac{-1+3}{2}=1 \end{cases}$$

con lo que, la factorización es

$$|x|^2 + |x| - 2 = (|x| + 2)(|x| - 1),$$

luego, como $|x| + 2 > 0$

$$|x|^2 + |x| - 2 > 0 \iff (|x| + 2)(|x| - 1) > 0 \iff |x| - 1 > 0 \iff |x| > 1,$$

es decir,

$$x > 1 \qquad \text{o} \qquad x < -1$$

por lo que, la expresión $|x|^2 + |x| - 2$ es mayor que cero si $x \in (-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$.

Por otro lado,

$$|x|^2 + |x| - 2 < 0 \iff (|x| + 2)(|x| - 1) < 0 \iff |x| - 1 < 0 \iff |x| < 1,$$

es decir, $-1 < x < 1$ y concluimos que, $|x|^2 + |x| - 2 < 0$ si $x \in (-1, 1)$.

Luego,

$$|x|^2 + |x| - 2 \ : \ \begin{cases} \text{Positiva si : } x \in (-\infty, -1) \bigcup (1, \infty). \\ \\ \text{Negativa si : } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

★

Ejemplo 4.27 *: Estudiar el signo de la expresión* $\dfrac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2}$.

Solución : Para conocer el signo de la expresión se debe resolver una de las siguientes desigualdades

$$\frac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} > 0 \qquad \text{ó} \qquad \frac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} < 0.$$

Consideremos la primera desigualdad, $\dfrac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} > 0$.

Observemos que la expresión puede ser escrita, por propiedad del valor absoluto, como

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Propiedad del valor absoluto}\\ x^2 = |x|^2\end{array}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} = \frac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|\,|x|^2} = \frac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3}.$$

Así, resolver

$$\frac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} > 0, \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} > 0.$$

Observemos que, el numerador $7|x| - 2|x|^2 - 3$ es una expresión cuadrática en variable $|x|$, así, que factorizamos la expresión aplicando la resolvente para $a = -2$, $b = 7$ y $c = -3$

$$|x| = \frac{-(7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4(-2)(-3)}}{2(-2)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-4} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-4} = \frac{-7 \pm 5}{-4} \implies \begin{cases} |x| = \dfrac{-7-5}{-4} = 3 \\ \\ |x| = \dfrac{-7+5}{-4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

con lo que, la factorización es

$$7|x| - 2|x|^2 - 3 = -2\left(|x| - \frac{1}{2}\right)(|x| - 3) = \left((-2)|x| - (-2)\frac{1}{2}\right)(|x| - 3) = (1 - 2|x|)(|x| - 3),$$

es decir,

$$7|x| - 2|x|^2 - 3 = (1 - 2|x|)(|x| - 3),$$

mientras que, la expresión del denominador es de la forma

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right),$$

así,

$$8 - |x|^3 = 2^3 - |x|^3 = (2 - |x|)\left(2^2 + 2|x| + |x|^2\right) = (2 - |x|)\left(4 + 2|x| + |x|^2\right),$$

por lo tanto,

$$\frac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} = \frac{(1 - 2|x|)(|x| - 3)}{(2 - |x|)\left(4 + 2|x| + |x|^2\right)}.$$

Entonces, resolver la desigualdad

$$\frac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} > 0 \qquad \text{es equivalente a resolver} \qquad \frac{(1 - 2|x|)(|x| - 3)}{(2 - |x|)\left(4 + 2|x| + |x|^2\right)} > 0.$$

Las raíces de los términos son

- Numerador : $(1 - 2|x|)(|x| - 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = \dfrac{1}{2} \quad \text{y} \quad |x| = 3.$
- Denominador : $(2 - |x|)\left(4 + 2|x| + |x|^2\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| = 2.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, 2\right)$	$(2,3)$	$(3,\infty)$
$1 - 2\|x\|$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\|x\| - 3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2 - \|x\|$	$+$	$+$	$-$	$-$
$4 + 2\|x\| + \|x\|^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

de aquí, la solución de la desigualdad $\dfrac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} > 0$ viene dada por

$$|x| \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \bigcup (3, \infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} < |x| < 2 \qquad \text{ó} \qquad 3 < |x|,$$

mientras que, la solución de la desigualdad $\dfrac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} < 0$ viene dada por

$$|x| \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \bigcup (2, 3) \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x| < \frac{1}{2} \qquad \text{ó} \qquad 2 < |x| < 3.$$

Resolvemos estas desigualdades con valor absoluto. Consideremos las desigualdades

$$\frac{1}{2} < |x| < 2 \qquad \text{ó} \qquad 3 < |x|.$$

1. Para la desigualdad $\dfrac{1}{2} < |x| < 2$. Resolvemos las desigualdades

$$\frac{1}{2} < |x| \qquad \text{y} \qquad |x| < 2$$

y luego se intersectan las soluciones.

(a) Para la desigualdad $\dfrac{1}{2} < |x|$. Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$\frac{1}{2} < x \qquad \text{ó} \qquad -\frac{1}{2} > x \qquad \Longrightarrow \qquad x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \infty\right).$$

(b) Para la desigualdad $|x| < 2$. Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$|x| < 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -2 < x < 2 \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-2, 2).$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $\dfrac{1}{2} < |x| < 2$ es

$$\text{sol}_1 = \left(\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, \infty\right) \right) \bigcap (-2, 2) = \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, 2\right).$$

2. Para la desigualdad $3 < |x|$. Por definición de valor absoluto, se tiene que

$$3 < x \qquad \text{ó} \qquad -3 > x \qquad \Longrightarrow \qquad x \in (-\infty, -3) \bigcup (3, \infty).$$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad $3 < |x|$ es

$$\text{sol}_2 = (-\infty, -3) \bigcup (3, \infty).$$

De aquí, la solución de $\dfrac{1}{2} < |x| < 2$ ó $3 < |x|$, viene dada por

$$\text{sol} = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 = \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \bigcup (-\infty, -3) \bigcup (3, \infty).$$

Así, concluimos que

1. La solución de la desigualdad $\dfrac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} > 0$ es

$$x \in (-\infty, -3) \bigcup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \bigcup (3, \infty).$$

2. La solución de la desigualdad $\dfrac{7|x| - 2|x|^2 - 3}{8 - |x|^3} < 0$ es

$$x \in (-3, -2) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bigcup (2, 3).$$

Luego,

$$\frac{7|x| - 2x^2 - 3}{8 - |x|\, x^2} = \begin{cases} \text{Positiva si}: \ x \in (-\infty, -3) \cup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \cup (3, \infty). \\ \\ \text{Negativa si}: \ x \in (-3, -2) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup (2, 3). \end{cases}$$

★

Ejemplo 4.28 : *Demuestre que si* $|x+2|<0.3$, *entonces,* $|4x+8|<1.2$.

Demostración : Observemos que la expresión $|4x+8|$ está relacionada con $|x+2|$, por medio de la siguiente igualdad

$$|4x+8| = |4(x+2)| = |4|\ |x+2| = 4|x+2|,$$

como $|x+2|<0.3$, entonces

$$4|x+2| < (4)(0.3) \qquad \Longrightarrow \qquad 4|x+2|<1.2,$$

luego,

$$|4x+8| = 4|x+2| < 1.2 \qquad \Longrightarrow \qquad |4x+8|<1.2.$$

★

Ejemplo 4.29 : *Encuentre* δ *(que dependa de* ε*) de modo que si* $|x+6|<\delta$, *entonces* $|6x+36|<\varepsilon$

Demostración : Observemos que la expresión $|6x+36|$ está relacionada con $|x+6|$, por medio de la siguiente igualdad

$$|6x+36| = |6(x+6)| = |6|\ |x+6| = 6|x+6|,$$

como $|x+6|<\delta$, entonces

$$6|x+6| < (6)\,\delta \qquad \Longrightarrow \qquad 6|x+6|<6\delta,$$

luego,

$$|6x+36| = 6|x+6| < 6\delta \qquad \Longrightarrow \qquad |6x+36|<6\delta,$$

por lo tanto, $\varepsilon = 6\delta$. ★

Ejemplo 4.30 : *Demuestre que*

$$|x|\leq 2 \qquad \textit{implica que} \qquad \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$$

Demostración : Por propiedades de valor absoluto

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{\left|x^2+1\right|},$$

como, x^2+1 es una expresión positiva, tenemos que

$$\left|x^2+1\right| = x^2+1,$$

así,

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{\left|x^2+1\right|} = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{x^2+1}.$$

Por otro lado

$$x^2+1\geq 1 \qquad \longleftarrow \qquad \text{¿Por qué?},$$

aplicamos $\dfrac{1}{(\cdot)}$ a la desigualdad, como esta aplicación cambia desigualdades (ver ejercicio 13), obtenemos

$$x^2+1\geq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{x^2+1}\leq 1,$$

así,

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| = \frac{\left|x^2+2x+7\right|}{x^2+1} \leq \left|x^2+2x+7\right|,$$

por desigualdad triangular

$$\left|x^2+2x+7\right| \leq \left|x^2\right| + |2x| + 7 = x^2 + 2|x| + 7, \qquad \text{es decir,} \qquad \left|x^2+2x+7\right| \leq x^2+2|x|+7,$$

del hecho que $|x| \leq 2$, se concluye que

$$\left|x^2+2x+7\right| \leq x^2+2|x|+7 \leq 4+2(2)+7 = 15.$$

Luego,

$$\left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq \left|x^2+2x+7\right| \leq 15, \qquad \text{es decir,} \qquad \left|\frac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15.$$

★

Ejercicios

1. Escribir la definición de valor absoluto para cada expresión dada y haga un esquema indicando como se divide la recta real con cada expresión

   1. $|3x-4|$ 2. $|2x+5|$ 3. $\left|x^2-5\right|$ 4. $\left|3+x^2\right|$ 5. $\left|\dfrac{x}{x^2-1}\right|$ 6. $\left|\dfrac{x+3}{x^2-2x}\right|$

   7. $\left|\dfrac{x+1}{8-x^3}\right|$ 8. $\left|\dfrac{x^3-4x}{(5-x)^3}\right|$ 9. $\left|\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x}\right|$ 10. $\left|\dfrac{-x}{4-x^4}\right|$ 11. $\left|\dfrac{x^4+1}{3-x}\right|$

   12. $\left|\dfrac{x^4-1}{3x}\right|$ 13. $\left|\dfrac{x^4+5x^2+6}{(7-x)^2}\right|$ 14. $\left|\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{1}{2-x}\right|$ 15. $\left|\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{2}{x+1}\right|$

   16. $\left|\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}\right|$

2. Demostrar que si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces $|a^n| = |a|^n$.

3. Demostrar que $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a-b| = |b-a|$.

4. Demuestre que si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a < b$, entonces $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

5. Demuestre que $\sqrt{x} \geq 0$, para todo $x \geq 0$.

6. Demuestre que si $0 < a < b$ entonces $\dfrac{1}{\sqrt{a}} > \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

7. Demuestre que si $a < b$, entonces $\sqrt[3]{a} < \sqrt[3]{b}$.

8. Demuestre que si $a \geq 0$, $b \geq 0$ y $a < b$, entonces $\sqrt[4]{a} < \sqrt[4]{b}$.

9. Demuestre que las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, con $a \neq 0$, son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

10. El número $\dfrac{1}{2}(a+b)$ se llama el **promedio** o **media aritmética** de a y de b. Demuestre que la media aritmética de dos números está entre los dos números, es decir, demuestre que

$$a < b \qquad \text{implica que} \qquad a < \frac{a+b}{2} < b.$$

11. El número $\sqrt{ab}$ se llama la **media geométrica** de dos números positivos a y b. Pruebe que

$$a < b \qquad \text{implica que} \qquad a < \sqrt{ab} < b$$

12. Para dos números positivos a y b. Demuestre que

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)$$

Esta es la versión más sencilla de una famosa desigualdad llamada **desigualdad de la media aritmética y la regla geométrica**.

13. Marque con una X la opción correcta según lo demostrado en los ejercicios del 15 al 24 de la Guía 2 y en los ejercicios 4, 6 y 7 de esta Guía 4

Comportamiento de la desigualdad

Aplicación	Mantiene la desigualdad	Cambia la desigualdad
$m(\ )+b,\ m>0$		
$m(\ )+b,\ m<0$		
$(\ )^2$ para números positivos		
$(\ )^2$ para números negativos		
$(\ )^3$		
$(\ )^4$ para números positivos		
$(\ )^4$ para números negativos		
$\sqrt{(\ )}$		
$\sqrt[3]{(\ )}$		
$\dfrac{1}{(\ )}$		
$\dfrac{1}{(\ )^2}$ para números positivos		
$\dfrac{1}{(\ )^2}$ para números negativos		
$\dfrac{1}{\sqrt{(\ )}}$		
$\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\ )}}$		

14. Responda **VERDADERA** o **FALSA** las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta

(a) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $|a+b| = |a| + |b|$.

(b) Si $a \geq 0$ y $b \geq 0$, entonces $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

(c) Si $|x| \leq a$, entonces $x \in [-a, a]$.
(d) Para todo a y b, se tiene $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$.
(e) Si $a < 0$ y $|x| \leq a$, entonces $x \in [-a, a]$.
(f) Para todo a, b y c, se tiene $|a + b - c| \leq |a| + |b| + |c|$.
(g) Si $a < 0$ y $|x| > a$, entonces x es cualquier número real.

15. Si $1 < x < 7$, demuestre que $\sqrt{3} < \sqrt{x+2} < 3$.
16. Si $-4 \leq x < 2$, demuestre que $1 < \sqrt{3-x} < 3$.
17. Demuestre que $1 \leq \sqrt{x^2+1} < \sqrt{10}$, si $x \in (-3, 1)$.
18. Demuestre que $0 < \sqrt{4 - x^2} \leq 2$, si $|x| < 2$.
19. Si $1 \leq x \leq 5$, demuestre que $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+x}} \leq -\dfrac{\sqrt{30}}{15}$.
20. Si $-1 < x \leq 1$, demuestre que $-1 < \sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{2-x}} \leq 1$.
21. Demuestre que si $x \in [-1, 2]$ entonces $\sqrt{\dfrac{14-3x^2}{x^2+3}} \in \left[\sqrt{\dfrac{2}{7}}, \sqrt{\dfrac{14}{3}}\right]$.
22. Hallar y graficar el conjunto solución en cada caso

1. $\left\|3x^2 - x - 10\right\| = 0$	2. $\left\|x^3 - 2\right\| = -2$	3. $\left\|\dfrac{x^2-4}{x+3}\right\| = 1$	4. $\dfrac{\left\|x^2-2\right\| - x}{x} = 0$
5. $2 - \|8x+3\| = 5$	6. $\left\|\dfrac{3-2x}{2+x}\right\| \leq 4$	7. $\left\|\dfrac{6-5x}{3+x}\right\| \geq \dfrac{1}{2}$	8. $\left\|\dfrac{x^2+3x+4}{x+2}\right\| < 2$
9. $\|3-5x\| \leq 5 - 3x$	10. $\left\|\dfrac{x+1}{x+3}\right\| \geq \dfrac{1}{x}$	11. $\dfrac{\|x-2\|}{x} \leq 0$	12. $\left\|x^2 - x\right\| < \|x+3\|$
13. $\|x+4\| \leq \|2x-6\|$	14. $\left\|\dfrac{3-x}{x+4}\right\| > 9$	15. $\left\|\dfrac{x+1}{x+2}\right\| \leq 4$	16. $\dfrac{\|2x-3\| - x}{x-2} \leq 1$
17. $\|5x-1\| = 2$	18. $\left\|x - x^2\right\| = -1$	19. $\left\|x^2 + x\right\| = 2$	20. $\left\|\dfrac{x+2}{4-x}\right\| = 0$
21. $\left\|\dfrac{7x-2}{4x-5}\right\| = 1$	22. $1 - \left\|x^2 - 3\right\| = 6$	23. $\dfrac{\left\|x^4+x^2+1\right\|}{x^2+4} = -3$	24. $\left\|\dfrac{2x-1}{x+1}\right\| = 3$
25. $\|x-4\| < 1$	26. $\left\|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right\| \leq 4$	27. $\left\|\dfrac{x}{2+x}\right\| < 1$	28. $0 < \|x-5\| < \dfrac{1}{2}$
29. $\|x+5\| \geq 2$	30. $\|2x+1\| > 5$	31. $\|x\| > \|x-1\|$	32. $\left\|1 - \dfrac{6x-2}{x-6}\right\| > 2$
33. $\left\|1 - \dfrac{2}{3}x\right\| < 1$	34. $\left\|\dfrac{x+2}{2x-3}\right\| < 4$	35. $\left\|\dfrac{1}{2}x - 5\right\| > 3$	36. $\|2x-5\| \leq \|x+4\|$
37. $1 \leq \|x\| \leq 4$	38. $\left\|x^3+1\right\| < -3$	39. $\dfrac{\|x+3\|}{\|6-5x\|} \leq 2$	40. $\|3x-6\| \leq \|4x+3\|$
41. $\left\|\dfrac{x-1}{2-x}\right\| \geq 1$	42. $\|x-2b\| < x+b$	43. $\left\|\dfrac{x-1}{2-x}\right\| < 1$	44. $\left\|x^{10} - x\right\| < -10$
45. $\left\|\dfrac{x-3}{x+5}\right\| \leq 1$	46. $\|x-1\| < \|x+4\|$	47. $\dfrac{\|2x-5\|}{\|x-6\|} \geq 3$	48. $\left\|x^2 - 2x - 4\right\| > 4$

49. $\left|\dfrac{-2x^2-4x-2}{x^2+x-2}\right| \leq 1$ 50. $\dfrac{x}{|x|} \geq -1$ 51. $\dfrac{|3x+2|-x}{2x+5} \leq 1$ 52. $\dfrac{\left|x^2+x+1\right|}{5x-1} < 0$

53. $|2x+4|-|x-1| \leq 4$ 54. $|x-3|+2|x| < 5$ 55. $\dfrac{1}{|x|} < 1$ 56. $\dfrac{\left|9-x^2\right|+9}{|3x|} > 1$

57. $|1-2x| \leq 2+|x|$ 58. $|x+2|+|x-2| \leq 12$ 59. $|x+2a| > |2x-a|, \quad a > 0$

60. $\left|\dfrac{2x}{x+1}-\dfrac{x+1}{2x}\right| > \dfrac{3}{2}$ 61. $\left|2x^2-2\right| \geq \dfrac{1}{3}x-1$ 62. $2-\left|4x^2+x-9\right| \leq 5$

63. $2-\left|4x^2+x-9\right| > 5$ 64. $\left|x^2-3x-5\right| \geq \left|x^2+6\right|$ 65. $|2x-9|+|x-2| < |x+1|$

66. $\dfrac{3}{|x-2|} > \dfrac{2}{|x|}$ 67. $3|x| > 2|x-2|$ 68. $||x+1|+|x-2|+1| \leq x$

69. $-x(x-1)^2|x-3| \geq 0$ 70. $2-\left|4x^2+x-9\right| < 5$ 71. $(x+2)|x+2|+3x \leq 0$

72. $\dfrac{|x-3|-2}{|4-x|-1} < 1$ 73. $\dfrac{5-|2x-1|}{|2-x|-5} < 2$ 74. $\dfrac{|x-2|-x}{|4x+3|-x} < 3$ 75. $\left|\dfrac{x^2-2}{x}\right| \geq x-3$

76. $\left|x^2-16\right|+2 \leq 1+|2x|$ 77. $||x+1|+|x-2|-1| \leq x+1$ 78. $2-\left|4x^2+x-9\right| \geq 5$

79. $||x+1|-|x-2|-1| \leq x+1$ 80. $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|+1} \leq 0$ 81. $\dfrac{\left|-x^3\right|\left(x^3-1\right)}{|6-x^2|+8} \leq 0$

82. $\dfrac{\left|2-x^2\right|(x+2)(x-4)}{|2-x^2|-1} \leq 0$

23. Resuelva las siguientes desigualdades

1. $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} < 0$ 2. $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} \leq 0$ 3. $\dfrac{5x-1}{|2x^2-x-3|} \leq 0$ 4. $\left|\dfrac{2x^2-x-3}{5x-1}\right| \leq 0$

5. $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} > 0$ 6. $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} \geq 0$ 7. $\dfrac{5x-1}{|2x^2-x-3|} \geq 0$ 8. $\left|\dfrac{2x^2-x-3}{5x-1}\right| \geq 0$

9. $\dfrac{|3x+2|+|x|}{2x+5} < 0$ 10. $\dfrac{|3x+2|+|x|}{2x+5} \leq 0$ 11. $\dfrac{2x+5}{|3x+2|+|x|} \leq 0$ 12. $\left|\dfrac{3x+2+|x|}{2x+5}\right| \leq 0$

13. $\dfrac{|3x+2|+|x|}{2x+5} > 0$ 14. $\dfrac{|3x+2|+|x|}{2x+5} \geq 0$ 15. $\dfrac{2x+5}{|3x+2|+|x|} \geq 0$ 16. $\left|\dfrac{3x+2+|x|}{2x+5}\right| \geq 0$

24. Resuelva las siguientes desigualdades

1. $(x-3)^2 < 9$ 2. $(x+1)^2 \leq 4$ 3. $(2x+5)^2 > 1$ 4. $(2-3x)^2 \geq 49$

5. $\left(\dfrac{x+4}{x^2-1}\right)^2 > 4$ 6. $\left(\dfrac{3-x}{2x+7}\right)^2 \leq 9$ 7. $\left(\dfrac{3x-4}{x-7}\right)^2 < 1$ 8. $\left(\dfrac{x-4}{2-x^2}\right)^2 \geq \dfrac{1}{4}$

9. $\left(\dfrac{x+4}{x^2-1}\right)^4 > 16$ 10. $\left(\dfrac{3x-2}{2-6x}\right)^4 < 1$ 11. $\left(\dfrac{2x+1}{5x-2}\right)^4 \leq 16$ 12. $\left(\dfrac{x+7}{3-2x}\right)^4 > 81$

13. $\left(\dfrac{\dfrac{x}{2}+\dfrac{5}{3}}{x-\dfrac{1}{3}}\right)^4 \geq 16$ 14. $\left(\dfrac{x^{-1}+3}{x+1}\right)^4 \leq -1$ 15. $\left(\dfrac{x^{-1}+3}{x+1}\right)^4 \leq 0$

16. $\left(\dfrac{x^{-1}+3}{x+1}\right)^4 < 0$ 17. $\left(\dfrac{x^{-1}+3}{x+1}\right)^4 \geq 0$ 18. $\left(\dfrac{x^{-1}+3}{x+1}\right)^4 > 0$

19. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\right)^4 \leq -4$ 20. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\right)^4 \leq 0$ 21. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\right)^4 < 0$

22. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\right)^4 \geq 0$ 23. $\left(\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-1}\right)^4 > 0$ 24. $\left(\dfrac{x^3-3x}{3x^2-10x+3}\right)^4 \leq -6$

25. $\left(\dfrac{x^3-3x}{3x^2-10x+3}\right)^4 \leq 0$ 26. $\left(\dfrac{x^3-3x}{3x^2-10x+3}\right)^4 < 0$ 27. $\left(\dfrac{x^3-3x}{3x^2-10x+3}\right)^4 \geq 0$

28. $\left(\dfrac{x^3-3x}{3x^2-10x+3}\right)^4 > 0$ 29. $\left(\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x+1}\right)^4 \leq -5$ 30. $\left(\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x+1}\right)^4 \leq 0$

31. $\left(\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x+1}\right)^4 < 0$ 32. $\left(\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x+1}\right)^4 \geq 0$ 33. $\left(\dfrac{x^3-7x+6}{x^2+x+1}\right)^4 > 0$

34. $\left(\dfrac{64x^3+27}{x^4-1}\right)^4 \leq -2$ 35. $\left(\dfrac{64x^3+27}{x^4-1}\right)^4 \leq 0$ 36. $\left(\dfrac{64x^3+27}{x^4-1}\right)^4 < 0$

37. $\left(\dfrac{64x^3+27}{x^4-1}\right)^4 \geq 0$ 38. $\left(\dfrac{64x^3+27}{x^4-1}\right)^4 > 0$ 39. $(x+4)^4 \leq (1-2x)^4$

40. $\left(\dfrac{1}{x}-3\right)^4 \geq (x-2)^4$ 41. $\left(x^2-1\right)^4 < (5-2x)^4$ 42. $\left(\dfrac{5}{x+1}\right)^4 \leq \dfrac{1}{(x-4)^4}$

25. Estudie el signo de la expresión $|x|^2+|x|-2$.

26. Estudiar el signo de la expresión $\dfrac{7|x|-2x^2-3}{4-x^2}$.

27. Estudiar el signo de la expresión $\dfrac{7|x|-2x^2-3}{8-|x|x^2}$.

28. Use la desigualdad triángular para demostrar cada desigualdad

(a) $|a-b| \leq |a|+|b|$ (b) $|a-b| \geq |a|-|b|$ (c) $|a+b+c| \leq |a|+|b|+|c|$

29. Suponga que $|x-2| < 0.01$ y $|y-3| < 0.04$. Demuestre que $|(x+y)-5| < 0.05$.

30. Demuestre que las siguientes implicaciones son verdaderas

1. $|x-3| < 0.5 \implies |5x-15| < 2.5$
2. $|x+2| < 0.3 \implies |4x+8| < 1.2$
3. $|x-2| < \varepsilon/6 \implies |6x-12| < \varepsilon$
4. $|x+4| < \varepsilon/2 \implies |2x+8| < \varepsilon$

31. Encuentre δ (que dependa de ε) de modo que las siguientes implicaciones sean verdaderas

1. $|x-5| < \delta \implies |3x-15| < \varepsilon$
2. $|x-2| < \delta \implies |4x-8| < \varepsilon$
3. $|x+6| < \delta \implies |6x+36| < \varepsilon$
4. $|x+5| < \delta \implies |5x+25| < \varepsilon$

32. Demuestre que si $|x+3| < \dfrac{1}{2}$, entonces $|4x+13| < 3$

33. Use la desigualdad triángular y el hecho que

$$0 < |a| < |b| \qquad \text{implica} \qquad \frac{1}{|b|} < \frac{1}{|a|}$$

para establecer la siguiente cadena de desigualdades

$$\left|\frac{1}{x^2+3} - \frac{1}{|x|+2}\right| \leq \frac{1}{x^2+3} + \frac{1}{|x|+2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

34. Demuestre que si $|x| \leq 2$, entonces, $\left|\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+1}\right| \leq 15$.

35. Demuestre que $\left|\dfrac{x-2}{x^2+9}\right| \leq \dfrac{|x|+2}{9}$.

36. Si $-4 \leq x < 3$, demuestre que $-8 \leq |x| + 3x < 12$.

37. Si $-2 < x \leq 4$, demuestre que $-4 \leq x\,|x| < 16$.

Respuestas: Ejercicios

14.a. Falso; 14.b. Falso; 14.c. Verdadero; 14.d. Falso; 14.e. Falso; 14.f. Verdadero; 14.g. Verdadero;

22.1. $x = -\frac{5}{3}$, $x = 2$; 22.2. $\varnothing$; 22.3. $x = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$, $x = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; 22.4. $x = 1$, $x = 2$; 22.5. $\varnothing$;

22.6. $\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right] \bigcup \left[-\frac{5}{6}, \infty\right)$; 22.7. $(-\infty, -3) \bigcup \left(-3, \frac{9}{11}\right] \bigcup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; 22.8. $(-1, 0)$; 22.9. $[-1, 1]$;

22.10. $(-\infty, 0) \bigcup \left[\sqrt{3}, \infty\right)$; 22.11. $(-\infty, 0) \bigcup \{2\}$; 22.12. $(-1, 3)$; 22.13. $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right] \bigcup [10, \infty)$;

22.14. $\left(-\frac{39}{8}, -\frac{33}{10}\right) \setminus \{-4\}$; 22.15. $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right] \bigcup \left[-\frac{9}{5}, \infty\right)$; 22.16. $\left(-\infty, \frac{5}{4}\right] \bigcup (2, \infty)$; 22.17. $x = -\frac{1}{5}$, $x = \frac{3}{5}$;

22.18. $\varnothing$; 22.19. $x = -2$, $x = 1$; 22.20. $x = -2$; 22.21. $x = 1$, $x = \frac{7}{11}$; 22.22. $\varnothing$; 22.23. $\varnothing$;

22.24. $x = -4$, $x = -\frac{2}{5}$; 22.25. $(3, 5)$; 22.26. $\left(-\infty, -\frac{6}{5}\right] \bigcup \left[-\frac{2}{11}, \infty\right)$; 22.27. $(-1, \infty)$; 22.28. $\left(\frac{9}{2}, \frac{11}{2}\right) - \{5\}$;

22.29. $(-\infty, -7] \bigcup [-3, \infty)$; 22.30. $(-\infty, -3) \bigcup (2, \infty)$; 22.31. $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 22.32. $\left(-\infty, -\frac{16}{3}\right) \bigcup \left(\frac{8}{7}, 6\right) \bigcup (6, \infty)$;

22.33. $(0, 3)$; 22.34. $\left(-\infty, \frac{10}{9}\right) \bigcup (2, \infty)$; 22.35. $(-\infty, 4) \bigcup (16, \infty)$; 22.36. $\left[\frac{1}{3}, 9\right]$; 22.37. $[-4, -1] \bigcup [1, 4]$;

22.38. $\varnothing$; 22.39. $\left(-\infty, \frac{9}{11}\right] \bigcup \left[\frac{5}{3}, \infty\right)$; 22.40. $(-\infty, -9] \bigcup \left[\frac{3}{7}, \infty\right)$; 22.41. $\left[\frac{3}{2}, 2\right) \bigcup (2, \infty)$;

22.42. Si $b > 0 : \left(\frac{b}{2}, \infty\right)$, Si $b \leq 0 : \varnothing$; 22.43. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$; 22.44. $\varnothing$; 22.45. $[-1, \infty)$; 22.46. $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$;

22.47. $\left[\frac{23}{5}, 6\right) \bigcup (6, 13]$; 22.48. $(-\infty, -2) \bigcup (0, 2) \cup (4, \infty)$; 22.49. $\left[-\frac{5}{3}, 0\right]$; 22.50. $\mathbb{R} - \{0\}$;

22.51. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \bigcup \left[-\frac{7}{6}, \infty\right)$; 22.52. $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$; 22.53. $\left[-9, \frac{1}{3}\right]$; 22.54. $\left(-\frac{2}{3}, 2\right)$; 22.55. $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$;

22.56. $\mathbb{R} - \{-3, 0, 3\}$; 22.57. $[-1, 3]$; 22.58. $[-6, 6]$; 22.59. $\left(-\frac{a}{3}, 3a\right)$ 22.60. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{3}\right) - \{-1, 0\}$;

22.61. $\mathbb{R}$; 22.62. $\mathbb{R}$; 22.63. $\varnothing$; 22.64. $\left(-\infty, -\frac{11}{3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; 22.65. $(3, 6)$; 22.66. $(-\infty, -4) \bigcup \left(\frac{4}{5}, 2\right) \bigcup (2, \infty)$;

22.67. $(-\infty, -4) \bigcup \left(\frac{4}{5}, \infty\right)$; 22.68. $\varnothing$; 22.69. $(-\infty, 0] \bigcup \{1, 3\}$; 22.70. $\mathbb{R}$; 22.71. $\left(-\infty, \frac{\sqrt{33}-7}{2}\right]$;

22.72. $(-\infty, 3)$; 22.73. $(-\infty, -3) \bigcup \left(-\frac{5}{2}, 5\right) \bigcup (7, \infty)$; 22.74. $\left(-\infty, -\frac{11}{13}\right) \bigcup \left(-\frac{7}{11}, \infty\right)$; 22.75. $\mathbb{R} - \{0\}$;

22.76. $\left[-5, -3\sqrt{2}+1\right] \bigcup \left[3\sqrt{2}-1, 5\right]$; 22.77. $[1, 3]$; 22.78. $\varnothing$; 22.79. $\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$; 22.80. $[-2, 4] \bigcup \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$;

22.81. $(-\infty, 1]$; 22.82. $\left[-2, -\sqrt{3}\right) \bigcup (-1, 1) \bigcup \left(\sqrt{3}, 4\right]$; 23.1. $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) - \{-1\}$; 23.2. $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

23.3. $\left(-\infty, \frac{1}{5}\right] - \{-1\}$; 23.4. $x = \frac{3}{2}$, $x = -1$; 23.5. $\left(\frac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$; 23.6. $\left(\frac{1}{5}, \infty\right) \cup \{-1\}$; 23.7. $\left[\frac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}$;

23.8. $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{5}\right\}$; 23.9. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$; 23.10. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$; 23.11. $\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right]$; 23.12. $x = -\frac{1}{2}$, $x = -1$;

23.13. $\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$; 23.14. $\left(-\frac{5}{2}, \infty\right)$; 23.15. $\left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$; 23.16. $\mathbb{R} - \left\{-\frac{5}{2}\right\}$; 24.1. $(0, 6)$; 24.2. $[-3, 1]$;

24.3. $(-\infty, -3) \bigcup (-2, \infty)$; 24.4. $\left(-\infty, -\frac{5}{3}\right] \bigcup [3, \infty)$; 24.5. $\left(-\frac{3}{2}, 2\right) \setminus \{\pm 1\}$; 24.6. $\left(-\infty, -\frac{24}{5}\right] \bigcup \left[-\frac{18}{7}, \infty\right)$;

24.7. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{11}{4}\right)$; 24.8. $\left[-\sqrt{11}-1, \sqrt{11}-1\right] \setminus \left\{\pm\sqrt{2}\right\}$; 24.9. $\left(-\frac{3}{2}, 2\right) \setminus \{\pm 1\}$; 24.10. $(-\infty, 0) \bigcup \left(\frac{4}{9}, \infty\right)$;

24.11. $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right] \bigcup \left[\frac{5}{8}, \infty\right)$; 24.12. $\left(\frac{2}{7}, \frac{3}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3}{2}, \frac{16}{5}\right)$; 24.13. $\left[-\frac{2}{5}, \frac{14}{9}\right] \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$; 24.14. $\varnothing$; 24.15. $x = -\frac{1}{3}$;

24.16. $\varnothing$; 24.17. $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$; 24.18. $\mathbb{R} \setminus \left\{-1, -\frac{1}{3}, 0\right\}$; 24.19. $\varnothing$; 24.20. $x = -3$, $x = -2$; 24.21. $\varnothing$;

24.22. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$; 24.23. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1, -3, -2\}$; 24.24. $\varnothing$; 24.25. $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$, $x = \sqrt{3}$; 24.26. $\varnothing$;

24.27. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$; 24.28. $\mathbb{R} \setminus \left\{0, \frac{1}{3}, 3, \pm\sqrt{3}\right\}$; 24.29. $\varnothing$; 24.30. $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$; 24.31. $\varnothing$;

24.32. $\mathbb{R}$; 24.33. $\mathbb{R} \setminus \{-3, 1, 2\}$; 24.34. $\varnothing$; 24.35. $x = -\frac{3}{4}$; 24.36. $\varnothing$; 24.37. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$;

24.38. $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4}, \pm 1\right\}$; 24.39. $(-\infty, -1] \bigcup [5, \infty)$; 24.40. $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) \bigcup \left(0, \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right] \bigcup \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{5+\sqrt{21}}{2}\right]$;

24.41. $\left(-\sqrt{7}-1, \sqrt{7}-1\right)$; 24.42. $\left(4, \frac{21}{4}\right] \bigcup \left[\frac{19}{6}, 4\right)$; 25. Pos. $(-\infty, -1) \bigcup (1, \infty)$, Neg. $(-1, 1)$;

26. Pos. $(-\infty, -3) \bigcup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \bigcup (3, \infty)$, Neg. $(-3, -2) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \bigcup (2, 3)$;

27. Pos. $(-\infty, -3) \bigcup \left(-2, -\frac{1}{2}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2}, 2\right) \bigcup (2, \infty)$, Neg. $(-3, -2) \bigcup \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; 31.1. $\frac{\varepsilon}{3}$; 31.2. $\frac{\varepsilon}{4}$; 31.3. $\frac{\varepsilon}{6}$;

31.4. $\frac{\varepsilon}{5}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Sistema de coordenadas cartesianas.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.05

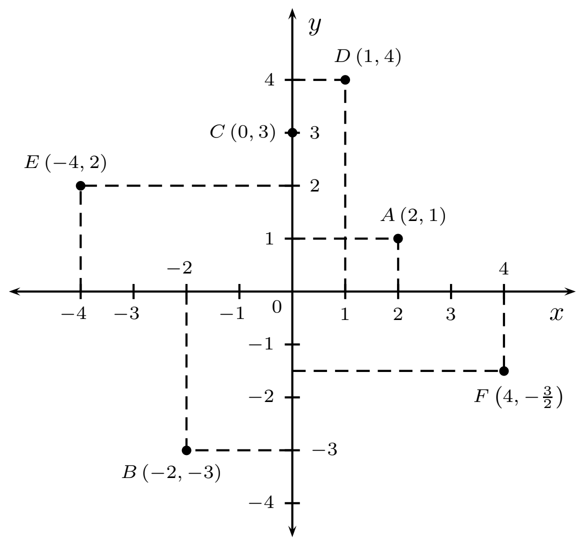
- Plano cartesiano. Distancia entre dos puntos. Punto medio de un segmento.
- Representación de pares ordenados en el plano cartesiano.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 5.1 *: Represente en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados*

1. $A(2,1)$ 2. $B(-2,-3)$ 3. $C(0,3)$ 4. $D(1,4)$ 5. $E(-4,2)$ 6. $F\left(4,-\dfrac{3}{2}\right)$

Solución :



★

Ejemplo 5.2 *: Halle el punto medio entre los siguientes puntos*

1. $(0,0),(4,6)$ 2. $(1,-5),(6,2)$ 3. $\left(\dfrac{1}{2},-4\right),\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$

Solución : 1. Es conocido que dado dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) el punto medio, el cual denotamos por P_{med} viene dado por

$$P_{med}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

así,

$$P_{med}=\left(\frac{0+4}{2},\frac{0+6}{2}\right)=\left(\frac{4}{2},\frac{6}{2}\right)=(2,3).$$

Luego, el punto medio entre los puntos $(0,0)$ y $(4,6)$ es $P_{med}=(2,3)$.

2. Es conocido que dado dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) el punto medio, el cual denotamos por P_{med} viene dado por

$$P_{med}=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right),$$

así,

$$P_{med}=\left(\frac{1+6}{2},\frac{-5+2}{2}\right)=\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right).$$

Luego, el punto medio entre los puntos $(1,-5)$ y $(6,2)$ es $P_{med} = \left(\frac{7}{2}, -\frac{3}{2}\right)$.

3. Es conocido que dado dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) el punto medio, el cual denotamos por P_{med} viene dado por

$$P_{med} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right),$$

así,

$$P_{med} = \left(\frac{\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right)}{2}, \frac{-4+2}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}, \frac{-2}{2}\right) = \left(-\frac{2}{2}, -1\right) = (-1,-1).$$

Luego, el punto medio entre los puntos $\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ es $P_{med} = (-1,-1)$. ★

Ejemplo 5.3 *: Hallar la distancia entre los siguientes puntos*

1. $(3,0), (6,9)$ 2. $(-3,2), (1,2)$ 3. $\left(\frac{1}{2}, -4\right), \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$

Solución : 1. Es conocido que dado dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la distancia entre los puntos, la cual denotamos por $d(A,B)$ viene dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

así, para $A(3,0)$ y $B(6,9)$, tenemos

$$d(A,B) = \sqrt{(3-6)^2 + (0-9)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10},$$

Luego, la distancia entre los puntos $A(3,0)$ y $B(6,9)$ es $d(A,B) = 3\sqrt{10}$.

2. Es conocido que dado dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la distancia entre los puntos, la cual denotamos por $d(A,B)$ viene dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

así, para $A(-3,2)$ y $B(1,2)$, tenemos

$$d(A,B) = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

Luego, la distancia entre los puntos $A(-3,2)$ y $B(1,2)$ es $d(A,B) = 4$.

3. Es conocido que dado dos puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ la distancia entre los puntos, la cual denotamos por $d(A,B)$ viene dada por

$$d(A,B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

así, para $A\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ y $B\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$, tenemos

$$d(A,B) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2 + (-4-2)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + (-6)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + 36} = \sqrt{(2)^2 + 36} = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10},$$

Luego, la distancia entre los puntos $A\left(\frac{1}{2}, -4\right)$ y $B\left(-\frac{3}{2}, 2\right)$ es $d(A,B) = 2\sqrt{10}$. ★

Ejemplo 5.4 *: La distancia del punto $P(4,b)$ al punto $Q(2,-2)$ es 4. Hallar la ordenada del punto P.*

Solución : Es conocido que dado dos puntos $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ la distancia entre los puntos, la cual denotamos por $d(A,B)$ viene dada por

$$d(A,B)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

así, para $P(4,b)$ y $Q(2,-2)$, se tiene que

$$d(P,Q)=4 \qquad \text{es decir,} \qquad \sqrt{(4-2)^2+(b-(-2))^2}=4,$$

de aquí,

$$(2)^2+(b+2)^2=16 \quad \Longrightarrow \quad (b+2)^2=12 \quad \Longrightarrow \quad b+2=\pm 2\sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad b=-2\pm 2\sqrt{3},$$

por lo tanto, se tiene dos puntos P

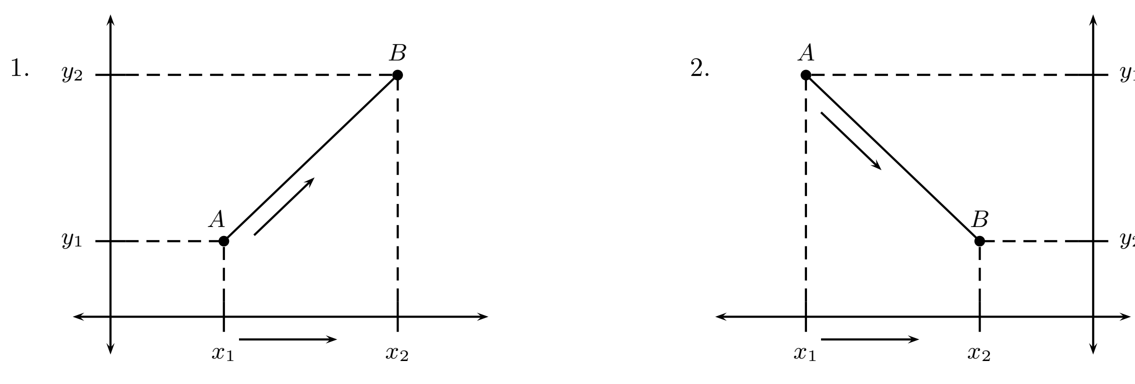
- El punto P_1 con ordenada $b=-2-2\sqrt{3}$, así, $P_1\left(4,-2-2\sqrt{3}\right)$.
- El punto P_2 con ordenada $b=-2+2\sqrt{3}$, así, $P_2\left(4,-2+2\sqrt{3}\right)$.

★

Ejemplo 5.5 *: Representar en el plano cartesiano los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) que cumplen con las siguientes condiciones*

1. $x_1<x_2,\quad y_1<y_2,\quad x_1>0,\ y_1>0$
2. $x_1<x_2,\quad y_1>y_2,\quad x_2<0,\ y_2>0$

Solución : Denotamos los puntos como $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$, entonces



★

Ejemplo 5.6 *: Considere los puntos $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ y el cociente*

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2},$$

estudie el signo del cociente m para el caso en que $x_1<x_2$, $y_1>y_2$, con $x_2<0$, $y_2>0$.

Solución : Puesto que,

$$x_1<x_2 \qquad \text{se tiene} \qquad x_1-x_2<0,$$

por otra parte,

$$y_1>y_2 \qquad \text{se tiene} \qquad y_1-y_2>0,$$

así,

$$m=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{\text{expresión positiva}}{\text{expresión negativa}} \qquad \Longrightarrow \qquad m<0.$$

★

Ejemplo 5.7 *: Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por*

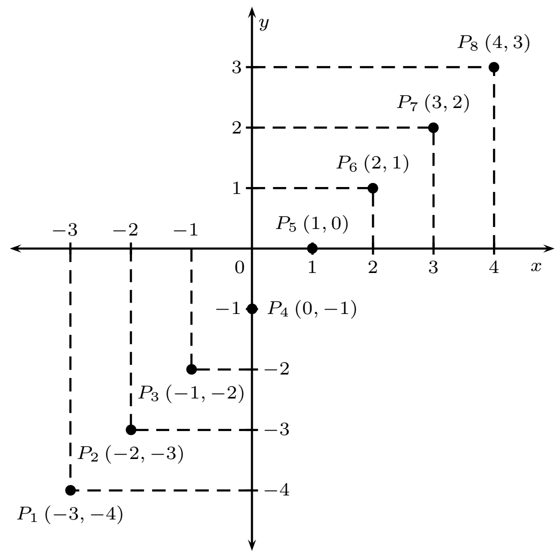
$$y = x - 1.$$

Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -3, \qquad x = -2, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2, \qquad x = 3, \qquad x = 4.$$

Solución : Buscamos la coordenada de la ordenada para cada una de las coordenadas de las abscisas dadas, para ello evaluamos las coordenadas abscisas en la expresión dada y.

x	$y = (x) - 1$	$P(x.y)$
-3	$(-3) - 1 = -4$	$P_1(-3,-4)$
-2	$(-2) - 1 = -3$	$P_2(-2,-3)$
-1	$(-1) - 1 = -2$	$P_3(-1,-2)$
0	$(0) - 1 = -1$	$P_4(0,-1)$
1	$(1) - 1 = 0$	$P_5(1,0)$
2	$(2) - 1 = 1$	$P_6(2,1)$
3	$(3) - 1 = 2$	$P_7(3,2)$
4	$(4) - 1 = 3$	$P_8(4,3)$



★

Ejemplo 5.8 *: Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por*

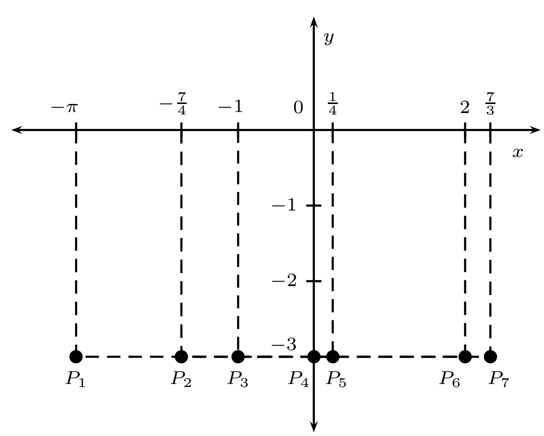
$$y = -3 \qquad y \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -\pi, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{4}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{7}{3}.$$

Solución : Buscamos la coordenada de la ordenada para cada una de las coordenadas de las abscisas dadas, para ello evaluamos las coordenadas abscisas en la expresión dada y.

x	$y = -3$	$P(x.y)$
$-\pi$	-3	$P_1(-\pi,-3)$
$-\frac{7}{4}$	-3	$P_2\left(-\frac{7}{4},-3\right)$
-1	-3	$P_3(-1,-3)$
0	-3	$P_4(0,-3)$
$\frac{1}{4}$	-3	$P_5\left(\frac{1}{4},-3\right)$
2	-3	$P_6(2,-3)$
$\frac{7}{3}$	-3	$P_7\left(\frac{7}{3},-3\right)$



★

Ejemplo 5.9 *: Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por*

$$x = 3 \qquad y \qquad y \in \mathbb{R}.$$

1. *Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que*

$$x = -\pi, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{4}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{7}{3}.$$

2. *Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que*

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 3.$$

Solución : 1. Buscamos la coordenada de la ordenada para cada una el valor de la coordenada de la abscisa dado.

Observemos que nuestra relación viene dada por los puntos del plano de $\mathbb{R}^2$ de la forma $P(3,y)$, donde y es cualquier número real, es decir, estamos relacionando el valor de la abscisa $x = 3$ con valores y de la ordenada, pero los valores de x dados no son iguales a $x = 3$, por lo que los puntos

$$x = -\pi, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{4}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{7}{3}.$$

NO se pueden relacionar con ningún valor de y, ya que, ninguno de los valores de x dados son iguales a $x = 3$.

Así, concluimos que esta relación **NO** tiene representación en el plano cartesiano para los valores de x dados.

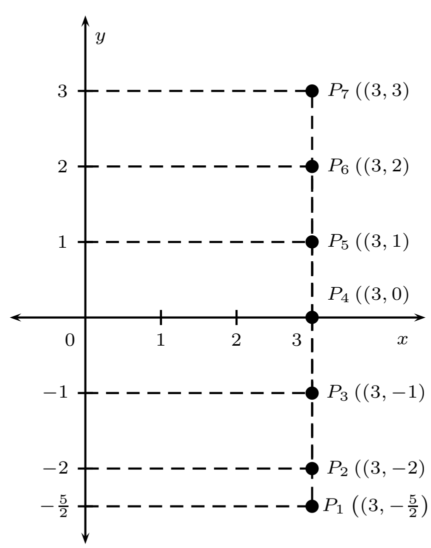
2. Buscamos la coordenada de la abscisa para cada una de las coordenadas de las ordenadas dadas.

A diferencia del item anterior, ahora estamos relacionando el valor de la abscisa $x = 3$ con valores y de la ordenada, valores que nos están dando, es decir, nuestra relación viene dada por los puntos del plano de $\mathbb{R}^2$ de la forma $P(3,y)$, donde y es cualquier número real, por lo que los puntos

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 3.$$

SI tendrán una representación en el plano $\mathbb{R}^2$, ya que buscamos las coordenadas de las ordenadas

$x=3$	y	$P(x.y)$
3	$-\frac{5}{2}$	$P_1\left(3,-\frac{5}{2}\right)$
3	-2	$P_2(3,-2)$
3	-1	$P_3(3,-1)$
3	0	$P_4(3,0)$
3	1	$P_5(3,1)$
3	2	$P_6(3,2)$
3	3	$P_7(3,3)$



★

Ejemplo 5.10 *: Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por*

$$y = x^2.$$

1. *Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que*

$$x = -3, \qquad x = -\frac{5}{2}, \qquad x = -2, \qquad x = -\frac{3}{2}, \qquad x = -1, \qquad x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 0,$$

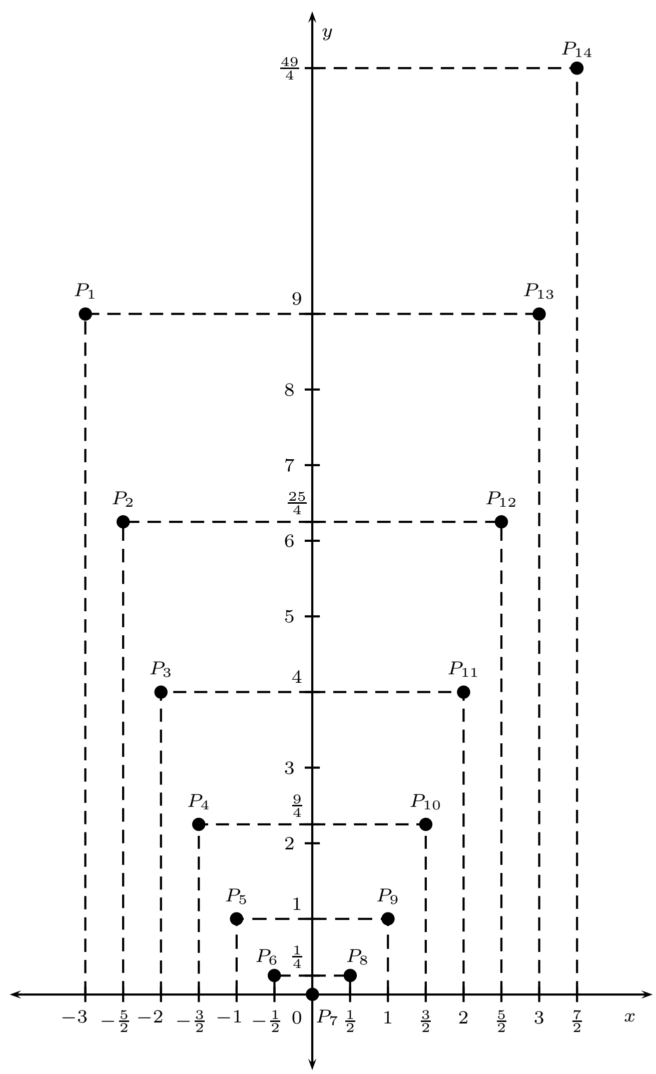
$$x = \frac{1}{2}, \qquad x = 1, \qquad x = \frac{3}{2}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{5}{2}, \qquad x = 3, \qquad x = \frac{7}{2}.$$

2. *Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que*

$$y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 4, \qquad y = 6, \qquad y = 9.$$

Solución : 1. Buscamos la coordenada de la ordenada para cada una de las coordenadas de las abscisas dadas, para ello evaluamos las coordenadas abscisas en la expresión dada y.

x	$y = (x)^2$	$P(x.y)$
-3	$(-3)^2 = 9$	$P_1(-3, 9)$
$-\frac{5}{2}$	$\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$P_2\left(-\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$
-2	$(-2)^2 = 4$	$P_3(-2, 4)$
$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$P_4\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$
-1	$(-1)^2 = 1$	$P_5(-1, 1)$
$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$P_6\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
0	$(0)^2 = 0$	$P_7(0, 0)$
$\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	$P_8\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$
1	$(1)^2 = 1$	$P_9(1, 1)$
$\frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$	$P_{10}\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{4}\right)$
2	$(2)^2 = 4$	$P_{11}(2, 4)$
$\frac{5}{2}$	$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$	$P_{12}\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$
3	$(3)^2 = 9$	$P_{13}(3, 9)$
$\frac{7}{2}$	$\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$	$P_{14}\left(\frac{7}{2}, \frac{49}{4}\right)$



2. Buscamos la coordenada de la abscisa para cada una de las coordenadas de las ordenadas dadas.

- Para $y=-2$, resolvemos la ecuación $-2=x^2$, de aquí,

$$-2=x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2+2=0,$$

aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=2$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(2)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-8}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

por lo tanto, la ecuación $x^2+2=0$ no tiene solución en los números reales. por lo que no se tiene puntos en el plano cartesiano para ese valor de x.

- Para $y=-1$, resolvemos la ecuación $-1=x^2$, de aquí,

$$-1=x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2+1=0,$$

aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=1$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-4}}{2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un}\\ \text{número negativo.}\\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

por lo tanto, la ecuación $x^2+1=0$ no tiene solución en los números reales. por lo que no se tiene puntos en el plano cartesiano para ese valor de x.

- Para $y=0$, resolvemos la ecuación $0=x^2$, lo cual se cumple si y solo si $x=0$. Luego, el punto es $P_1(0,0)$.

- Para $y=1$, resolvemos la ecuación $1=x^2$, de aquí,

$$1=x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2-1=0,$$

aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=-1$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{\pm 2}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{2}=1 \\[2ex] x=\dfrac{-2}{2}=-1, \end{array}\right.$$

por lo tanto, la ecuación $x^2-1=0$ tiene dos valores como solución. por lo que se tiene dos puntos en el plano cartesiano $P_2(-1,1)$ y $P_3(1,1)$.

- Para $y=2$, resolvemos la ecuación $2=x^2$, de aquí,

$$2=x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2-2=0,$$

aplicamos la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=-2$

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{\pm 2\sqrt{2}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \left\{\begin{array}{l} x=-\sqrt{2} \\[2ex] x=\sqrt{2}, \end{array}\right.$$

por lo tanto, la ecuación $x^2-2=0$ tiene dos valores como solución. por lo que se tiene dos puntos en el plano cartesiano $P_4\left(-\sqrt{2},2\right)$ y $P_5\left(\sqrt{2},2\right)$.

- Para $y = 4$, resolvemos la ecuación $4 = x^2$, de aquí,

$$4 = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 4 = 0,$$

aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = -4$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{\pm 4}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \\ x = \dfrac{-4}{2} = -2, \end{cases}$$

por lo tanto, la ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene dos valores como solución. por lo que se tiene dos puntos en el plano cartesiano $P_6(-2, 4)$ y $P_7(2, 4)$.

- Para $y = 6$, resolvemos la ecuación $6 = x^2$, de aquí,

$$6 = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 6 = 0,$$

aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = -6$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-6)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{24}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{6}}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \sqrt{6} \\ \\ x = -\sqrt{6}, \end{cases}$$

por lo tanto, la ecuación $x^2 - 1 = 0$ tiene dos valores como solución. por lo que se tiene dos puntos en el plano cartesiano $P_8\left(-\sqrt{6}, 2\right)$ y $P_9\left(\sqrt{6}, 2\right)$.

- Para $y = 9$, resolvemos la ecuación $9 = x^2$, de aquí,

$$9 = x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 9 = 0,$$

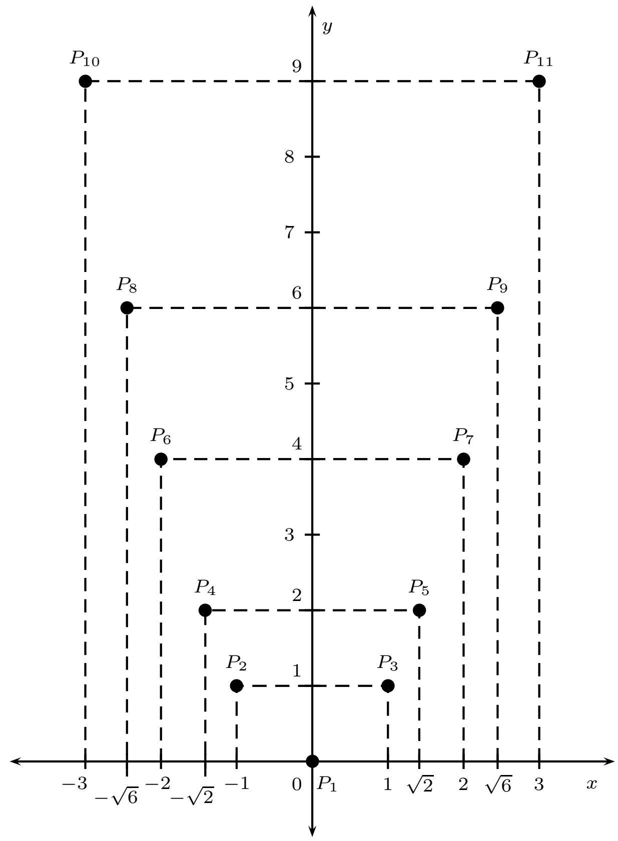
aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = -9$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-9)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{\pm 6}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \\ x = \dfrac{-6}{2} = -3, \end{cases}$$

por lo tanto, la ecuación $x^2 - 4 = 0$ tiene dos valores como solución. por lo que se tiene dos puntos en el plano cartesiano $P_{10}(-3, 9)$ y $P_{11}(3, 9)$.

Entonces, se tiene las siguientes relaciones

$y = (x)^2$	x	$P(x.y)$
$x^2 = 0$	0	$P_1(0, 0)$
$x^2 = 1$	± 1	$P_2(-1, 1)$, $P_3(1, 1)$
$x^2 = 2$	$\pm\sqrt{2}$	$P_4\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, $P_5\left(\sqrt{2}, 4\right)$
$x^2 = 4$	± 2	$P_6(-2, 4)$, $P_7(2, 4)$
$x^2 = 6$	$\pm\sqrt{6}$	$P_8\left(-\sqrt{6}, 6\right)$, $P_9\left(\sqrt{6}, 6\right)$
$x^2 = 9$	± 3	$P_{10}(-3, 9)$, $P_{11}(3, 9)$



★

Ejercicios

1. Represente en el plano cartesiano los siguientes pares ordenados

1. $(0,0)$	2. $(1,0)$	3. $(0,1)$	4. $(-1,0)$	5. $(0,-1)$	6. $(-1,2)$
7. $(2,0)$	8. $(2,1)$	9. $(0,-3)$	10. $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$	11. $(-2,-3)$	12. $(-2,-2)$
13. $(3,1)$	14. $(0,3)$	15. $\left(\sqrt{2},\pi\right)$	16. $(-3,0)$	17. $\left(\dfrac{3}{2},1\right)$	18. $(1,4)$

19. $\left(\sqrt{3},1\right)$	20. $(-1,-5)$	21. $(-4,2)$	22. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	23. $\left(4,-\dfrac{3}{2}\right)$

2. Halle el punto medio entre los siguientes puntos

1. $(0,0),(4,6)$	2. $(3,0),(6,9)$	3. $\left(\dfrac{1}{2},4\right),\left(-\dfrac{3}{2},8\right)$	4. $\left(\dfrac{1}{2},-1\right),\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)$
5. $(1,-5),(6,2)$	6. $(4,1),(6,-2)$	7. $\left(\dfrac{1}{2},-4\right),\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$	8. $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right),(1,1)$
9. $(-3,2),(1,2)$	10. $(10,2),(-2,2)$	11. $\left(\sqrt{3},0\right),\left(\sqrt{12},\sqrt{2}\right)$	12. $\left(\sqrt{27},\sqrt{8}\right),\left(\sqrt{3},\sqrt{2}\right)$

3. Hallar la distancia entre los puntos del ejercicio 2

4. Hallar la distancia de un punto arbitrario $P(a,b)$ al origen de coordenadas.
5. La distancia del punto $P(2,b)$ al origen de coordenadas es 10. Hallar la ordenada del punto P.
6. La distancia del punto $P(a,-3)$ al origen de coordenadas es 5. Hallar la abscisa del punto P.
7. La distancia del punto $P(4,b)$ al punto $Q(2,-2)$ es 4. Hallar la ordenada del punto P.
8. La distancia del punto $P(a,0)$ al punto $Q(-5,-4)$ es 4. Hallar la abscisa del punto P.
9. La distancia del punto $P(a,-1)$ al punto $Q(5,-1)$ es $\dfrac{3}{4}$. Hallar la abscisa del punto P.
10. La distancia del punto $P(2,b)$ al punto $Q(-1,4)$ es $\sqrt{10}$. Hallar la ordenada del punto P.
11. La distancia del punto $P\left(a,\dfrac{1}{2}\right)$ al punto $Q(2,b)$ es 2 y la distancia de punto Q al punto $R(1,1)$ es $\sqrt{2}$. Hallar la abscisa del punto P y la ordenada del punto Q.
12. La distancia del punto $P(a,-4)$ al punto $Q(1,b)$ es $\sqrt{26}$ y la distancia de punto Q al punto $R(-2,-3)$ es 5. Hallar la abscisa del punto P y la ordenada del punto Q.
13. La distancia del punto $P(a,3)$ al punto $Q(-2,1)$ es 3 y la distancia de punto Q al punto $R(-2,b)$ es $\sqrt{2}$. Hallar la abscisa del punto P y la ordenada del punto R.
14. La distancia del punto $P\left(\dfrac{1}{2},b\right)$ al punto $Q(2,2)$ es $\sqrt{3}$ y la distancia de punto Q al punto $R(a,-4)$ es 7. Hallar la abscisa del punto R y la ordenada del punto P.
15. La distancia del punto $P(a,b)$ al origen de coordenadas es 1 la distancia de punto $Q(a,2)$ al punto $R(1,b)$ es $\sqrt{7}$. Hallar los valores de a y b.
16. Representar en el plano cartesiano los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) que cumplen con las siguientes condiciones

    1. $x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2, \quad x_1 > 0,\ y_1 > 0$
    2. $x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2, \quad x_2 < 0,\ y_2 < 0$
    3. $x_1 < x_2, \quad y_1 > y_2, \quad x_1 > 0,\ y_1 > 0$
    4. $x_1 < x_2, \quad y_1 > y_2, \quad x_2 < 0,\ y_2 > 0$
    5. $x_1 < x_2, \quad y_1 < y_2, \quad x_1 < 0,\ y_1 > 0$
    6. $x_1 < x_2, \quad y_1 > y_2, \quad x_1 < 0,\ y_1 > 0$

17. Considere los puntos $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ y el cociente

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

    estudie el signo del cociente m para los dados en el ejercicio 16.

18. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = x - 1.$$

    (a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-2, \qquad x=-1, \qquad x=0, \qquad x=1, \qquad x=2, \qquad x=3, \qquad x=4.$$

    (b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \qquad y=-\frac{3}{2}, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\pi.$$

19. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = -2x + 1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -\frac{5}{2}, \qquad x = -2, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{5}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = \frac{5}{2}.$$

20. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = 1 \qquad \text{y} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -3, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 0, \qquad x = 1, \qquad x = \frac{5}{3}, \qquad x = 2.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 3.$$

21. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = -3 \qquad \text{y} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -\pi, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{4}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{7}{3}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 3.$$

22. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$x = 3 \qquad \text{y} \qquad y \in \mathbb{R}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x = -\pi, \qquad x = -\frac{7}{4}, \qquad x = -1, \qquad x = 0, \qquad x = \frac{1}{4}, \qquad x = 2, \qquad x = \frac{7}{3}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y = -\frac{5}{2}, \qquad y = -2, \qquad y = -1, \qquad y = 0, \qquad y = 1, \qquad y = 2, \qquad y = 3.$$

23. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$x=-2 \qquad \text{y} \qquad y\in\mathbb{R}.$$
   (a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=0, \qquad x=1, \qquad x=2, \qquad x=\frac{7}{3}.$$
   (b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$y=-\pi, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{4}, \qquad y=2, \qquad y=3.$$

24. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y=x^2.$$
   (a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
   $$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$
   (b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=1, \qquad y=2, \qquad y=4, \qquad y=6, \qquad y=9.$$

25. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y+x^2=0.$$
   (a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
   $$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$
   (b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$y=-9, \qquad y=-6, \qquad y=-4, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=1, \qquad y=2.$$

26. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y=x^2-2x.$$
   (a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
   $$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
   $$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=1, \qquad y=2, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=4, \qquad y=5.$$

27. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=2x^2+x.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{4}, \qquad y=1, \qquad y=3, \qquad y=6, \qquad y=10, \qquad y=15.$$

28. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=3x-2x^2.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-35, \qquad y=-14, \qquad y=-9, \qquad y=-5, \qquad y=-2, \qquad y=-1,$$

$$y=0, \qquad y=1, \qquad y=2.$$

29. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=x^2+x+1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=0, \qquad y=\frac{3}{4}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{37}{16}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{91}{25}, \qquad y=7, \qquad y=13.$$

30. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = x - 2x^2 - 3.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \quad x=-\frac{5}{2}, \quad x=-2, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=-1, \quad x=-\frac{1}{2}, \quad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \quad x=1, \quad x=\frac{3}{2}, \quad x=2, \quad x=\frac{5}{2}, \quad x=3, \quad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-58, \quad y=-24, \quad y=-9, \quad y=-6, \quad y=-\frac{39}{8}, \quad y=-4, \quad y=-3.$$

31. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = \frac{1}{x}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \quad x=-\frac{5}{2}, \quad x=-2, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=-1, \quad x=-\frac{3}{4}, \quad x=-\frac{1}{2},$$

$$x=-\frac{1}{4}, \quad x=-\frac{1}{5}, \quad x=-\frac{1}{10}, \quad x=0, \quad x=\frac{1}{10}, \quad x=\frac{1}{5}, \quad x=\frac{1}{4},$$

$$x=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{3}{4}, \quad x=1, \quad x=\frac{3}{2}, \quad x=2, \quad x=\frac{5}{2}, \quad x=3.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \quad y=-\frac{5}{2}, \quad y=-2, \quad y=-\frac{3}{2}, \quad y=-1, \quad y=-\frac{3}{4}, \quad y=-\frac{1}{2},$$

$$y=-\frac{1}{4}, \quad y=-\frac{1}{5}, \quad y=-\frac{1}{10}, \quad y=0, \quad y=\frac{1}{10}, \quad y=\frac{1}{5}, \quad y=\frac{1}{4},$$

$$y=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{3}{4}, \quad y=1, \quad y=\frac{3}{2}, \quad y=2, \quad y=\frac{5}{2}, \quad y=3.$$

32. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \quad x=-\frac{5}{2}, \quad x=-2, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=-1, \quad x=-\frac{3}{4}, \quad x=-\frac{1}{2},$$

$$x=-\frac{1}{4}, \quad x=-\frac{1}{5}, \quad x=-\frac{1}{10}, \quad x=0, \quad x=\frac{1}{10}, \quad x=\frac{1}{5}, \quad x=\frac{1}{4},$$

$$x=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{3}{4}, \quad x=1, \quad x=\frac{3}{2}, \quad x=2, \quad x=\frac{5}{2}, \quad x=3.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{10}, \qquad y=\frac{1}{5}, \qquad y=\frac{1}{4},$$

$$y=\frac{1}{2}, \qquad y=\frac{3}{4}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=2, \qquad y=\frac{5}{2}, \qquad y=3.$$

33. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=|x|.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2},$$

$$y=2, \qquad y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}, \qquad y=4, \qquad y=\frac{9}{2}, \qquad y=5.$$

34. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=2|x|-1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2},$$

$$y=2, \qquad y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}, \qquad y=4, \qquad y=\frac{9}{2}, \qquad y=5.$$

35. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$x=y^2.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-2, \qquad x=-1, \qquad x=0, \qquad x=1, \qquad x=4, \qquad x=9, \qquad x=16.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \qquad y=-\frac{5}{2}, \qquad y=-2, \qquad y=-\frac{3}{2}, \qquad y=-1, \qquad y=-\frac{1}{2}, \qquad y=0,$$

$$y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=2, \qquad y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}.$$

36. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$x = -y^2.$$
(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$x=-16, \qquad x=-9, \qquad x=-4, \qquad x=-1, \qquad x=0, \qquad x=1, \qquad x=2.$$
(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$y=-3, \qquad y=-\frac{5}{2}, \qquad y=-2, \qquad y=-\frac{3}{2}, \qquad y=-1, \qquad y=-\frac{1}{2}, \qquad y=0,$$
$$y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=2, \qquad y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}.$$

37. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y = x^3.$$
(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$
(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$y=-8, \qquad y=-1, \qquad y=-\frac{1}{8}, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{8}, \qquad y=1, \qquad y=8.$$

38. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y = (x-1)^3.$$
(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$
(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$y=-8, \qquad y=-1, \qquad y=-\frac{1}{8}, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{8}, \qquad y=1, \qquad y=8.$$

39. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por
$$y = x^3+1.$$
(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que
$$x=-3, \qquad x=-\frac{5}{2}, \qquad x=-2, \qquad x=-\frac{3}{2}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0,$$
$$x=\frac{1}{2}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{3}{2}, \qquad x=2, \qquad x=\frac{5}{2}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{7}{2}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-7, \qquad y=-\frac{19}{8}, \qquad y=0, \qquad y=\frac{7}{8}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{9}{8}, \qquad y=9.$$

40. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=\sqrt{x}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-1, \qquad x=-\frac{1}{2}, \qquad x=0, \qquad x=\frac{1}{8}, \qquad x=\frac{1}{4}, \qquad x=1, \qquad x=2,$$

$$x=\frac{9}{4}, \qquad x=4, \qquad x=\frac{25}{4}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{49}{4}, \qquad x=9, \qquad x=16.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=2,$$

$$y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}, \qquad y=4, \qquad y=\frac{9}{2}, \qquad y=5, \qquad y=6,$$

41. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=\sqrt{x-2}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=0, \qquad x=1, \qquad x=2, \qquad x=\frac{9}{4}, \qquad x=3, \qquad x=\frac{17}{4}, \qquad x=6,$$

$$x=\frac{33}{4}, \qquad x=11, \qquad x=\frac{57}{4}, \qquad x=18, \qquad x=27, \qquad x=\frac{129}{4}, \qquad x=38.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=\frac{1}{2}, \qquad y=1, \qquad y=\frac{3}{2}, \qquad y=2,$$

$$y=\frac{5}{2}, \qquad y=3, \qquad y=\frac{7}{2}, \qquad y=4, \qquad y=\frac{9}{2}, \qquad y=5, \qquad y=6,$$

42. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y=\sqrt[3]{x}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-27, \qquad x=-\frac{125}{8}, \qquad x=-8, \qquad x=-\frac{27}{9}, \qquad x=-1, \qquad x=-\frac{1}{8}, \qquad x=0,$$

$$x=\frac{1}{8}, \qquad x=1, \qquad x=\frac{27}{8}, \qquad x=8, \qquad x=\frac{125}{8}, \qquad x=27, \qquad x=\frac{343}{8}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \qquad y=-2, \qquad y=-1, \qquad y=0, \qquad y=1, \qquad y=2, \qquad y=3.$$

43. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y = 4 - \sqrt[3]{x}.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-27, \quad x=-\frac{125}{8}, \quad x=-8, \quad x=-\frac{27}{9}, \quad x=-1, \quad x=-\frac{1}{8}, \quad x=0,$$

$$x=\frac{1}{8}, \quad x=1, \quad x=\frac{27}{8}, \quad x=8, \quad x=\frac{125}{8}, \quad x=27, \quad x=\frac{343}{8}.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-3, \quad y=-2, \quad y=-1, \quad y=0, \quad y=1, \quad y=2, \quad y=3.$$

44. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$y^2 + x^2 = 1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-2, \quad x=-1, \quad x=-\frac{4}{5}, \quad x=-\frac{3}{5}, \quad x=-\frac{1}{2}, \quad x=-\frac{2}{5}, \quad x=-\frac{1}{5},$$

$$x=0, \quad x=\frac{1}{5}, \quad x=\frac{2}{5}, \quad x=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{3}{5}, \quad x=\frac{4}{5}, \quad x=1.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \quad y=-1, \quad y=-\frac{4}{5}, \quad y=-\frac{3}{5}, \quad y=-\frac{1}{2}, \quad y=-\frac{2}{5}, \quad y=-\frac{1}{5},$$

$$y=0, \quad y=\frac{1}{5}, \quad y=\frac{2}{5}, \quad y=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{3}{5}, \quad y=\frac{4}{5}, \quad y=1.$$

45. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-3, \quad x=-\frac{14}{5}, \quad x=-\frac{13}{5}, \quad x=-\frac{5}{2}, \quad x=-\frac{12}{5}, \quad x=-\frac{11}{5},$$

$$x=-2, \quad x=-\frac{9}{5}, \quad x=-\frac{8}{5}, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=-\frac{7}{5}, \quad x=-\frac{6}{5},$$

$$x=-1, \quad x=-\frac{4}{5}, \quad x=-\frac{3}{5}, \quad x=-\frac{1}{2}, \quad x=-\frac{2}{5}, \quad x=-\frac{1}{5},$$

$$x=0, \quad x=\frac{1}{4}, \quad x=\frac{1}{2}, \quad x=\frac{3}{4}, \quad x=1, \quad x=2.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-1, \quad y=0, \quad y=\frac{1}{5}, \quad y=\frac{2}{5}, \quad y=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{3}{5}, \quad y=\frac{4}{5},$$

$y=1,\quad y=\frac{6}{5},\quad y=\frac{7}{5},\quad y=\frac{3}{2},\quad y=\frac{8}{5},\quad y=\frac{9}{5},\quad y=2,$

$y=\frac{11}{5},\quad y=\frac{12}{5},\quad y=\frac{5}{2},\quad y=\frac{13}{5},\quad y=\frac{14}{5},\quad y=3,\quad y=\frac{13}{4},$

$y=\frac{7}{2},\quad y=\frac{15}{4},\quad y=4.$

46. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$x=-2,\quad x=-\frac{9}{5},\quad x=-\frac{8}{5},\quad x=-\frac{3}{2},\quad x=-\frac{7}{5},\quad x=-\frac{6}{5},$

$x=-1,\quad x=-\frac{4}{5},\quad x=-\frac{3}{5},\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{2}{5},\quad x=-\frac{1}{5},$

$x=0,\quad x=\frac{1}{5},\quad x=\frac{2}{5},\quad x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{3}{5},\quad x=\frac{4}{5},$

$x=1,\quad x=\frac{6}{5},\quad x=\frac{7}{5},\quad x=\frac{8}{5},\quad x=\frac{9}{5},\quad x=2.$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$y=-4,\quad y=-3,\quad y=-\frac{11}{4},\quad y=-\frac{5}{2},\quad y=-\frac{9}{4},\quad y=-2,\quad y=-\frac{7}{4},$

$y=-\frac{3}{2},\quad y=-\frac{5}{4},\quad y=-1,\quad y=-\frac{3}{4},\quad y=-\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{4},\quad y=0,$

$y=\frac{1}{4},\quad y=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{4},\quad y=1,\quad y=\frac{5}{4},\quad y=\frac{3}{2},\quad y=\frac{7}{4},$

$y=2,\quad y=\frac{9}{4},\quad y=\frac{5}{2},\quad y=\frac{11}{4},\quad y=3,\quad y=\frac{13}{4},\quad y=4.$

47. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$x=-4,\quad x=-3,\quad x=-\frac{11}{4},\quad x=-\frac{5}{2},\quad x=-\frac{9}{4},\quad x=-2,\quad x=-\frac{7}{4},$

$x=-\frac{3}{2},\quad x=-\frac{5}{4},\quad x=-1,\quad x=-\frac{3}{4},\quad x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{4},\quad x=0,$

$x=\frac{1}{4},\quad x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{3}{4},\quad x=1,\quad x=\frac{5}{4},\quad x=\frac{3}{2},\quad x=\frac{7}{4},$

$x=2,\quad x=\frac{9}{4},\quad x=\frac{5}{2},\quad x=\frac{11}{4},\quad x=3,\quad x=\frac{13}{4},\quad x=4.$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-2, \quad y=-\frac{9}{5}, \quad y=-\frac{8}{5}, \quad y=-\frac{3}{2}, \quad y=-\frac{7}{5}, \quad y=-\frac{6}{5},$$

$$y=-1, \quad y=-\frac{4}{5}, \quad y=-\frac{3}{5}, \quad y=-\frac{1}{2}, \quad y=-\frac{2}{5}, \quad y=-\frac{1}{5},$$

$$y=0, \quad y=\frac{1}{5}, \quad y=\frac{2}{5}, \quad y=\frac{1}{2}, \quad y=\frac{3}{5}, \quad y=\frac{4}{5},$$

$$y=1, \quad y=\frac{6}{5}, \quad y=\frac{7}{5}, \quad y=\frac{8}{5}, \quad y=\frac{9}{5}, \quad y=2.$$

48. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-4, \quad x=-\frac{15}{4}, \quad x=-\frac{7}{2}, \quad x=-\frac{13}{4}, \quad x=-3, \quad x=-\frac{11}{4},$$

$$x=-\frac{5}{2}, \quad x=-\frac{9}{4}, \quad x=-2, \quad x=-1, \quad x=-\frac{1}{2}, \quad x=0,$$

$$x=\frac{1}{2}, \quad x=1, \quad x=\frac{3}{2}, \quad x=2, \quad x=\frac{9}{4}, \quad x=\frac{5}{2},$$

$$x=\frac{11}{4}, \quad x=3, \quad x=\frac{13}{4}, \quad x=\frac{7}{2}, \quad x=\frac{15}{4}, \quad x=4.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-4, \quad y=-\frac{15}{4}, \quad y=-\frac{7}{2}, \quad y=-\frac{13}{4}, \quad y=-3, \quad y=-\frac{11}{4},$$

$$y=-\frac{5}{2}, \quad y=-\frac{9}{4}, \quad y=-2, \quad y=-1, \quad y=-\frac{1}{2}, \quad y=0,$$

$$y=\frac{1}{2}, \quad y=1, \quad y=\frac{3}{2}, \quad y=2, \quad y=\frac{9}{4}, \quad y=\frac{5}{2},$$

$$y=\frac{11}{4}, \quad y=3, \quad y=\frac{13}{4}, \quad y=\frac{7}{2}, \quad y=\frac{15}{4}, \quad y=4.$$

49. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-5, \quad x=-\frac{19}{4}, \quad x=-\frac{9}{2}, \quad x=-\frac{17}{4}, \quad x=-4, \quad x=-\frac{15}{4},$$

$$x=-\frac{7}{2}, \quad x=-\frac{13}{4}, \quad x=-3, \quad x=-2, \quad x=-\frac{3}{2}, \quad x=-1,$$

$$x=0, \quad x=1, \quad x=2, \quad x=3, \quad x=\frac{13}{4}, \quad x=\frac{7}{2},$$

$$x=\frac{15}{4}, \quad x=4, \quad x=\frac{17}{4}, \quad x=\frac{9}{2}, \quad x=\frac{19}{4}, \quad x=5.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-4,\quad y=-\frac{15}{4},\quad y=-\frac{7}{2},\quad y=-\frac{13}{4},\quad y=-3,\quad y=-\frac{11}{4},\quad y=-\frac{5}{2},$$
$$y=-\frac{9}{4},\quad y=-2,\quad y=-\frac{7}{4},\quad y=-\frac{3}{2},\quad y=-\frac{5}{4},\quad y=-1,\quad y=-\frac{3}{4},$$
$$y=-\frac{1}{2},\quad y=-\frac{1}{4},\quad y=0,\quad y=\frac{1}{4},\quad y=\frac{1}{2},\quad y=\frac{3}{4},\quad y=1,$$
$$y=\frac{5}{4},\quad y=\frac{3}{2},\quad y=\frac{7}{4},\quad y=2,\quad y=\frac{9}{4},\quad y=\frac{5}{2},\quad y=\frac{11}{4},$$
$$y=3,\quad y=\frac{13}{4},\quad y=\frac{7}{2},\quad y=\frac{15}{4},\quad y=4,\quad y=\frac{9}{2}\quad y=5.$$

50. Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del plano cartesiano, tal que la relación entre la coordenada de la ordenada y la coordenada de la abscisa está dada por

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1.$$

(a) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$x=-4,\quad x=-\frac{15}{4},\quad x=-\frac{7}{2},\quad x=-\frac{13}{4},\quad x=-3,\quad x=-\frac{11}{4},\quad x=-\frac{5}{2},$$
$$x=-\frac{9}{4},\quad x=-2,\quad x=-\frac{7}{4},\quad x=-\frac{3}{2},\quad x=-\frac{5}{4},\quad x=-1,\quad x=-\frac{3}{4},$$
$$x=-\frac{1}{2},\quad x=-\frac{1}{4},\quad x=0,\quad x=\frac{1}{4},\quad x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{3}{4},\quad x=1,$$
$$x=\frac{5}{4},\quad x=\frac{3}{2},\quad x=\frac{7}{4},\quad x=2,\quad x=\frac{9}{4},\quad x=\frac{5}{2},\quad x=\frac{11}{4},$$
$$x=3,\quad x=\frac{13}{4},\quad x=\frac{7}{2},\quad x=\frac{15}{4},\quad x=4,\quad x=\frac{9}{2}\quad x=5.$$

(b) Representar, en un mismo plano cartesiano, los puntos P para los casos en que

$$y=-5,\quad y=-\frac{19}{4},\quad y=-\frac{9}{2},\quad y=-\frac{17}{4},\quad y=-4,\quad y=-\frac{15}{4},$$
$$y=-\frac{7}{2},\quad y=-\frac{13}{4},\quad y=-3,\quad y=-2,\quad y=-\frac{3}{2},\quad y=-1,$$
$$y=0,\quad y=1,\quad y=2,\quad y=3,\quad y=\frac{13}{4},\quad y=\frac{7}{2},$$
$$y=\frac{15}{4},\quad y=4,\quad y=\frac{17}{4},\quad y=\frac{9}{2},\quad y=\frac{19}{4},\quad y=5.$$

Respuestas: Ejercicios

2.1. $P_{med}=(2,3)$; 2.2. $P_{med}=\left(\frac{9}{2},\frac{9}{2}\right)$; 2.3. $P_{med}=\left(-\frac{1}{2},6\right)$; 2.4. $P_{med}=\left(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}\right)$; 2.5. $P_{med}=\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$; 2.6. $P_{med}=\left(5,-\frac{1}{2}\right)$; 2.7. $P_{med}=\left(-\frac{1}{2},-1\right)$; 2.8. $P_{med}=\left(\frac{\sqrt{2}+2}{4},\frac{\sqrt{2}+2}{4}\right)$; 2.9. $P_{med}=(-1,2)$; 2.10. $P_{med}=(4,2)$; 2.11. $P_{med}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 2.12. $P_{med}=\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 3.1. $2\sqrt{13}$; 3.2. $3\sqrt{10}$; 3.3. $2\sqrt{5}$; 3.4. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; 3.5. $\sqrt{74}$; 3.6. $\sqrt{13}$; 3.7. $2\sqrt{10}$; 3.8. $\sqrt{2}-1$; 3.9. 4; 3.10. 12; 3.11. $\sqrt{5}$; 3.12. $\sqrt{14}$;

4. $d(O,P)=\sqrt{a^2+b^2}$; 5. $P_1\left(2,-\sqrt{96}\right)$, $P_2\left(2,\sqrt{96}\right)$; 6. $P_1(-4,-3)$, $P_2(4,-3)$; 7. $P_1\left(4,-2\sqrt{3}-2\right)$, $P_2\left(4,2\sqrt{3}-2\right)$; 8. $P(-5,0)$; 9. $P_1\left(\frac{23}{4},-1\right)$, $P_2\left(\frac{17}{4},-1\right)$; 10. $P_1(2,3)$, $P_2(2,5)$;

11. $Q_1(2,0)$, $P_{11}\left(2-\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P_{12}\left(2+\frac{\sqrt{15}}{2},\frac{1}{2}\right)$ y $Q_2(2,2)$, $P_{21}\left(2-\frac{\sqrt{7}}{2},\frac{1}{2}\right)$, $P_{22}\left(\frac{\sqrt{7}}{2}+2,\frac{1}{2}\right)$;

12. $Q_1(1,-7)$, $P_{11}\left(1-\sqrt{17},-4\right)$, $P_{12}\left(1+\sqrt{17},-4\right)$ y $Q_2(1,1)$, $P_{21}(0,-4)$, $P_{22}(2,-4)$;

13. $R_1\left(-2,1-\sqrt{2}\right)$, $P_{11}\left(-\sqrt{5}-2,3\right)$, $P_{12}\left(\sqrt{5}-2,3\right)$ y $R_2\left(-2,1+\sqrt{2}\right)$, $P_{21}\left(-\sqrt{5}-2,3\right)$, $P_{22}\left(\sqrt{5}-2,3\right)$;

14. $R_1\left(2-\sqrt{13},-4\right)$, $P_{11}\left(\frac{1}{2},2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $P_{12}\left(\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ y $R_2\left(\sqrt{13}+2,-4\right)$, $P_{21}\left(\frac{1}{2},2-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$, $P_{22}\left(\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$;

15. $a=\frac{\sqrt{19}}{5}-\frac{1}{10}$, $b=-\frac{\sqrt{19}}{10}-\frac{1}{5}$ y $a=-\frac{\sqrt{19}}{5}-\frac{1}{10}$, $b=\frac{\sqrt{19}}{10}-\frac{1}{5}$; 17.1. $m>0$; 17.2. $m>0$; 17.3. $m<0$; 17.4. $m<0$; 17.5. $m>0$; 17.6. $m<0$;

Bibliografía

1. **Lehmann, Ch.**: "*Geometría Analítica*". Editorial LIMUSA.
2. **Yakovliev, G. N.**: "*Geometría*". Editorial MIR. 1985.
3. **Guerreiro, Carlos**: "*Cálculo I*". Universidad Central de Venezuela. Ediciones de la Biblioteca Central. Tercera Edición. 2005.
4. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
5. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
6. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
7. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
8. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 6

Plano cartesiano. Lugar geométrico.

Objetivos a cubrir **Código : MAT-1.06**

- Definición de lugar geométrico. Circunferencias y rectas.
- Ecuaciones de la recta: Punto-pendiente. Pendiente-intersección con el eje y. General.
- Rectas paralelas. Rectas perpendiculares.
- Distancia entre rectas. Ángulos entre rectas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 6.1 *: Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto P que se mueve de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante, r, de un punto fijo, $C(x_0, y_0)$, del plano.*

Solución : Sea $P(x,y)$ un punto del plano que satisface la condición deseada, entonces

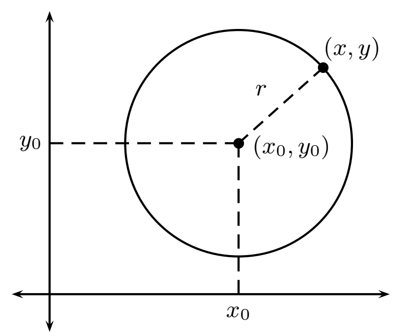
$$d(C,P) = r, \qquad \text{es decir,} \qquad \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = r,$$

de aquí, elevando al cuadrado, obtenemos

$$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2,}$$

que es la ecuación del lugar geométrico buscado.

Este lugar geométrico se conoce como **circunferencia de centro** $C(x_0, y_0)$ **y radio** r.



★

Ejemplo 6.2 *: Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los tres puntos $A(0,3)$, $B(3,0)$ y $C(-2,-2)$ es siempre igual a 30.*

Solución : Sea $P(x,y)$ un punto del plano, entonces

$$d(A,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$$

$$d(B,P) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$$

$$d(C,P) = \sqrt{(x-(-2))^2 + (y-(-2))^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2},$$

así, la suma de los cuadrados de estas distancias es siempre igual a 30, con lo que

$$(d(A,P))^2 + (d(B,P))^2 + (d(C,P))^2 = 30,$$

es decir,

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-3)^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x-3)^2 + y^2}\right)^2 + \left(\sqrt{(x+2)^2 + (y+2)^2}\right)^2 = 30,$$

con lo que,

$$x^2 + (y-3)^2 + (x-3)^2 + y^2 + (x+2)^2 + (y+2)^2 = 30,$$

desarrollando los productos notables se tiene

$$x^2 + y^2 - 6y + 9 + x^2 - 6x + 9 + y^2 + x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = 30,$$

de aquí,

$$3x^2 - 2y - 2x + 3y^2 + 26 = 30 \qquad \Longrightarrow \qquad 3x^2 - 2y - 2x + 3y^2 = 4,$$

completamos cuadrados en las variables x y y

$$3x^2 - 2x = 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) = 3\left(\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3},$$

mientras que,

$$3y^2 - 2y = 3\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) = 3\left(\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right) = 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3},$$

entonces,

$$3x^2 - 2y - 2x + 3y^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} + 3\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3} = 4,$$

es decir,

$$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}.$$

★

Ejemplo 6.3 *: Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x, y)$ que se mueve en un plano de tal manera que dado otro punto $P_1(x_1, y_1)$ el cociente*

$$\frac{y - y_1}{x - x_1}, \qquad \textit{con} \quad x \neq x_1,$$

siempre es constante.

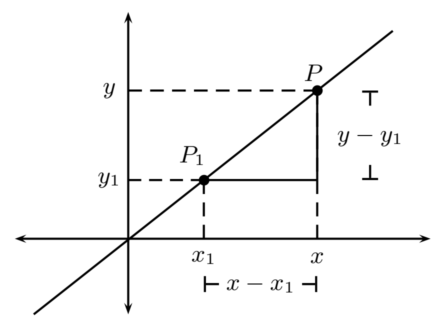
Solución : Sea m el valor de esa constante, entonces se tiene

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m,$$

de aquí,

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)\,,}$$

que es la ecuación del lugar geométrico buscado.



Este lugar geométrico se conoce como **recta de pendiente** m **y que pasa por el punto** $P_1(x_1, y_1)$.

En particular, la ecuación

$$\boxed{y - y_1 = m\,(x - x_1)\,,}$$

se conoce como la **ecuación punto-pendiente**. ★

Ejemplo 6.4 *: Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1, -2)$ y $B(5, 4)$.*

Solución : Sea $P(x, y)$ un punto del plano que satisface la condición deseada, entonces

$$d(A, P) = d(B, P)\,, \qquad \text{es decir,} \qquad \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2}$$

de aquí,

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y-4)^2$$

$$\Longrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 8y + 16$$

$$\Longrightarrow \quad 8x - 12y + 36 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x - 3y + 9 = 0.$$

★

Ejemplo 6.5 *: Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2,4)$ es siempre igual a su distancia del eje y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.*

Solución : Sea $Q(x,y)$ un punto del plano y $R(0,y)$ su proyección en el plano y, entonces

$$d(P,Q) = d(Q,R) + 3,$$

como,

$$d(P,Q) = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}; \qquad \text{y} \qquad d(Q,R) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-y)^2} = \sqrt{x^2} = |x|,$$

se tienes que,

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = |x| + 3 \quad \Longrightarrow \quad (x-2)^2 + (y-4)^2 = (|x|+3)^2,$$

de aquí,

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 4 + (y-4)^2 = |x|^2 + 6|x| + 9 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + (y-4)^2 = x^2 + 6|x| + 9 \\ &\Longrightarrow \quad (y-4)^2 = 4x + 6|x| + 5, \end{aligned}$$

así, si $x \geq 0$, entonces, la ecuación del lugar geométrico viene dada por

$$(y-4)^2 = 10x + 5,$$

mientras que, si $x < 0$, entonces, la ecuación del lugar geométrico viene dada por

$$(y-4)^2 = 5 - 2x.$$

★

Ejemplo 6.6 *: Escriba la ecuación de la circunferencia que tiene radio $r = \dfrac{7}{5}$ y el centro en el punto $C\left(-1, -\dfrac{3}{5}\right)$.*

Solución : Es conocido que, la ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r es

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

ver ejemplo 6.1, entonces, la ecuación de la circunferencia buscada es

$$(x-(-1))^2 + \left(y - \left(-\frac{3}{5}\right)\right)^2 = \left(\frac{7}{5}\right)^2, \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}}$$

★

Ejemplo 6.7 *: Hallar la ecuación que debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $A(3,-1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.*

Solución : Puesto que, la recta tiene pendiente 4, y pasa por el punto $A(3,-1)$, entonces una ecuación de la recta es

$$\underbrace{y - (-1) = 4(x-3)}_{\uparrow} \qquad \Longrightarrow \qquad y + 1 = 4(x-3)$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ecuación punto-pendiente} \\ y - y_0 = m(x - x_0)\end{array}}$$

★

Ejemplo 6.8 *: Hallar una ecuación de la recta que tiene un ángulo de inclinación igual a* $\dfrac{\pi}{6}$ *y que pasa por el punto cuya abscisa en el origen es igual a* -3

Solución : Es conocido que

$$m_{\tan} = \tan\alpha,$$

donde, α es el ángulo de inclinación de la recta respecto al eje de las abscisas (eje x), así,

$$m_{\tan} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\tan} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

por otra parte, puesto que, la recta pasa por el punto cuya abscisa en el origen es igual a -3, se tiene que la recta pasa ´pr el punto $P(-3,0)$, luego, la ecuación pendiente-ordenada en el origen viene dada por

$$y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(x - (-3)\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\,x + \sqrt{3}.$$

★

Ejemplo 6.9 *: Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto* $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$, *y tiene abscisa en el origen (intersección x) igual a* $-\dfrac{1}{6}$.

Solución : Observemos que la recta pasa por los puntos $P\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}\right)$ y $Q\left(-\dfrac{1}{6}, 0\right)$, así, la pendiente de dicha recta viene dada por

$$m = \frac{-\dfrac{1}{4} - 0}{\dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{6}\right)} = \frac{-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{6}} = \frac{-\dfrac{1}{4}}{\dfrac{4}{6}} = -\frac{3}{8},$$

entonces

$$m = -\frac{3}{8},$$

para escribir la ecuación de la recta consideramos uno de los dos puntos P y Q, por ejemplo, el punto Q, y tenemos

$$y - 0 = -\frac{3}{8}\left(x - \left(-\frac{1}{6}\right)\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{3}{8}\left(x + \frac{1}{6}\right)$$

Luego, la ecuación de la recta buscada es

$$y = -\frac{3}{8}\left(x + \frac{1}{6}\right).$$

★

Ejemplo 6.10 *: Demuestre que los puntos* $A(2,-1)$, $B(3,2)$ *y* $C\left(\dfrac{2}{3}, -5\right)$ *son colineales.*

Demostración : Es conocido que los puntos que pertenecen a una misma recta se le denominan **colineales**, así, que para demostrar que los puntos A, B y C son colineales basta demostrar que pertenecen a la misma recta, para ello, buscamos una ecuación de la recta que pase por dos de los puntos, por ejemplo, A y B, y verificar que el tercer punto C satisface dicha ecuación.

Calculamos la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2,-1)$ y $B(3,2)$

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{2-(-1)}{3-2} = \frac{2+1}{1} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\overrightarrow{AB}} = 3,$$

luego, la ecuación punto pendiente de la recta de pendiente $m_{\overrightarrow{AB}} = 3$ y que pasa por el punto $B(3, 2)$ viene dada por

$$y - 2 = 3(x - 3).$$

Veamos si el punto $C\left(\frac{2}{3}, -5\right)$ es colineal a los puntos A y B, sustituimos en la ecuación de la recta

$$y - 2 = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right) - 3\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y - 2 = 2 - 9 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -5,$$

por lo tanto, $A(2, -1)$, $B(3, 2)$ y $C\left(\frac{2}{3}, -5\right)$ son colineales. ★

Ejemplo 6.11 *: Halle la ecuación general de la recta que tiene iguales intersecciones con los ejes y pasa por* $(8, -6)$

Solución : Dado que la recta buscada tiene iguales intersecciones con los ejes, entonces, sus puntos de corte con los mismos deben ser de coordenadas $A(x_0, 0)$ y $B(0, x_0)$, así, su pendiente es igual a

$$m = \frac{x_0 - 0}{0 - x_0} = -\frac{x_0}{x_0} = -1.$$

Luego, la ecuación de la recta buscada es

$$y + 6 = -(x - 8) \qquad \Longrightarrow \qquad x + y - 2 = 0.$$

★

Ejemplo 6.12 *: Determine* a *de manera que la recta que pasa por* $(7, 1)$ *y* $(4, 8)$ *sea paralela a la recta que pasa por* $(2, a)$ *y* $(a, -2)$.

Solución : Es conocido que dos rectas son paralelas si sus pendientes son iguales, así,

- Sea L_1 la recta que pasa por los puntos $(7, 1)$ y $(4, 8)$, con lo que su pendiente viene dada por

$$m_{L_1} = \frac{8 - 1}{4 - 7} = \frac{7}{-3} = -\frac{7}{3}.$$

- Sea L_2 la recta que pasa por los puntos $(2, a)$ y $(a, -2)$, con lo que su pendiente viene dada por

$$m_{L_2} = \frac{a - (-2)}{2 - a} = \frac{a + 2}{2 - a}.$$

Entonces

$$m_{L_1} = m_{L_2} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{7}{3} = \frac{a + 2}{2 - a} \qquad \Longrightarrow \qquad -7(2 - a) = 3(2 + a)$$

$$\Longrightarrow \qquad -14 + 7a = 6 + 3a \qquad \Longrightarrow \qquad 7a - 3a = 6 + 14 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 5.$$

Por lo tanto, para $a = 5$ las rectas L_1 y L_2 son paralelas. ★

Ejemplo 6.13 *: Hallar el valor de* k *de tal forma que la gráfica de la ecuación lineal* $2x + ky + 1 = 0$, *sea perpendicular a* $-5x + 10y = 3$.

Solución : Es conocido que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a -1, es decir, si m_1 y m_2 son las pendientes de las rectas dadas, entonces

$$m_1 \cdot m_2 = -1,$$

así, buscamos las pendientes de las dos rectas dadas

- Recta $l_1 : 2x + ky + 1 = 0$: Despejamos y,

$$2x + ky + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad ky = -2x - 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \underbrace{-\frac{2}{k}}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Pendiente de la recta}}} x - \frac{1}{k}$$

- Recta $l_2 : -5x + 10y = 3$: Despejamos y,

$$-5x + 10y = 3 \quad \Longrightarrow \quad 10y = 5x + 3 \quad \Longrightarrow \quad y = \underbrace{\frac{5}{10}}_{\uparrow \atop \boxed{\text{Pendiente de la recta}}} x + \frac{3}{k}$$

así,

$$\text{Recta } \ l_1 : 2x + ky + 1 = 0 \qquad \text{tiene pendiente} \qquad m_1 = -\frac{2}{k}$$

$$\text{Recta } \ l_2 : -5x + 10y = 3 \qquad \text{tiene pendiente} \qquad m_2 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Luego, para que sean perpendiculares se debe cumplir que

$$\left(-\frac{2}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{k} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 1.$$

★

Ejemplo 6.14 *: Hallar el punto de intersección, si es que existe, entre las rectas de ecuaciones generales*

$$L_1 : \sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2 \qquad \text{y} \qquad L_2 : 2x + \sqrt{8}y = 0.$$

Solución : En primer lugar, verificamos que las rectas dadas no sean paralelas, para ello buscamos sus pendientes y verificamos que sean diferentes

- Para la recta $L_1 : \sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2$, despejamos la variable y.

$$\sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{2}y = 2 - \sqrt{8}x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}}\,x$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{2\sqrt{2}}{2} - \sqrt{4}\,x \quad \Longrightarrow \quad y = \sqrt{2} - 2x,$$

por lo tanto, $m_{L_1} = -2$.

- Para la recta $L_2 : 2x + \sqrt{8}y = 0$, despejamos la variable y.

$$2x + \sqrt{8}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{8}y = -2x \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{\sqrt{8}}\,x \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{\sqrt{8}}\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{8}}\,x$$

$$\Longrightarrow \quad y = -\frac{2\sqrt{8}}{8}\,x \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{\sqrt{8}}{4}\,x,$$

por lo tanto, $m_{L_2} = -\dfrac{\sqrt{8}}{4}$.

Así, $m_{L_1} \neq m_{L_2}$. Puesto que, las pendientes son diferentes, entonces las rectas se intersecan, por lo que existe un punto común entre ellas.

Para obtener dicho punto resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2 \\ 2x + \sqrt{8}y = 0 \end{cases} .$$

Por cursos previos, son conocidos tres métodos clásicos de resolución de sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas

- Método de reducción.
- Método de igualación.
- Método de sustitución.

Usando el método de sustitución. Despejamos una de las dos incógnitas en una de las dos ecuaciones, por ejemplo, despejamos la incógnita x de la segunda ecuación del sistema

$$2x + \sqrt{8}y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x = 0 - \sqrt{8}y \quad \Longrightarrow \quad 2x = -\sqrt{8}y \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{\sqrt{8}y}{2},$$

observemos que

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{2^2}\ \sqrt{2} = 2\sqrt{2},$$

por lo tanto,

$$x = -\frac{\sqrt{8}y}{2} = -\frac{2\sqrt{2}y}{2} = -\sqrt{2}y,$$

ahora, sustituimos este despeje en la primera ecuación $\sqrt{8}x + \sqrt{2}y = 2$, la cual es equivalente a $2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 2$ y resolvemos

$$2\sqrt{2}\left(-\sqrt{2}y\right) + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -2\sqrt{2}\ \sqrt{2}y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -2\left(\sqrt{2}\right)^2 y + \sqrt{2}y = 2$$

$$\Longrightarrow \quad -2\,(2)\,y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad -4y + \sqrt{2}y = 2 \quad \Longrightarrow \quad \left(\sqrt{2} - 4\right) y = 2$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{2} - 4} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2}{\left(\sqrt{2} - 4\right)} \frac{\left(\sqrt{2} + 4\right)}{\left(\sqrt{2} + 4\right)} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2} + 4\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - (4)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2} + 4\right)}{2 - 16} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{2\left(\sqrt{2} + 4\right)}{-14} \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{\sqrt{2} + 4}{7},$$

Sustituimos este valor en el despeje

$$x = -\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2} + 4}{7}\right) \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2} + 4\right)}{7} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2 + 4\sqrt{2}}{7}.$$

Luego, la solución del sistema es $x = \dfrac{2 + 4\sqrt{2}}{7}$, $\quad y = -\dfrac{\sqrt{2} + 4}{7}$.

Entonces, el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 es $\left(\dfrac{2 + 4\sqrt{2}}{7}, -\dfrac{\sqrt{2} + 4}{7}\right)$. ★

Ejemplo 6.15 : *Hallar el punto de intersección, si es que existe, entre las rectas de ecuaciones*

$$L_1 : 3x + 2y - 5 = 0 \qquad \text{y} \qquad L_2 : 2 - 6x - 4y = 0.$$

Solución : En primer lugar, verificamos que las rectas dadas no sean paralelas, para ello buscamos sus pendientes y verificamos si son diferentes.

- Para la recta $L_1 : 3x + 2y - 5 = 0$, despejamos la variable y.

$$3x + 2y - 5 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2y = 5 - 3x \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}\, x,$$

por lo tanto, $m_{L_1} = -\dfrac{3}{2}$.

- Para la recta $L_2 : 2 - 6x - 4y = 0$, despejamos la variable y.

$$2 - 6x - 4y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - 6x = 4y \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2}{4} - \frac{6}{4}\, x = y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\, x,$$

por lo tanto, $m_{L_2} = -\dfrac{3}{2}$.

Así, $m_{L_1} = m_{L_2}$, por lo tanto, las rectas son paralelas, así, **no** se intersectan. ★

Ejemplo 6.16 *: Demostrar que el ángulo águdo que forma las rectas de ecuaciones* $L_1 : y = m_1 x + b_1$ *y* $L_2 : y = m_2 x + b_2$ *está dado por la fórmula*

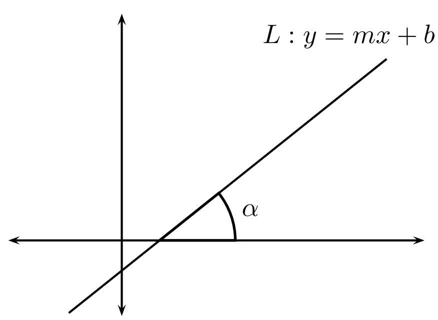
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$

donde $m_2 \geq m_1$*.*

Demostración : Es conocido que, si m es la pendiente de una recta L, entonces

$$m = \tan\ \alpha,$$

donde α es el ángulo que forma la recta con el eje de las abscisas, medido en sentido antihorario (sentido contrario a las manecillas del reloj).



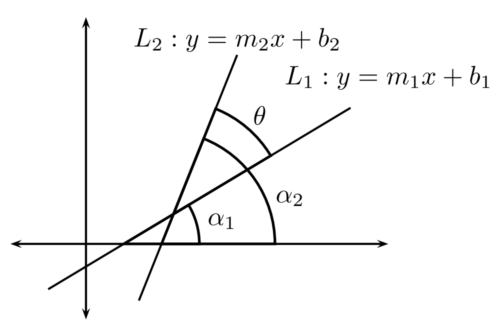
Sea θ el ángulo entre las rectas

$$L_1 : y = m_1 x + b_1 \qquad \text{y} \qquad L_2 : y = m_2 x + b_2.$$

así,

$$m_1 = \tan\ \alpha_1 \qquad \text{y} \qquad m_2 = \tan\ \alpha_2,$$

donde α_1 es el ángulo que forma la recta L_1 con el eje de las abscisas y α_2 es el ángulo que forma la recta L_2 con el eje de las abscisas, respectivamente.



Puesto que, $\theta = \alpha_2 - \alpha_1$, entonces

$$\tan\ \theta = \tan\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) = \frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1 + \left(\tan\alpha_2\right)\left(\tan\alpha_1\right)} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}.$$

★

Ejemplo 6.17 : *Hallar el ángulo agudo formado por las rectas* $L_1 : 4x - 9y + 11 = 0$ *y* $L_2 : 3x + 2y - 7 = 0$.

Solución : Por el ejemplo 6.16 debemos conocer las pendientes de las rectas dadas, para ello, despejamos la variable y de las ecuaciones generales de las rectas L_1 y L_2, el coeficiente de la variable x es la pendiente de las rectas.

- Para $L_1 : 4x - 9y + 11 = 0$, se tiene

$$4x - 9y + 11 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 4x + 11 = 9y \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{4}{9}\,x + \frac{11}{4},$$

  por lo que la pendiente de L_1 es $m_1 = \dfrac{4}{9}$.

- Para $L_2 : 3x + 2y - 7 = 0$, se tiene

$$3x + 2y - 7 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 2y = -3x + 7 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{3}{2}\,x + \frac{7}{2},$$

  por lo que la pendiente de L_2 es $m_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Observemos que $m_1 > m_2$, por lo que, el ángulo θ que forman las rectas L_1 y L_2 viene dado por

$$\theta = \alpha_1 - \alpha_2,$$

luego

$$\tan\theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{\dfrac{4}{9} - \left(-\dfrac{3}{2}\right)}{1 + \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{4}{9}\right)} = \frac{\dfrac{4}{9} + \dfrac{3}{2}}{1 - \dfrac{2}{3}} = \frac{\dfrac{35}{18}}{\dfrac{1}{3}} = \frac{35}{6},$$

así,

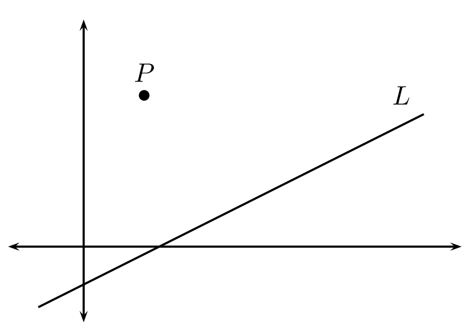
$$\tan\theta = \frac{35}{6} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \arctan\left(\frac{35}{6}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = 80^\circ 16'.$$

★

Ejemplo 6.18 : *Demuestre que si* $P(x_0, y_0)$ *es un punto del plano cartesiano que no pertenece a la recta de ecuación* $L : ax + by + c = 0$, *entonces la distancia entre el punto* P *y la recta* L, *que denotamos como* $d(P, L)$, *viene dada por*

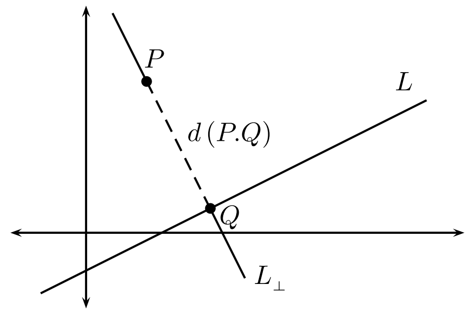
$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Demostración : Sea L una recta cualquiera de ecuación general $ax + by + c = 0$ y sea $P(x_0, y_0)$ un punto que no pertenece a la recta.



Deseamos hallar la distancia entre la recta L y el punto P.

Es conocido que la distancia mínima entre la recta y el punto se obtiene al trazar la perpendicular a L que pasa por P y calcular la distancia entre P y el punto de intersección entre las rectas L y la perpendicular antes mencionada.



Sea $Q(x_1, y_1)$ el punto de intersección entre la recta L y su perpendicular por el punto P, así,

$$d(P, L) = d(P, Q)$$

Buscamos la ecuación de la recta perpendicular a L, que pasa por P, es conocido que la pendiente de la recta perpendicular viene dada por

$$m_{\perp} m_{L} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\perp} = -\frac{1}{m_{L}},$$

donde m_L es la pendiente de la recta L, la cual viene dada por el coeficiente de la variable x al despejar la variable y de la ecuación general dada

$$ax + by + c = 0 \quad \Longrightarrow \quad by = -ax - c \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{a}{b}\, x - \frac{c}{b}. \quad \text{con } b \neq 0,$$

con lo que, $m_L = -\dfrac{a}{b}$, mientras que

$$m_{\perp} = -\frac{1}{m_{L}} = -\frac{1}{-\dfrac{a}{b}} = \frac{b}{a},$$

de aquí, la ecuación de la recta perpendicular a L que para por P viene dada por (ecuación punto-pendiente)

$$y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0),$$

la cual podemos expresar como

$$y = \frac{b}{a}\, x - \frac{b}{a}\, x_0 + y_0.$$

Buscamos el punto Q, punto de intersección entre L y su perpendicular,

$$L : y = -\frac{a}{b}\, x - \frac{c}{b} \qquad \text{y} \qquad L_{\perp} : y = \frac{b}{a}\, x - \frac{b}{a}\, x_0 + y_0,$$

usando el método de igualación obtenemos

$$\underbrace{-\frac{a}{b}\, x - \frac{c}{b}}_{\boxed{\text{Recta } L}} = \underbrace{\frac{b}{a}\, x - \frac{b}{a}\, x_0 + y_0}_{\boxed{\text{Recta } L_{\perp}}} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{c}{b} + \frac{b}{a}\, x_0 - y_0 = \frac{b}{a}\, x + \frac{a}{b}\, x,$$

multiplicamos por ab la igualdad

$$ab\left(-\frac{c}{b} + \frac{b}{a}\, x_0 - y_0\right) = ab\left(\frac{b}{a}\, x + \frac{a}{b}\, x\right) \quad \Longrightarrow \quad -\frac{abc}{b} + \frac{abb}{a}\, x_0 - aby_0 = \frac{abb}{a}\, x + \frac{aba}{b}\, x$$

$$\Longrightarrow \quad -ac + b^2 x_0 - aby_0 = b^2 x + a^2 x \quad \Longrightarrow \quad \left(a^2 + b^2\right) x = b^2 x_0 - aby_0 - ac$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{b^2 x_0 - aby_0 - ac}{a^2 + b^2}.$$

Sustituimos este valor de x en la ecuación de la recta L para obtener la coordenada y del punto Q

$$y = -\frac{a}{b}\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}\right) - \frac{c}{b} \implies y = -\frac{1}{b}\left(\frac{ab^2x_0 - a^2by_0 - a^2c}{a^2+b^2} + c\right)$$

$$\implies y = -\frac{1}{b}\left(\frac{ab^2x_0 - a^2by_0 - a^2c + ca^2 + cb^2}{a^2+b^2}\right) \implies y = -\frac{1}{b}\left(\frac{ab^2x_0 - a^2by_0 + cb^2}{a^2+b^2}\right)$$

$$\implies y = \frac{a^2y_0 - abx_0 - cb}{a^2+b^2}.$$

Luego, el punto Q tiene coordenadas $Q\left(\frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}, \frac{a^2y_0 - abx_0 - cb}{a^2+b^2}\right)$.

Calculamos la distancia entre los puntos P y Q

$$d(P.Q) = \sqrt{\left(x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(y_0 - \frac{a^2y_0 - abx_0 - cb}{a^2+b^2}\right)^2},$$

donde

$$x_0 - \frac{b^2x_0 - aby_0 - ac}{a^2+b^2} = \frac{a^2x_0 + b^2x_0 - b^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2} = \frac{a^2x_0 + aby_0 + ac}{a^2+b^2} = \frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2},$$

mientras que

$$y_0 - \frac{a^2y_0 - abx_0 - cb}{a^2+b^2} = \frac{a^2y_0 + b^2y_0 - a^2y_0 + abx_0 + cb}{a^2+b^2} = \frac{b^2y_0 + abx_0 + cb}{a^2+b^2} = \frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2},$$

con lo que

$$d(P.Q) = \sqrt{\left(\frac{a(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2}\right)^2 + \left(\frac{b(ax_0 + by_0 + c)}{a^2+b^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2+b^2)^2} + \frac{b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2(ax_0 + by_0 + c)^2 + b^2(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2+b^2)^2}} = \sqrt{\frac{(a^2+b^2)\,(ax_0 + by_0 + c)^2}{(a^2+b^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2}{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{(ax_0 + by_0 + c)^2}}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

es decir,

$$d(P.Q) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

puesto que, $d(P.Q) = d(P.L)$, se demuestra que

$$d(P.L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

★

Ejemplo 6.19 : *Halle la distancia entre el punto P y la recta L. Si $P(2,6)$ es un punto del plano cartesiano que no pertenece a la recta de ecuación $L: 4x + 3y = 12$.*

Solución : Es conocido que, la distancia entre el punto $P(x_0, y_0)$ y la recta $L: ax + by + c = 0$, viene dada por

$$d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

ver ejemplo 6.18, así, la distancia entre el punto $P(2,6)$ y la recta $L: 4x+3y=12$ es

$$d(P,L) = \frac{|4(2)+3(6)-12|}{\sqrt{(4)^2+(3)^2}} = \frac{|8+18-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|14|}{\sqrt{25}} = \frac{14}{5},$$

luego,

$$d(P,L) = \frac{14}{5}.$$

★

Ejemplo 6.20 *: Determinar todos los valores de k para que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(k,4)$ y $B(1,3-2k)$ sea menor que 5.*

Solución : Tenemos que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(k,4)$ y $B(1,3-2k)$ viene dada por

$$m = \frac{4-(3-2k)}{k-1} = \frac{1+2k}{k-1},$$

buscamos los valores de k que sean soluciones de la desigualdad

$$\frac{1+2k}{k-1} < 5,$$

de aquí,

$$\frac{1+2k}{k-1} < 5 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1+2k}{k-1} - 5 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1+2k-5(k-1)}{k-1} < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{6-3k}{k-1} < 0.$$

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $6-3k=0 \qquad \Longrightarrow \qquad k=2.$
- Denominador : $k-1=0 \qquad \Longrightarrow \qquad k=1.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$6-3k$	$+$	$+$	$-$
$k-1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$\text{sol}: k \in (1,2).$$

★

Ejemplo 6.21 *: El triángulo ABC tiene vértices $B(-6,-3)$ y $C(8,-4)$. La pendiente del lado $\overline{AB}$ es $1/2$ y la pendiente del lado $\overline{AC}$ es -2. Encuentre las coordenadas del punto A.*

Solución : Sea $A(x,y)$ el tercer vértice del triángulo, entonces de la hipótesis

$$\text{p : La pendiente del lado } \overline{AB} \text{ es } 1/2,$$

se tiene

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y-(-3)}{x-(-6)} = \frac{1}{2}, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{y+3}{x+6} = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad 2(y+3) = x+6 \qquad \Longrightarrow \qquad 2y-x=0$$

y de la hipótesis

$$\text{q : La pendiente del lado } \overline{AC} \text{ es } -2,$$

se tiene

$$m_{\overline{AC}} = \frac{y-(-4)}{x-8} = -2, \qquad \text{es decir,} \qquad \frac{y+4}{x-8} = -2 \quad \Longrightarrow \quad y+4 = -2\,(x-8) \quad \Longrightarrow \quad y+2x = 12.$$

La solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y + 2x = 12 \end{cases}$$

son las coordenadas del vértice A. Resolvemos el sistema usando el método de reducción

$$2\begin{cases} 2y - x = 0 \\ y + 2x = 12 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4y - 2x = \ \ 0 \\ \ \ y + 2x = 12 \end{cases}$$

$$5y \qquad = 12 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{12}{5},$$

sustituyendo y en la ecuación $2y - x = 0$, se tiene

$$2\left(\frac{12}{5}\right) - x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{24}{5}.$$

Luego, las coordenadas del vértice es $A\left(\frac{24}{5}, \frac{12}{5}\right)$. ★

Ejemplo 6.22 *: Identificar el radio y el centro de la circunferencia de ecuación* $(x+2)^2 + y^2 = 6$.

Solución : Es conocido que la ecuación de la circunferencia que tiene centro $P(x_0, y_0)$ radio $r = R$, viene dada por

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

de aquí,

$$(x+2)^2 + y^2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad (x - (-2))^2 + (y-0)^2 = \left(\sqrt{6}\right)^2,$$

con lo que concluimos que la circunferencia tiene centro $C(-2, 0)$ y radio $r = \sqrt{6}$. ★

Ejemplo 6.23 *: Diga si la ecuación* $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$, *representa una circunferencia. De ser así, halle su centro y radio.*

Solución : Tenemos que

$$2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 5x + 3y - \frac{15}{2} = 0,$$

así, $A = -5$, $B = 3$ y $C = \frac{15}{2}$, entonces

$$A^2 + B^2 - 4C = (-5)^2 + (3)^2 - 4\left(-\frac{15}{2}\right) = 25 + 9 + 30 = 64 > 0,$$

por lo que si representa una circunferencia. Para hallar el centro y el radio de la misma, completamos cuadrado

$$x^2 - 5x = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4},$$

mientras que,

$$y^2 + 3y = \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

por lo tanto, la ecuación $x^2 + y^2 - 5x + 3y - \dfrac{15}{2} = 0$, nos queda

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - \frac{15}{2} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 16,$$

luego, el centro es el punto $C\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{3}{2}\right)$ y el radio es $r = \sqrt{16} = 4$. ★

Ejemplo 6.24 *: Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2,3)$ y $B(-4,5)$. Halle la ecuación de la curva.*

Solución : Tenemos que, la longitud del diámetro es 2 veces el radio, es decir, $d = 2r$, de aquí,

$$d = d(A,B) = \sqrt{(-4-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \qquad \Longrightarrow \qquad r = \sqrt{10}.$$

El centro de la circunferencia es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, así,

$$C = \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = (-1, 4),$$

luego, la ecuación de la circunferencia es

$$(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

★

Ejemplo 6.25 *: Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-1,1)$, $Q(3,5)$ y $R(5,-3)$.*

Solución : Es conocido que la ecuación canónica de la circunferencia viene dada por

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

siempre que $A^2 + B^2 - 4C > 0$. Luego si los puntos P, Q, y R pertenecen a la circunferencia, ellos deben satisfacer la ecuación, entonces

- Para $(-1,1)$, se tiene $(-1)^2 + (1)^2 + A(-1) + B(1) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad -A + B + C = -2$
- Para $(3,5)$, se tiene $(3)^2 + (5)^2 + A(3) + B(5) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3A + 5B + C = -34$
- Para $(5,-3)$, se tiene $(5)^2 + (-3)^2 + A(5) + B(-3) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad 5A - 3B + C = -34$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l} -A + B + C = -2 \quad \Longrightarrow \quad C = A - B - 2 \\ 3A + 5B + C = -34 \\ 5A - 3B + C = -34 \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} 4A + 4B = -32 \\ 6A - 4B = -32 \end{array}\right. \\ \hline 10A = -64 \quad \Longrightarrow \quad A = -\dfrac{32}{5}. \end{array}$$

Si $A = -\dfrac{32}{5}$, entonces, al sustituir en la ecuación $4A + 4B = -32$, obtenemos

$$4\left(-\frac{32}{5}\right) + 4B = -32 \qquad \Longrightarrow \qquad B = -\frac{8}{5},$$

sustituyendo en la ecuación $C = A - B - 2$, el valor de A y B, se tiene el valor de C.

$$C = \left(-\frac{32}{5}\right) - \left(-\frac{8}{5}\right) - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{32}{5}$$

La ecuación es

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}\,x - \frac{8}{5}\,y - \frac{32}{5} = 0.$$

Completamos cuadrado para obtener el centro y el radio, es conocido que si

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

entonces, para la expresión $x^2 - \frac{32}{5}\,x$, se tiene que, para $a = 1$, $b = -\frac{32}{5}$ y $c = 0$,

$$x^2 - \frac{32}{5}\,x = \left(x + \frac{-12/5}{2\,(1)}\right)^2 + (0) - \frac{(-32/5)^2}{4\,(1)} = \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{256}{25},$$

por otro lado, para la expresión $y^2 - \frac{8}{5}\,y$, se tiene que, para $a = 1$, $b = -\frac{8}{5}$ y $c = 0$,

$$y^2 - \frac{8}{5}\,y = \left(y + \frac{-8/5}{2\,(1)}\right)^2 + (0) - \frac{(-8/5)^2}{4\,(1)} = \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{25},$$

así,

$$x^2 + y^2 - \frac{32}{5}\,x - \frac{8}{5}\,y - \frac{32}{5} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x^2 - \frac{32}{5}\,x\right) + \left(y^2 - \frac{8}{5}\,y\right) - \frac{32}{5} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \frac{256}{25}\right) + \left(\left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{16}{25}\right) - \frac{32}{5} = 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 - \frac{432}{25} = 0,$$

de aquí,

$$\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{432}{25},$$

así, el centro es $C\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$ y el radio $r = \frac{\sqrt{432}}{5}$. ★

Ejemplo 6.26 : *Hallar el(los) punto(s) de intersección, si existe, entre las circunferencias de ecuaciones*

$$x^2 + y^2 = 4 \qquad y \qquad x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0.$$

Solución : Debemos encontrar los puntos donde las circunferencias dadas se tocan. para ello sustituimos, por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ en la circunferencia de ecuciaón $x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0$, es decir,

$$x^2 - 6x + y^2 + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \left(x^2 + y^2\right) - 6x + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (4) - 6x + 4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{4}{3},$$

de aquí, al sustituir en algunas de las ecuaciones de las circunferencias dadas encontramos el(los) valor(es) de la coordenada y del(los) punto(s) de intersección, por ejemplo, sustituimos en la ecuación $x^2 + y^2 = 4$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{16}{9} + y^2 = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 4 - \frac{16}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = \frac{20}{9}$$

$$\Longrightarrow \qquad y = \pm\sqrt{\frac{20}{9}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\frac{\sqrt{4 \cdot 5}}{\sqrt{9}} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \pm\frac{2\sqrt{5}}{3},$$

entonces, los puntos de intersección entre las circunferencias son $P\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ y $Q\left(\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$. ★

Ejemplo 6.27 *: Hallar el(los) punto(s) de intersección entre la recta de ecuación $x+3y-5=0$ y la circunferencia de centro $C(1,-2)$ y radio $r=\sqrt{10}$.*

Solución : Tenemos que la ecuación de la circunferencia de centro $C(1,-2)$ y radio $r=\sqrt{10}$, viene dada por

$$(x-1)^2+(y+2)^2=10.$$

Para hallar el(los) puntos(s) de intersección sustituimos la recta en la circunferencia, es decir, despejamos una de las variables de la ecuación de la recta y la sustituimos en la ecuación de la circunferencia, por ejemplo, despejamos la variable x,

$$x+3y-5=0 \quad\Longrightarrow\quad x=5-3y,$$

sustituimos en la ecuación de la circunferencia

$$(x-1)^2+(y+2)^2=10 \quad\Longrightarrow\quad (5-3y-1)^2+(y+2)^2=10 \quad\Longrightarrow\quad (4-3y)^2+(y+2)^2=10,$$

desarrollando

$$(4-3y)^2+(y+2)^2=10 \quad\Longrightarrow\quad 16-24y+9y^2+y^2+4y+4=10 \quad\Longrightarrow\quad 10y^2-20y+20=10$$

$$\Longrightarrow\quad y^2-2y+2=1 \quad\Longrightarrow\quad y^2-2y+1=0 \quad\Longrightarrow\quad (y-1)^2=0$$

$$\Longrightarrow\quad \sqrt{(y-1)^2}=\sqrt{0} \quad\Longrightarrow\quad |y-1|=0 \quad\Longrightarrow\quad y=1.$$

Sustituimos este valor de y en la ecuación de la recta o en la ecuaicón de la circunferencia para obtener la(s) coordenada(s) x del(los) punto(s) de intersección, sustituimos en la recta

$$x=5-3(1) \quad\Longrightarrow\quad x=5-3 \quad\Longrightarrow\quad x=2,$$

luego, el punto de intersección entre la recta de ecuación $x+3y-5=0$ y la circunferencia de centro $C(1,-2)$ y radio $r=\sqrt{10}$ es $P(2,1)$. ★

Ejemplo 6.28 *: Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y-39=0$ en el punto $(4,5)$.*

Solución : En primer lugar, veamos si el punto $P(4,5)$ pertenece a la circunferencia, para ello sustituimos en la ecuación de la misma

$$(4)^2+(5)^2+2(4)-2(5)-39=16+25+8-10-39=39-39=0,$$

como cumple con la ecuación de la circunferencia, entonces P es punto de tangencia.

Así, la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de tangencia es perpendicular a la recta buscada, calculamos la pendiente de la recta radial.

Buscamos el centro de la circunferencia, para ello, completamos cuadrados en la variable x y en y.

$$x^2+2x=(x+1)^2-1,$$

mientras que,

$$y^2-2y=(y-1)^2-1,$$

luego,

$$x^2+y^2+2x-2y-39=0 \quad\Longrightarrow\quad (x+1)^2-1+(y-1)^2-1-39=0 \quad\Longrightarrow\quad (x+1)^2+(y-1)^2=41,$$

así, el centro de la circunferencia es $C(-1,1)$, por lo tanto la pendiente de la recta radial, la cual vamos a denotar por $m_{\overline{PC}}$, viene dada por

$$m_{\overline{PC}} = \frac{5-1}{4-(-1)} = \frac{4}{5},$$

con lo que, la pendiente de la recta tangente, la cual denotamos por, m_{tan}, debe cumplir con

$$m_{\overline{PC}} \cdot m_{tan} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{tan} = -\frac{1}{m_{\overline{PC}}}$$

se tiene que

$$m_{tan} = -\frac{1}{\frac{4}{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{tan} = -\frac{5}{4}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente buscada es

$$y - 5 = -\frac{5}{4}(x-4),$$

y la ecuación general es

$$5x + 4y - 40 = 0.$$

★

Ejemplo 6.29 *: Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia* $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10$ *en el punto* $(2,1)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto $P(2,1)$ pertenece a la circunferencia, para ello sustituimos en la ecuación de la misma

$$((2)-1)^2 + ((1)+2)^2 = (1)^2 + (3)^2 = 1 + 9 = 10,$$

como cumple con la ecuación de la circunferencia, entonces P es punto de tangencia.

Así, la recta que pasa por el centro de la circunferencia y el punto de tangencia (recta radial) es perpendicular a la recta buscada, calculamos la pendiente de la recta radial.

Buscamos el centro de la circunferencia, como la ecuación de la circunferencia es

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 10,$$

tenemos que, el centro de la circunferencia es $C(1,-2)$, por lo tanto la pendiente de la recta radial, la cual vamos a denotar por $m_{\overline{PC}}$, viene dada por

$$m_{\overline{PC}} = \frac{-2-1}{1-2} = \frac{-3}{-1} = 3,$$

con lo que, la pendiente de la recta tangente, la cual denotamos por, $m_{\tan}$, debe cumplir con

$$m_{\overline{PC}} \cdot m_{\tan} = -1 \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\tan} = -\frac{1}{m_{\overline{PC}}}$$

se tiene que,

$$m_{\tan} = -\frac{1}{3}$$

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente buscada es

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x-2),$$

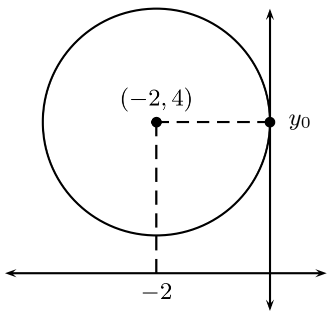
y la ecuación general es

$$x + 3y - 5 = 0.$$

★

Ejemplo 6.30 *: Halle la ecuación de la circunferencia de centro* $(-2,4)$ *y que es tangente al eje* y*.*

Solución : Como la circunferencia es tangente al eje y, es decir, es tangente a la recta $x=0$, entonces el punto de tangencia, P, viene dado por $P(0,y_0)$.



Como la recta, L, que pasa por el centro y el punto de tangencia debe ser perpendicular al eje y concluimos que la recta L debe ser una recta horizontal con ecuación $y=4$, luego $y_0=4$, entonces

$$r = d(C,P) = \sqrt{(-2-0)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Así, la ecuación de la circunferencia es

$$(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4.$$

★

Ejemplo 6.31 *: Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a* $x^2+y^2=25$ *que pasan por el punto* $(7,-1)$*.*

Solución : En primer lugar, veamos si el punto $A(7,-1)$ pertenece a la circunferencia, para ello sustituimos en la ecuación de la misma

$$(7)^2 + (-1)^2 = 49 + 1 = 50 \neq 25,$$

como **no** cumple con la ecuación de la circunferencia, entonces A **no** es punto de tangencia.

Sea $P(x_0,y_0)$, el punto de tangencia de la recta tangente y la circunferencia. Observe que dicho punto debe pertenecer a la circunferencia, por lo que satisface la ecuación de la misma, así,

$$x_0^2 + y_0^2 = 25,$$

por otra parte, es conocido que la recta tangente a la circunferencia es perpendicular a la recta radial que pasa por el centro de la circunferencia, $C(0,0)$ y el punto de tangencia $P(x_0,y_0)$, la pendiente de la recta radial, que denotamos por $m_{\overline{PC}}$, viene dada por

$$m_{\overline{PC}} = \frac{y_0-0}{x_0-0} = \frac{y_0}{x_0},$$

por lo tanto, la pendiente de la recta tangente, que denotamos por m_{tan}, es

$$m_{tan} = -\frac{1}{m_{\overline{PC}}} = -\frac{1}{\dfrac{y_0}{x_0}} = -\frac{x_0}{y_0}$$

entonces, la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2=25$ en el punto P tiene ecuación

$$y - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}(x-x_0),$$

Esta recta tangente pasa por el punto A, así, que este punto también debe satisfacer la ecuación de la tangente, con lo que

$$(-1) - y_0 = -\frac{x_0}{y_0}((7)-x_0) \quad \Longrightarrow \quad y_0(-1-y_0) = -x_0(7-x_0) \quad \Longrightarrow \quad -y_0 - y_0^2 = -7x_0 + x_0^2$$

$$\Longrightarrow \quad -y_0 + 7x_0 = \underbrace{x_0^2 + y_0^2}_{\boxed{x_0^2+y_0^2=25}} \quad \Longrightarrow \quad -y_0 + 7x_0 = 25,$$

de aquí, $y_0 = 7x_0 - 25$. Sustituimos en la ecuación de la circunferencia

$$x_0^2 + (7x_0 - 25)^2 = 25 \quad \Longrightarrow \quad x_0^2 + 49x_0^2 - 350x_0 + 625 = 25 \quad \Longrightarrow \quad 50x_0^2 - 350x_0 + 600 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x_0^2 - 7x_0 + 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x_0 - 3)(x_0 - 4) = 0,$$

así, hay dos valores para la abscisa del punto de tangencia: $x_0 = 3$ y $x_0 = 4$.

- Para $x_0 = 3$: Se tiene que

$$y_0 = 7(3) - 25 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = -4 \qquad \text{y} \qquad m_{tan} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

  La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(3, -4)$ es

$$y - (-4) = \frac{3}{4}(x - (3)) \quad \Longrightarrow \quad y + 4 = \frac{3}{4}(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{4y - 3x + 25 = 0.}$$

- Para $x_0 = 4$: Se tiene que

$$y_0 = 7(4) - 25 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 3 \qquad \text{y} \qquad m_{tan} = -\frac{4}{3}.$$

  La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(3, -4)$ es

$$y - (3) = -\frac{4}{3}(x - (4)) \quad \Longrightarrow \quad y - 3 = -\frac{4}{3}(x - 4) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{3y + 4x - 25 = 0.}$$

★

Ejemplo 6.32 *: La ecuación de una circunferencia es* $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$. *Halle la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia que pasa(n) por el punto* $(3, 3)$.

Solución : En primer lugar, veamos si el punto $A(3, 3)$ pertenece a la circunferencia, para ello sustituimos en la ecuación de la misma

$$((3) + 2)^2 + ((3) - 3)^2 = (5)^2 + (0)^2 = 25 \neq 5,$$

como **no** cumple con la ecuación de la circunferencia, entonces A **no** es punto de tangencia.

Sea $P(x_0, y_0)$, el punto de tangencia de la recta tangente y la circunferencia. Observe que dicho punto debe pertenecer a la circunferencia, por lo que satisface la ecuación de la misma, así,

$$(x_0 + 2)^2 + (y_0 - 3)^2 = 5,$$

por otra parte, es conocido que la recta tangente a la circunferencia es perpendicular a la recta radial que pasa por el centro de la circunferencia, $C(-2, 3)$ y el punto de tangencia $P(x_0, y_0)$, la pendiente de la recta radial, que denotamos por $m_{\overline{PC}}$, viene dada por

$$m_{\overline{PC}} = \frac{y_0 - 3}{x_0 - (-2)} = \frac{y_0 - 3}{x_0 + 2},$$

por lo tanto, la pendiente de la recta tangente, que denotamos por $m_{\tan}$, es

$$m_{\tan} = -\frac{1}{m_{\overline{PC}}} = -\frac{1}{\dfrac{y_0 - 3}{x_0 + 2}} = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 3}$$

entonces, la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$ en el punto P tiene ecuación

$$y - y_0 = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 3}(x - x_0),$$

Esta recta tangente pasa por el punto A, así, que este punto también debe satisfacer la ecuación de la tangente, con lo que

$$
\begin{aligned}
(3) - y_0 = -\frac{x_0+2}{y_0-3}\left((3)-x_0\right) \quad &\Longrightarrow \quad (y_0-3)(3-y_0) = -(x_0+2)(3-x_0) \\
&\Longrightarrow \quad -(y_0-3)(y_0-3) = -(x_0+2)(3-x_0) \\
&\Longrightarrow \quad -(y_0-3)^2 = -(x_0+2)(3-x_0) \\
&\Longrightarrow \quad (y_0-3)^2 = (x_0+2)(3-x_0),
\end{aligned}
$$

como,

$$
(x_0+2)^2 + (y_0-3)^2 = 5 \qquad \text{entonces,} \qquad (y_0-3)^2 = 5-(x_0+2)^2,
$$

así,

$$
\begin{aligned}
(3) - y_0 = -\frac{x_0+2}{y_0-3}\left((3)-x_0\right) \quad &\Longrightarrow \quad \overbrace{(y_0-3)^2}^{\boxed{(y_0-3)^2=5-(x_0+2)^2}} = (x_0+2)(3-x_0) \\
&\Longrightarrow \quad 5-(x_0+2)^2 = (x_0+2)(3-x_0) \\
&\Longrightarrow \quad 5-\left(x_0^2+4x_0+4\right) = 3x_0 - x_0^2 + 6 - 2x_0 \\
&\Longrightarrow \quad 5 - x_0^2 - 4x_0 - 4 - x_0 + x_0^2 - 6 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad -5x_0 - 5 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -1,
\end{aligned}
$$

puesto que, $x_0 = -1$. Sustituimos en la ecuación $(y_0-3)^2 = 5-(x_0+2)^2$ y obtenemos

$$
\begin{aligned}
(y_0-3)^2 = 5-(x_0+2)^2 \quad &\Longrightarrow \quad (y_0-3)^2 = 5-((-1)+2)^2 \quad \Longrightarrow \quad (y_0-3)^2 = 5-(1)^2 \\
&\Longrightarrow \quad (y_0-3)^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{(y_0-3)^2-4}_{\boxed{\text{Suma por su diferencia}}} = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (y_0-3-2)(y_0-3+2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad (y_0-5)(y_0-1) = 0,
\end{aligned}
$$

así, hay dos valores para la ordenada del punto de tangencia: $y_0 = 5$ y $y_0 = 1$.

- Para el punto de tangencia $P(x_0,y_0) = P(-1,5)$: Se tiene que

$$
m_{\tan} = -\frac{x_0+2}{y_0-3} \quad \Longrightarrow \quad m_{\tan} = -\frac{-1+2}{5-3} = -\frac{1}{2}.
$$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(-1,5)$ es

$$
y-(5) = -\frac{1}{2}(x-(-1)) \quad \Longrightarrow \quad y-5 = -\frac{1}{2}(x+1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x+2y-9=0.}
$$

- Para el punto de tangencia $P(x_0,y_0) = P(-1,1)$: Se tiene que

$$
m_{\tan} = -\frac{x_0+2}{y_0-3} \quad \Longrightarrow \quad m_{\tan} = -\frac{-1+2}{1-3} = \frac{1}{2}.
$$

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en el punto $P(-1,1)$ es

$$
y-(1) = \frac{1}{2}(x-(-1)) \quad \Longrightarrow \quad y-1 = \frac{1}{2}(x+1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x-2y+3=0.}
$$

★

Ejercicios

1. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que
   (a) Se conserva siempre a 2 unidades a la izquierda del eje y.
   (b) Está siempre 4 unidades arriba del eje x.
   (c) Está a igual distancia de los ejes x y y.
2. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que:
   (a) Su abscisa es siempre igual al doble de su ordenada.
   (b) Su ordenada es siempre igual a su abscisa incrementada en 2.
   (c) Su abscisa es siempre igual a la recíproca de su ordenada.
3. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje y disminuida en 3 es siempre igual al doble de su distancia al eje x. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
4. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto P que se mueve de tal manera que se conserva siempre a una distancia constante, r, de un punto fijo, $C(x_0, y_0)$, del plano.
5. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al origen es siempre igual a 2. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
6. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(2,3)$ es siempre igual a 5. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
7. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto $P(x,y)$ que se mueve en un plano de tal manera que dado otro punto $P_1(x_1, y_1)$ el cociente
   $$\frac{y-y_1}{x-x_1}, \qquad \text{con} \quad x \neq x_1,$$
   siempre es constante.
8. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que se conserva siempre equidistante de los dos puntos $A(1,-2)$ y $B(5,4)$.
9. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2,-2)$ es siempre igual a un tercio de su distancia al punto $Q(4,1)$.
10. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que el cuadrado de su distancia al punto $(4,1)$ es siempre igual a su distancia del eje y.
11. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que su distancia al eje x es igual a 5 veces su distancia del eje y.
12. ¿Qué lugar geométrico describe el punto $P(x,y)$ si su distancia al punto $R(-3,0)$ es cuatro veces su distancia al punto $Q(3,0)$?
13. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al eje x es siempre igual a su distancia del punto $A(0,4)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
14. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(3,5)$ y $B(-4,2)$ es siempre igual a 30.
15. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los dos puntos $A(2,-2)$ y $B(4,1)$ es siempre igual a 12. (Dos casos)
16. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $P(2,4)$ es siempre igual a su distancia del eje y aumentada en 3. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

17. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $P(3,0)$ y $Q(-3,0)$ es siempre igual a 8.

18. Hallar la ecuación del lugar geométrico de un punto que se mueve de tal manera que la suma de sus distancias a los dos puntos $A(0,3)$ y $B(0,-3)$ es siempre igual a 8. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 17.

19. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $R(3,0)$ y $T(-3,0)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

20. Un punto se mueve de tal manera que la diferencia de sus distancias a los dos puntos $R(0,3)$ y $T(0,-3)$ es siempre igual a 4. Hallar la ecuación de su lugar geométrico. Compare el resultado con el obtenido en el ejercicio 19.

21. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(3,1)$ es siempre igual a la mitad de su distancia al eje y. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

22. Un segmento rectilíneo de longitud 4 se mueve de tal manera que uno de los puntos extremos permanece siempre sobre el eje x y el otro permanece siempre sobre el eje y. Hallar la ecuación del lugar geométrico del punto medio del segmento.

23. Un punto se mueve de tal manera que su distancia al punto $A(-1,2)$ es siempre el doble de su distancia al eje x. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.

24. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a los tres puntos $A(0,3)$, $B(3,0)$ y $C(-2,-2)$ es siempre igual a 30.

25. Diga el ángulo de inclinación de cada una de las siguientes rectas dirigidas: **a)** el eje x, **b)** el eje y, **c)** una recta paralela al eje x y dirigida hacia la derecha, **d)** una recta paralela al eje x y dirigida hacia la izquierda.

26. Diga la pendiente de cada una de las siguientes rectas dirigidas: **a)** el eje x, **b)** la recta paralela al eje x y dirigida ya sea a la derecha o a la izquierda, **c)** la recta que pasa por el origen y biseca (divide en dos partes iguales) al 1^{er} cuadrante, **d)** la recta que pasa por el origen y biseca al cuadrante II.

27. Hallar la pendiente y el ángulo de inclinación de la recta que pasa por los puntos $P(-3,2)$ y $Q(7,-3)$.

28. Hallar la ecuación que debe satisfacer cualquier punto $P(x,y)$ que pertenezca a la recta que pasa por el punto $A(3,-1)$ y que tiene una pendiente igual a 4.

29. Encuentre la ecuación pendiente-intersección de la recta que pasa por los puntos dados

1. $(0,0),(4,6)$	2. $(3,0),(6,9)$	3. $\left(\frac{1}{2},4\right),\left(-\frac{3}{2},8\right)$	4. $(-3,2),(1,2)$
5. $(1,-5),(6,2)$	6. $(4,1),(6,-2)$	7. $\left(\frac{1}{2},-4\right),\left(-\frac{3}{2},2\right)$	8. $(10,2),(-2,2)$

30. Hallar el ángulo de inclinación de las rectas obtenidas en el ejercicio 29

31. Determine $P_2(x_2,y_2)$ empleando la información dada.

1. $P_1(-3,2)$, $\triangle x = 4$, $\triangle y = 6$	2. $P_1(0,5)$, $\triangle x = 0$, $\triangle y = -4$
3. $P_1(3,-2)$, $\triangle x = 2$, $\triangle y = \frac{1}{2}$	4. $P_1(0,7)$, $\triangle x = -2$, $\triangle y = -3$

32. Halle una ecuación de la recta que satisfaga las condiciones dadas

(a) Pasa por $(2,1)$, pendiente -3	(b) Pasa por $(8,-7/2)$, pendiente 0
(c) Pasa por $(5,-2)$ y $(1,2)$	(d) Pendiente 4 y pasa por $(2,-3)$
(e) Pasa por $(3,-1)$ y $(3,5)$	(f) Abscisa en el origen igual a 4, pendiente -2

(g) Ordenada en el origen (intersección con y) igual a 6, pendiente 2

(h) Pasa por $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$, abscisa en el origen (intersección x) igual a $-\frac{1}{6}$

(i) Pendiente 0 y pasa por $(-5, -1/2)$

(j) Intersección eje x es -3 y con el eje y es 4

(k) Pasa por $(1, 3)$, $\triangle x = 3$, $\triangle y = 9$

(l) Pasa por $(-3, -4)$ y es paralela al eje x

(m) Tiene iguales intersecciones con los ejes y pasa por $(8, -6)$

(n) Pasa por $(1/2, -1)$, perpendicular a $3x + 4y - 12 = 0$

(o) Tiene un ángulo de inclinación igual a $\frac{\pi}{6}$ y abscisa en el origen igual a -3

(p) Pasa por $\left(-\frac{7}{3}, \frac{3}{8}\right)$, paralela al eje y

(q) Pasa por $(9, 3)$, pendiente indefinida

(r) Abscisa en el origen $\frac{1}{3}$, ordenada en el origen 2

(s) Pasa por $(1, 2)$, paralela a $2x + 3y = 6$

(t) Pasa por $(4, 4)$, paralela a $x - 3y = 0$

(u) Pasa por $(-3, -4)$ y es paralela al eje y

(v) Pasa por $(2, 3)$ y por el punto común a $x + y = 1$ y $2x + y = 5$

(w) Pasa por $(4, 2)$ paralelamente a la recta que pasa por $(5, 1)$ y $(-1, 7)$

(x) Pasa por el punto común a $2x + 3 = 0$ y $y + 6 = 0$, pendiente -2

33. Una recta pasa por los dos puntos $T(-2, -3)$, $U(4, 1)$. Si un punto de abscisa 10 pertenece a la recta, ¿cuál es su ordenada?.

34. Una recta de pendiente 3 pasa por el punto $P(3, 2)$. La abscisa de otro punto de la recta es 4. Hallar su ordenada.

35. ¿Cuál es la pendiente de una recta si cruza el eje x en 6 y el eje y en -2?

36. Una recta con pendiente -3 cruza el eje x en $(8, 0)$. ¿En qué punto cruza el eje y?

37. Una recta con pendiente -1 contiene a $P(5, -2)$. Encuentre x si la recta también contiene al punto $(x, 8)$.

38. Demostrar que el ángulo águdo que forma las rectas de ecuaciones $L_1 : y = m_1 x + b_1$ y $L_2 : y = m_2 x + b_2$ está dado por la fórmula
$$\tan\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2},$$
donde $m_2 \geq m_1$ y $1 + m_1 m_2 \neq 0$.

39. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $L_1 : 4x - 9y + 11 = 0$ y $L_2 : 3x + 2y - 7 = 0$.

40. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $L_1 : x - y + 1 = 0$ y $L_2 : 2x + 2y + 7 = 0$.

41. Hallar el ángulo agudo formado por las rectas $L_1 : 4x + 2y - 3 = 0$ y $L_2 : 3x + y = 0$.

42. Demuestre que si L_1 y L_2 son rectas paralelas, entonces sus pendientes son iguales.

43. Demuestre que si L_1 y L_2 son rectas perpendiculares, entonces el producto de sus pendientes es igual a -1.

44. Encuentre y de manera que la recta que pasa por $(-4, -3)$ y $(8, y)$ sea paralela a la recta que pasa por $(4, -4)$ y $(3, 5)$.

45. Encuentre y de manera que la recta que pasa por $(-2, -1)$ y $(10, y)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(6, -2)$ y $(5, 7)$.

46. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $(2,7)$ y por los puntos A y B. Si la ordenada de A es 3 y la abscisa de B es 6. ¿Cuál es la abscisa de A y la ordenada de B?

47. Encuentre el área de un triángulo formado por los ejes x y y y la recta $y = x - 5$.

48. Demostrar que la recta que pasa por los dos puntos $A(-2,5)$ y $B(4,1)$ es perpendicular a la que pasa por los dos puntos $C(-1,1)$ y $D(3,7)$.

49. Una recta l_1 pasa por los puntos $A(3,2)$ y $B(-4,-6)$ y otra recta l_2 pasa por el punto $C(-7,1)$ y el punto D cuya ordenada es -6. Hallar la abscisa del punto D, sabiendo que l_1 es perpendicular l_2.

50. Calcular el valor de A y B de la recta $Ax + By + 38 = 0$, si debe pasar por los puntos $P(-3,1)$ y $Q(1,6)$.

51. Si las coordenadas de A y B son $(0,4)$ y $(-5,1)$ y si el lado $\overline{AB}$ es perpendicular a $\overline{AC}$, encuentre el punto en el que $\overline{AC}$ cruza el eje x

52. Determinar las ecuaciones de las rectas de pendiente igual a $-\frac{3}{4}$ que forman con los ejes coordenadas un triángulo de área igual a 24 unidades cuadradas.

53. Calcular la ecuación de la recta que pasa por $D(4,4)$ y determine con los ejes coordenados un segmento de $6\sqrt{5}$ unidades de longitud.

54. Determine a de manera que la recta que pasa por $(7,1)$ y $(4,8)$ sea paralela a la recta que pasa por $(2,a)$ y $(a,-2)$.

55. Determine b de manera que la recta que pasa por $(2,3)$ y $(4,-5)$ sea perpendicular a la recta que pasa por $(4,-5)$ y (b,b).

56. ¿Cuál es la abscisa en el origen de una recta de pendiente igual a -3 y ordenada en el origen igual a 4?

57. Las coordenadas de los puntos A, B y C son $(-3,2)$, $(4,-2)$ y $(0,6)$, respectivamente. Encuentre D de manera que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y D esté sobre el eje x.

58. Halle una ecuación de la recta que pasa por los puntos medios de los segmentos rectilineos comprendidos entre las intersecciones x y y de $3x + 4y = 12$ y $x + y = -6$.

59. Halle una ecuación de la recta que pasa por el punto medio del segmento de recta que va de $(-1,3)$ a $(4,8)$ y es perpendicular a dicho segmento.

60. Determinar las condiciones necesarias para que las rectas $L_1 : Kx + \dfrac{y}{K} - K = 0$ y $L_2 : Ax - Ky + K = 0$ sean perpendiculares.

61. Dada la recta $K^2 x + (K+1)y + 3 = 0$, determinar los valores de K y las ecuaciones correspondientes de dichas rectas, si debe ser perpendicular a la recta $4x - 2y - 11 = 0$.

62. Trace la gráfica de la recta que tenga la ecuación dada. Determine la pendiente y las coordenadas en el origen.

    1. $y = 2x - 1$; 2. $y = -\dfrac{1}{2}x$; 3. $2y + 5 = 0$; 4. $y = -2x + 5$; 5. $x - 2 = 0$;

63. Trace la gráfica de la recta que pasa por $(2,1)$ y tiene pendiente igual a $-2/5$.

64. El punto $(-2,3)$ ¿Está arriba o abajo de la recta $y + 5x = 2$?

65. Determine si los puntos dados son colineales: **a)** $(0,-4)$, $(1,-1)$, $(3,5)$; **b)** $(-2,3)$, $(1,3/2)$, $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$.

66. Demuestre que los puntos $A(2,-1)$, $B(3,2)$ y $C\left(\dfrac{2}{3},-5\right)$ son colineales.

67. Dados los puntos $P(4,2)$, $Q(-2,-1)$ y $R(6,3)$. Verificar que los tres puntos pertenecen a la misma recta, es decir, son colineales.

68. Halle el valor de k de tal forma que la gráfica de la ecuación lineal dada satisfaga la condición indicada

(a) $kx+3y=1$, pasa por $(5,1)$ (b) $x-ky+3=0$, ordenada en el origen -4

(c) $kx+\sqrt{3}y=k$, pendiente $\sqrt{3}$ (d) $2x+ky+1=0$, perpendicular a $-5x+10y=3$

(e) $kx+y=0$, paralela a $3x-7y=12$ (f) $-x+7y=k$, abscisa en el origen $3/2$

69. Hallar el punto de intersección, si es que existe, entre las rectas de ecuaciones generales

$$L_1: \sqrt{8}x+\sqrt{2}y=2 \qquad \text{y} \qquad L_2: 2x+\sqrt{8}y=0.$$

70. Hallar el punto de intersección, si es que existe, entre las rectas de ecuaciones generales

$$L_1: x+y=7 \qquad \text{y} \qquad L_2: 2x+2y=14.$$

71. Hallar el punto de intersección, si es que existe, entre las rectas

$$L_1: 5x-2y=4 \qquad \text{y} \qquad L_2: x+4y=1.$$

72. Encuentre las coordenadas del punto de intersección. Después escriba la ecuación de la recta que pasa por ese punto y sea perpendicular a la primera de las rectas dadas

1. $\begin{cases} y-5=0 \\ y=-4x-3 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x+5y=19 \\ -7x+2y=-8 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 5x-2y=5 \\ 2x+3y=6 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} 6x=5y+6 \\ 26x+15y=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5y-2x=17 \\ x+3y=8 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x+2y=-5 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7 \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3y-7x=41 \\ 5x+y=5 \end{cases}$

73. Si los puntos $A(-1,a)$, $B(a,1)$ y $C(3a,-a)$ son colineales, siendo $a>0$. Determinar el valor de a.

74. Demuestre que si $P(x_0,y_0)$ es un punto del plano cartesiano que no pertenece a la recta de ecuación $L: ax+by+c=0$, entonces la distancia entre el punto P y la recta L, que denotamos como $d(P,L)$, viene dada por

$$d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

75. Hallar la distancia entre la recta de ecuación $L: y=-2x+5$ y el punto $P(0,3)$.

76. Si $P(2,6)$ es un punto del plano cartesiano que no pertenece a la recta de ecuación

$$L: 4x+3y=12.$$

Halle la distancia entre el punto P y la recta L.

77. Hallar la distancia entre la recta de ecuación $L: y=3x-4$ y el punto $P(1,-1)$.

78. Dados los puntos $A(4,2)$, $B(-2,6)$ y $C(2,-4)$, obtener la ecuación de la recta que:

1. Pasa por B, es paralela a $\overline{AC}$
2. Pasa por B y es paralela al eje x
3. Pasa por A, es perpendicular a $\overline{BC}$
4. Pasa por C y por el punto medio de $\overline{AB}$
5. Pasa por A, es paralela al eje y

79. Escriba la ecuación de la recta que pasa por $(0,-2)$ y que es perpendicular a la recta $2y+x+3=0$.

80. Determinar el valor de K para que los puntos $A(1,3)$, $B(5,7)$ y $C(2,K)$ sean colineales.

81. Encuentre el valor de k para el cual la recta $3x+ky=-6$

    (a) pasa por el punto $(1,2)$

    (b) es paralela al eje y

    (c) es paralela a la recta $6y-9x=10$

    (d) tiene intersecciones en x y y iguales

    (e) es perpendicular a la recta $y+2=2(x-4)$

82. Use la pendiente para verificar que los puntos P_1, P_2 y P_3 son vértices de un triángulo rectángulo.

    1. $P_1(8,2)$, $P_2(1,-11)$, $P_3(-2,-1)$
    2. $P_1(8,2)$, $P_2(-3,0)$, $P_3(5,6)$

83. Determinar la ecuación de la recta que interceptando sobre el eje x un segmento de 7 unidades de longitud, pasa además por el punto de abscisa igual a 4 perteneciente a la recta $5x+3y-30=0$.

84. Calcular los valores de M y N si las ecuaciones $Mx-7y+18=0$ y $8x-Ny+9M=0$ representan la misma recta.

85. Dada la recta $L_1: 3x-2y+4=0$ y el punto $A(1,3)$, encontrar la ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular a L_1.

86. Escribir la ecuación de la recta que pasa por $A(-2,1)$ y que:

    1. Es paralela a $3x-2y=5$
    2. Es perpendicular a $3x+4y-9=0$
    3. Pasa por $B(7,3)$
    4. Es perpendicular a $y=4$
    5. Tiene como ordenada en el origen 3

87. Encontrar la ecuación de dos rectas que se cortan en el punto $P(-4,3)$, tales que la suma algebraica de sus ordenadas en el origen sea igual a -2 y la suma algebraica de sus abscisas en el origen sea nula.

88. ¿Cuáles de los puntos $P_1(-3,0)$; $P_2(6,3)$ y $P_3(1,1)$ están sobre la recta que pasa por $A(3,2)$ y $B(-6,-1)$.

89. Sea $A(3,k)$ un punto sobre la recta de pendiente igual a 5 y que pasa por $B(-2,4)$. Determinar el valor de k.

90. Una recta de pendiente 2 pasa por el punto $A(1,3)$. Si la abscisa de un punto de la recta es 3, hallar su ordenada.

91. Una recta de pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(5,7)$ contiene un punto de ordenada igual a -1, ¿cuál es la abscisa de dicho punto?

92. Hallar la ecuación de la recta que cumple con las condiciones indicadas en cada caso:

    (a) La pendiente es igual a 4 y pasa por el punto $A(2,-3)$.

    (b) Pasa por el punto $B(-1,-2)$ y tiene pendiente igual a 2.

    (c) Pasa por el punto $A(2,1)$ y tiene pendiente igual a cero.

    (d) Pasa por el punto $B(-1,2)$ y tiene pendiente infinita.

    (e) Pasa por el punto $D(1,-7)$ y es paralela al eje x.

    (f) Pasa por el punto $P(-3,-4)$ y es paralela al eje y.

    (g) Pasa por los puntos $P(3,1)$ y $Q(-5,4)$.

    (h) Pasa por el punto $A(-6,-3)$ y tiene un ángulo de inclinación de 45°.

    (i) Pasa por el punto $A(-1,4)$ y forma un ángulo de 60° con el eje x.

    (j) Corta al eje x en el punto $K(3,0)$ y al eje y en el punto $M(0,-4)$.

(k) Su pendiente es igual a 2 y su ordenada en el origen es la misma que la de la recta $3x+4y+12=0$.

(l) La intersección con el eje x es igual a -3 y con el eje y es igual a 4.

(m) La pendiente es -4 y la intersección con el eje x es igual a 2.

(n) Pasa por el punto $P(1,2)$ y es paralela a la recta $x+2y-3=0$.

(o) Pasa por el punto $N(-3,1)$ y es paralela a la recta determinada por $P(1,-5)$ y $Q(-2,1)$.

(p) Pasa por el punto $A(1,4)$ y es paralela a la recta cuya ordenada en el origen es igual a 2 y pasa por el punto $B(1,3)$.

(q) Pasa por el punto $S(7,8)$ y es paralela al segmento que definen $T(-2,1)$ y $U(3,-4)$.

(r) Pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a $3x+4y-1=0$.

(s) Pasa por el punto $P(-3,1)$ y es perpendicular a la recta determinada por los puntos $Q(-2,1)$ y $R(-4,5)$.

(t) Pasa por el punto $(-1,3)$ y es perpendicular a la recta $2x+3y+5=0$.

(u) Forma un ángulo de $0°$ con el eje x y corta el eje y en un punto distante 5 unidades del origen de coordenadas.

(v) La intersección con el eje y es igual a cero y forma un ángulo de $45°$ con el eje x.

(w) La ordenada en el origen es igual a 2 y la intersección con el eje x es igual a -4.

(x) Es perpendicular al eje y y pasa por el punto $P(-4,1)$.

(y) Pasa por $C(5,-2)$ y tiene un ángulo de inclinación igual a $\dfrac{\pi}{2}$.

93. Encuentre el valor de k tal que la recta $kx-3y=10$

    (a) es perpendicular a la recta $y=2x+4$

    (b) es paralela a la recta $y=2x+4$

    (c) es perpendicular a la linea $2x+3y=6$

    (d) tiene intersecciones en x y y iguales

94. Dado el triángulo de vértices $A(1,7)$, $B(4,-2)$ y $C(5,5)$, verifique que la recta que une los puntos medios de dos de sus lados es paralela al tercer lado.

95. El triángulo ABC tiene vértices $B(-6,-3)$ y $C(8,-4)$. La pendiente del lado $\overline{AB}$ es $1/2$ y la pendiente del lado $\overline{AC}$ es -2. Encuentre las coordenadas del punto A.

96. Determinar todos los valores de k para que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(k,4)$ y $B(1,3-2k)$ sea menor que 5.

97. Determinar todos los valores de k para que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(k,4)$ y $B(1,3-2k)$ sea mayor ó igual que 5.

98. Determinar todos los valores de k para que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2-k,1)$ y $B(-2,1+k)$ sea mayor que -3.

99. Determinar todos los valores de k para que el valor absoluto de la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(2k,1)$ y $B(k,2+3k)$ sea menor ó igual que 1.

100. Determinar todos los valores de k para que la pendiente de la recta que pasa por los puntos $A(5+k,2)$ y $B(-k,7k)$ pertenezca al intervalo $[-2,3)$.

101. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto de corte de las rectas $y=x-1$, $y=1-x$ y es paralela a $y=-2x$.

102. Escriba la ecuación de la circunferencia

    (a) de radio $r=4$ con el centro en el origen de coordenadas.

    (b) de radio $r=\dfrac{4}{3}$ con el centro en el origen de coordenadas.

(c) de radio $r = 5$ con el centro en el punto $C(-4, 2)$.

(d) de radio $r = \dfrac{7}{5}$ con el centro en el punto $C\left(-1, -\dfrac{3}{5}\right)$.

103. Identificar el radio y el centro de la circunferencia de ecuación $(x+2)^2 + y^2 = 6$.

104. Halle el centro y el radio de la circunferencia

1. $x^2 + y^2 = 36$
2. $x^2 + y^2 = 7$
3. $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 49$
4. $(x+7)^2 + \left(y + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 64$
5. $(x-2.5)^2 + y^2 = 50$
6. $(y+2.5)^2 + x^2 = 21$

105. Diga si la ecuación $2x^2 + 2y^2 - 10x + 6y - 15 = 0$, representa una circunferencia. De ser así, halle su centro y radio.

106. Demuestre que la ecuación dada es la ecuación de una circunferencia. Halle su centro y radio

1. $x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$
2. $x^2 - 6x + y^2 + 10y + 9 = 0$

107. Halle la ecuación de la circunferencia, cuyo centro coincide con el origen de coordenadas, si la circunferencia es tangente a la recta $x = 3$.

108. Escriba la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el punto $C(3, 7)$, si se sabe que es tangente al eje x.

109. Escriba la ecuación de la circunferencia, cuyo centro está situado en el punto de intersección de las rectas $2x + 3y - 13 = 0$ y $x + y - 5 = 0$, si es tangente al eje de ordenadas.

110. Escriba la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $P(6, 2)$ y cuyo centro es el punto $C(2, -1)$.

111. Escriba la ecuación de la circunferencia, cuyo centro se encuentra en el eje de las abscisas, si la circunferencia es tangente a las rectas $x = 8$ y $y = 3$.

112. Escriba la ecuación de la circunferencia, si se sabe que es tangente al eje de abscisas y a las rectas $x = -1$ y $x = 5$.

113. Escriba la ecuación de la circunferencia, que pasa por el punto $M(2, 1)$ y es tangente a los ejes de coordenadas.

114. Determine, como está situado el punto $M(-2, 1)$ respecto a la circunferencia (dentro, afuera o en la circunferencia)

1. $x^2 + y^2 = 2$
2. $x^2 + y^2 - 5 = 0$
3. $x^2 + y^2 - 8x - 4y = 5$
4. $y^2 + x^2 = 0.01$
5. $x^2 + y^2 = 25$
6. $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

115. Halle la ecuación de la recta que pasa por los centros de las circunferencias $(x-2)^2 + y^2 = 16$ y $x^2 + (y-3)^2 = 9$.

116. Una recta que pasa por el punto $P(-3, 7)$ y es paralela a la recta $4x + 3y - 7 = 0$, es tangente a una circunferencia de centro $C(2, -3,)$. ¿Cuál es el área de la circunferencia?

117. Calcular el centro y el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo definido por los puntos $P(9, 7)$, $Q(10, 4)$ y $R(5, 10)$.

118. Determinar la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-1, 1)$, $Q(3, 5)$ y $R(5, -3)$.

119. Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(2, 3)$ y $B(-4, 5)$. Halle la ecuación de la curva.

120. Halle la ecuación de la circunferencia de centro $(-2,4)$ y que es tangente al eje y.

121. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2+y^2+2x-2y-39=0$ en el punto $(4,5)$.

122. Hallar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $(x-1)^2+(y+2)^2=10$ en el punto $(2,1)$.

123. La ecuación de una circunferencia es $(x+2)^2+(y-3)^2=5$. Halle la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a la circunferencia que pasa(n) por el punto $(3,3)$.

124. Determine la(s) ecuación(es) de la(s) recta(s) tangente(s) a $x^2+y^2=25$ que pasan por el punto $(7,-1)$.

125. Se dan los puntos $P(2,3)$ y $Q(10,9)$. Escriba la ecuación de la circunferencia, cuyo diámetro es el segmento $\overline{PQ}$.

126. Una circunferencia es tangente al eje de ordenadas en el origen de coordenadas y pasa a través del punto $P(-4,0)$. Escriba la ecuación de la circunferencia.

127. Escriba la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(0,0)$, $Q(3,0)$ y $R(0,4)$

128. Determinar la ecuación de la tangente trazada desde $A(2,14)$ a la circunferencia de centro $O(0,0)$ y radio igual a 10.

129. ¿Es la recta $2x+3y-6=0$ tangente a la circunferencia de centro $C(-3,-2)$ y radio igual a 4?

130. Determine como está situada la recta respecto a la circunferencia (la interseca, es tangente a ella o pasa fuera de ésta) si la recta y la circunferencia están definidas por las siguientes ecuaciones

    1. $2x-y-3=0$ y $x^2+y^2-3x+2y-3=0$
    2. $x+3y+10=0$ y $x^2+y^2=1$
    3. $x-2y-1=0$ y $(x-4)^2+(y+1)^2=5$

131. Escriba la ecuación de la circunferencia, circunscrita alrededor de un triángulo, cuyos lados pertenecen a las rectas $x-3y+1=0$, $9x-2y-41=0$, $7x+4y+7=0$.

132. Hallar el(los) punto(s) de intersección, si existe, entre las circunferencias de ecuaciones

$$x^2+y^2=4 \qquad \text{y} \qquad x^2-6x+y^2+4=0.$$

133. Hallar el(los) punto(s) de intersección, si existe, entre las circunferencias de ecuaciones

$$x^2+y^2=4 \qquad \text{y} \qquad x^2-3x+y^2+4=0.$$

134. Determine las coordenadas de los puntos de intersección de la recta $y-7x-12=0$ y la circunferencia $(x-1)^2+(y-2)^2=25$.

135. Hallar el(los) punto(s) de intersección entre la recta de ecuación $x+3y-5=0$ y la circunferencia de centro $C(1,-2)$ y radio $r=\sqrt{10}$.

136. Escriba la ecuación del diámetro de la circunferencia $x^2+y^2=25$ el cual es perpendicular a la recta $4x+3y-25=0$.

137. Calcule la distancia más corta del punto $A(8,-6)$ a la circunferencia $x^2+y^2-4=0$.

138. Escriba la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(4,1)$ y $Q(0,5)$, si se sabe que su centro se encuentra en la recta $x+y+3=0$.

139. Un lanzador de martillo practica en un lugar pequeño. Cuando el lanzador gira, el martillo recorre una circunferencia de 5 pies de radio. Una vez lanzado el martillo, este choca contra una reja de alambre que se encuentra a 50 pies del centro de la zona de lanzamiento hacia el sur. Si suponemos unos ejes coordenados colocados en el sitio donde gira el atleta y el martillo se suelta en el punto $E(-4,-3)$ moviéndose a lo largo de la tangente, ¿en dónde golpearía a la reja?.

Respuestas: Ejercicios

1.a. $x=-2$; 1.b. $y=4$; 1.c. $y=\pm x$; 2.a. $x=2y$; 2.b. $y=x+2$; 2.c. $x=\frac{1}{y}$; 3. $y=2x+3$;
4. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$; 5. $x^2+y^2=4$; 6. $(x-2)^2+(y-3)^2=25$; 7. $y-y_1=m(x-x_1)$;
8. $2x-3y+9=0$; 9. $(x-1)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$; 10. $(y-1)^2+\left(x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$; 11. $y=5x$;
12. $(x-5)^2+y^2=16$; 13. $y=\frac{x^2}{8}+2$; 14. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;
15. $4x+6y-21=0$ y $4x+6y+3=0$; 16. $(y-4)^2=10x+5$ y $(y-4)^2=5-2x$; 17. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$;
18. $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$; 19. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; 20. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1$; 21. $\frac{(x-4)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{3}=1$; 22. $x^2+y^2=8$;
23. $9\left(y+\frac{2}{3}\right)^2-3(x+1)^2=16$; 24. $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$; 25.a. $\alpha=0$; 25.b. $\alpha=\frac{\pi}{2}$; 25.c. $\alpha=0$;
25.d. $\alpha=\pi$; 26.a. 0; 26.b. 0; 26.c. 1; 26.d. -1; 27. Pendiente : $-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{2\pi}{3}$;
28. $y=4x-13$; 29.1. $y=\frac{3}{2}x$; 29.2. $y=\frac{3}{2}x-\frac{9}{2}$; 29.3. $y=5-2x$; 29.4. $y=2$; 29.5. $y=\frac{7}{5}x-\frac{32}{5}$;
29.6. $y=7-\frac{3}{2}x$; 29.7. $y=-3x-\frac{5}{2}$; 29.8. $y=3$; 30.1. $\alpha=\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$; 30.2. $\alpha=\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$;
30.3. $\alpha=-\arctan(2)$; 30.4. $\alpha=0$; 30.5. $\alpha=\arctan\left(\frac{7}{5}\right)$; 30.6. $\alpha=-\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$; 30.7. $\alpha=-\arctan(3)$;
30.8. $\alpha=0$; 31.1. $P_2(-7,-4)$ ó $P_2(1,6)$; 31.2. $P_2(0,9)$ ó $P_2(0,1)$; 31.3. $P_2\left(5,-\frac{3}{2}\right)$ ó $P_2\left(1,-\frac{5}{2}\right)$;
31.4. $P_2(-2,4)$ ó $P_2(2,10)$; 32.a. $y=7-3x$; 32.b. $y=-\frac{7}{2}$; 32.c. $y=3-x$; 32.d. $y=4x-11$;
32.e. $x=3$; 32.f. $y=8-2x$; 32.g. $y=2x+6$; 32.h. $6x+16y+1=0$; 32.i. $y=-\frac{1}{2}$; 32.j. $4x-3y+4=0$;
32.k. $y=3x$; 32.l. $y=-4$; 32.m. $y=2-x$; 32.n. $3y-4x+5=0$; 32.o. $\sqrt{3}x-2y+3\sqrt{3}=0$;
32.p. $x=-\frac{7}{3}$; 32.q. $x=9$; 32.r. $y=2-6x$; 32.s. $2x+3y-8=0$; 32.t. $x=3y-8$; 32.u. $x=-3$;
32.v. $y=9-3x$; 32.w. $y=6-x$; 32.x. $y=-2x-9$; 33. 5; 34. 5; 35. $\frac{1}{3}$; 36. 24;
37. -1; 39. $\theta=80^\circ 16'$; 40. ; 41. ; 44. $y=105$; 45. $y=-109$;
46. $A_x=4$, $B_y=-1$; 47. $A=\frac{25}{2}$; 49. $D_x=1$; 50. $A=14$, $B=4$; 51. $\left(\frac{12}{5},0\right)$;
52. $y=8-\frac{3}{4}x$, $y=-8-\frac{3}{4}x$; 53. $y=12-2x$ y $y=6-\frac{1}{2}x$; 54. $a=5$; 55. $b=\frac{11}{5}$;
56. $x=\frac{4}{3}$; 57. $D\left(\frac{21}{2},0\right)$; 58. $10y-9x+3=0$; 59. $y=7-x$; 60. $K=\frac{1}{A}$, $A\neq 0$;
61. $K=1\Longrightarrow x+2y+3=0$ y $K=-\frac{1}{2}\Longrightarrow x+2y+12=0$; 62.1. Pendiente : 2, $\left(\frac{1}{2},0\right)$, $(0,-1)$;
62.2. Pendiente : $-\frac{1}{2}$, $(0,0)$, $(0,0)$; 62.3. Pendiente : 0, No tiene, $\left(0,-\frac{5}{2}\right)$; 62.4. Pendiente : -2, $\left(\frac{5}{2},0\right)$, $(0,5)$;
62.5. Pendiente : Indefinida, $(2,0)$, No tiene; 64. Por abajo; 65.a. Si; 65.b. No; 68.a. $-\frac{2}{5}$;
68.b. $-\frac{3}{4}$; 68.c. -3; 68.d. 1; 68.e. $-\frac{3}{7}$; 68.f. $-\frac{3}{2}$; 69. $\left(\frac{2+4\sqrt{2}}{7},-\frac{\sqrt{2}+4}{7}\right)$; 70. Paralelas;
71. ; 72.1. $(-2,5)$, $x+2=0$; 72.2. $(2,3)$, $2y-5x+4=0$; 72.3. $\left(\frac{27}{19},\frac{20}{19}\right)$, $38x+95y=154$;
72.4. $\left(\frac{1}{2},-\frac{3}{5}\right)$, $60y+50x+11=0$; 72.5. $(-1,3)$, $5x+2y-1=0$; 72.6. Rectas paralelas;
72.7. $\left(-\frac{13}{11},\frac{120}{11}\right)$, $77y+33x-801=0$; 73. $2+\sqrt{5}$; 75. $\frac{8}{5}\sqrt{5}$; 76. $d(P,L)=\frac{14}{5}$; 77. $\frac{\sqrt{10}}{5}$;
78.1. $y=3x+12$; 78.2. $y=6$; 78.3. $5y-2x=2$; 78.4. $y+8x-12=0$; 78.5. $x=4$; 79. $y=2x-2$;
80. $K=4$; 81.a. $k=-\frac{9}{2}$; 81.b. $k=0$; 81.c. $k=-2$; 81.d. $k=3$; 81.e. $k=6$; 83. $10x+9y=70$;
84. $M=\pm 4$, $N=\pm 4$; 85. $2x+3y-11=0$; 86.1. $3x-2y+8=0$; 86.2. $4x-3y+11=0$;
86.3. $2x-9y+13=0$; 86.4. $x+2=0$; 86.5. $y-x-3=0$; 87. $y=-\frac{1}{2}x+1$, $y=-\frac{3}{2}x-3$;
88. P_1,P_2 Si, P_3 No; 89. 29; 90. 7; 91. -3; 92.a. $y=4x-11$; 92.b. $y=2x$;
92.c. $y-1=0$; 92.d. $x+1=0$; 92.e. $y+7=0$; 92.f. $x+3=0$; 92.g. $3x+8y=17$; 92.h. $y=x+3$;
92.i. $y-4=\sqrt{3}(x+1)$; 92.j. $3y-4x+12=0$; 92.k. $y=2x-3$; 92.l. $4x-3y+12=0$; 92.m. $y=2-4x$;
92.n. $x+2y-5=0$; 92.o. $x+y+2=0$; 92.p. $y=x+3$; 92.q. $3x+5y=61$; 92.r. $4x-3y=0$;
92.s. $2x+y+5=0$; 92.t. $2y=3x+9$; 92.u. $y=5$; 92.v. $y=x$; 92.w. $y=\frac{1}{2}x+2$; 92.x. $y=1$;
92.y. $x=5$; 93.a. $-\frac{3}{2}$; 93.b. 6; 93.c. $\frac{9}{2}$; 93.d. -3; 95. $A\left(\frac{24}{5},\frac{12}{5}\right)$; 96. $k\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$;
97. $k\in(1,2]$; 98. $k\in(3,4)$; 99. $k\in\left[-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right]$; 100. $k\in(-1,4]$; 101. $y=2-2x$;
102.a $x^2+y^2=16$; 102.b. $x^2+y^2=\frac{16}{9}$; 102.c. $(x+4)^2+(y-2)^2=25$; 102.d. $(x+1)^2+\left(y+\frac{3}{5}\right)^2=\frac{49}{25}$;
103. $C(-2,0)$ $r=\sqrt{6}$; 104.1. $C(0,0)$, $r=6$; 104.2. $C(0,0)$, $r=\sqrt{7}$; 104.3. $C(5,3)$, $r=7$;
104.4. $C\left(-7,-\frac{1}{2}\right)$, $r=8$; 104.5. $C(2.5,0)$, $r=5\sqrt{2}$; 104.6. $C(0,-2.5)$, $r=\sqrt{21}$;
105. Circunferencia. $C\left(\frac{5}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $r=4$; 106.1. $C(1,-2)$, $r=5$; 106.2. $C(3,-5)$, $r=5$;

107. $x^2 + y^2 = 9$; 108. $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 49$; 109. $(x-2)^2 + (x-3)^2 = 4$;
110. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 25$; 111. $(x-5)^2 + y^2 = 9$; 112. $(x-2)^2 + y^2 = 9$;
113. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; 114.1. Afuera; 114.2. En la circunferencia; 114.3. Afuera;
114.4. Afuera; 114.5. Dentro; 114.6. Dentro; 115. $2y + 3x - 6 = 0$; 116. $A = 4\pi$;
117. $\left(x - \frac{19}{6}\right)^2 + \left(y - \frac{61}{18}\right)^2 = \frac{7625}{162}$; 118. $\left(x - \frac{16}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{442}{25}$, $C\left(\frac{16}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $r = \frac{\sqrt{442}}{5}$;
119. $(x+1)^2 + (y-4)^2 = 10$; 120. $(x+2)^2 + (y-4)^2 = 4$; 121. $5x + 4y - 40 = 0$;
122. $x + 3y - 5 = 0$; 123. $L_1 : 4y - 3x + 25 = 0$, $L_2 : 3y + 4x - 25 = 0$;
124. $L_1 : x + 2y - 9 = 0$, $L_2 : x - 2y + 3 = 0$; 125. $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 25$; 126. $x^2 + y^2 = 16$;
127. $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-2)^2 = \frac{25}{4}$; 132. $P\left(\frac{4}{3}, \frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$, $Q\left(\frac{4}{3}, -\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$; 133. No hay punto de intersección;
135. $(2, 1)$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Lehmann, Ch.**: "*Geometría Analítica*". Editorial LIMUSA.
5. **Yakovliev, G. N.**: "*Geometría*". Editorial MIR. 1985.
6. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
7. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 7

Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

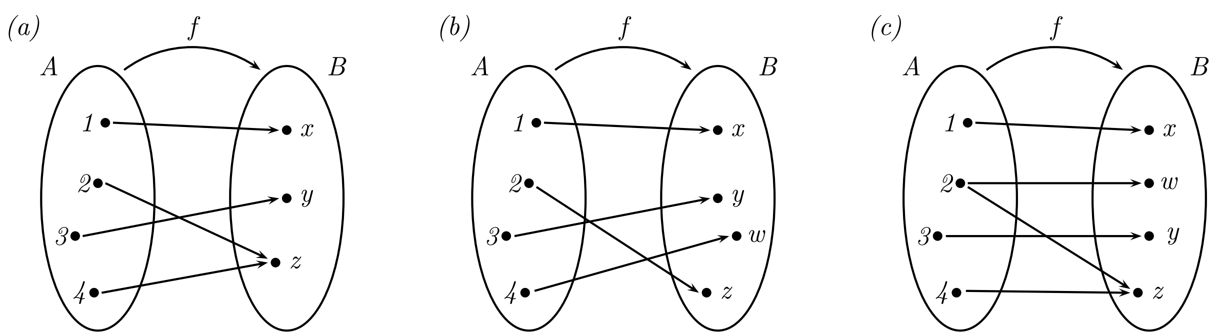
Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.07

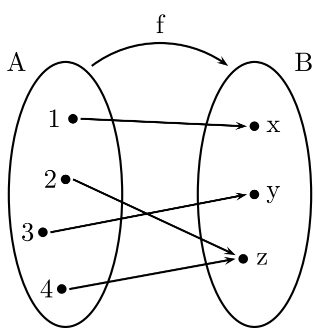
- Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$: Definición.
- Dominio y rango de una función de variable real a valores reales.
- Evaluación de funciones reales. Funciones básicas. Gráficas de funciones reales.
- Función par, impar, creciente, decreciente, periódica, inyectiva.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 7.1 *: Diga cual de las siguientes relaciones representa una función. Justifique su respuesta.*



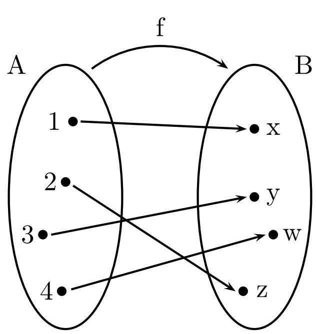
Solución : (a) Tenemos que



$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & x \\ 2 & \longmapsto & z \\ 3 & \longmapsto & y \\ 4 & \longmapsto & z \end{array}$$

SI ES FUNCIÓN.

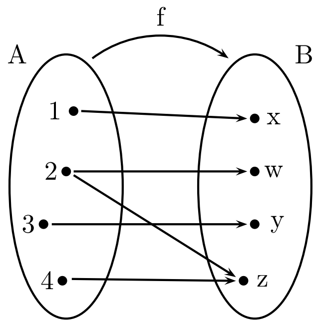
(b) Tenemos que



$$\begin{array}{ccc} 1 & \longmapsto & x \\ 2 & \longmapsto & z \\ 3 & \longmapsto & y \\ 4 & \longmapsto & w \end{array}$$

SI ES FUNCIÓN.

(c) Tenemos que



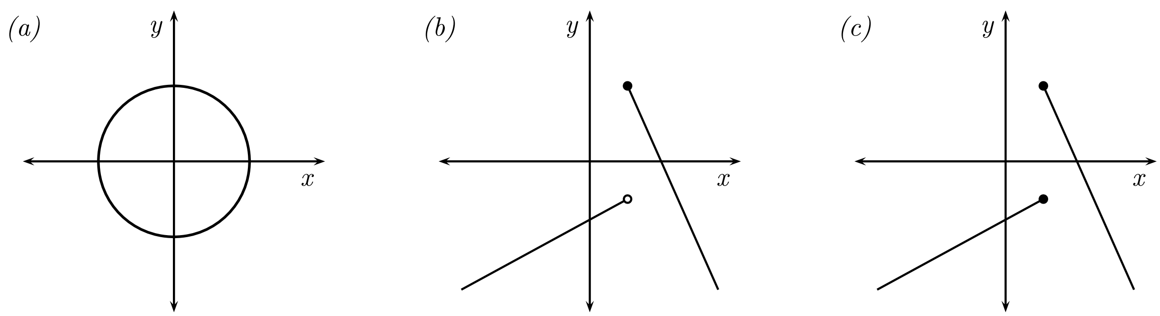
$$1 \longmapsto x$$
$$2 \longmapsto w$$
$$2 \longmapsto z$$

2 está asociado con w y z

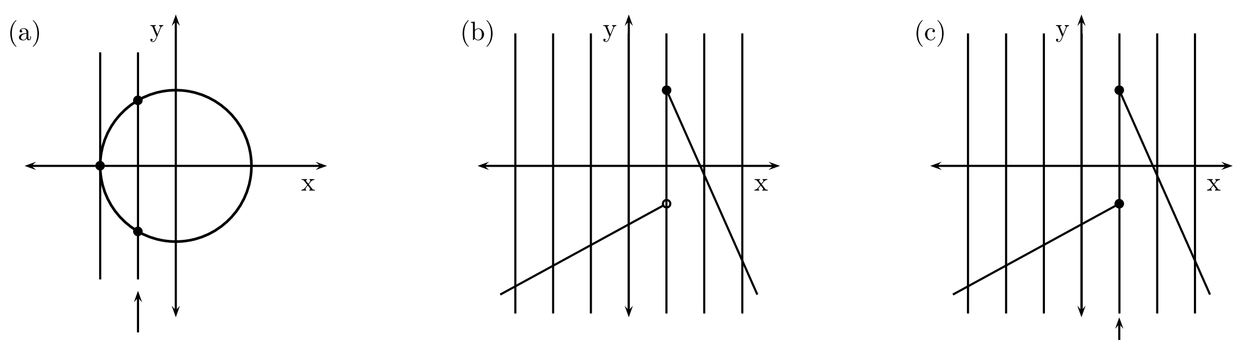
NO ES FUNCIÓN.

★

Ejemplo 7.2 *: Diga cual de las siguientes graficas representa una función de la forma* $y = f(x)$. *Justifique su respuesta.*



Solución : Tenemos que



Observemos que la segunda recta de izquierda a derecha toca a la grafica de la curva en dos puntos, por lo tanto, la curva **NO** es una función

Observemos que todas las rectas verticales tocan a la grafica de la curva en un solo punto, por lo tanto, la curva **SI** es una función

Observemos que la tercera recta de derecha a izquierda toca a la grafica de la curva en dos puntos, por lo tanto, la curva **NO** es una función

★

Ejemplo 7.3 *: Sea* $f(x) = \sqrt[3]{x}$. *Calcular:* ***a)*** $f(1)$; ***b)*** $f(8)$; ***c)*** $\dfrac{f(-27+h) - f(-27)}{h}$, *con* $h \neq 0$.

Solución : a) Tenemos que

$$f(\cdot) = \sqrt[3]{(\cdot)},$$

así,

$$f(1) = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1^3} = 1,$$

por lo tanto, $f(1) = 1$.

b) Tenemos que

$$f(\cdot) = \sqrt[3]{(\cdot)},$$

así,

$$f(8) = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2,$$

por lo tanto, $f(8) = 2$.

c) Tenemos que

$$f(\cdot) = \sqrt[3]{(\cdot)},$$

así,

$$f(-27+h) = \sqrt[3]{-27+h},$$

mientras que,

$$f(-27) = \sqrt[3]{-27} = \sqrt[3]{(-1)(27)} = \sqrt[3]{(-1)^3(3)^3} = (-1)(3) = -3,$$

entonces

$$\frac{f(-27+h) - f(-27)}{h} = \frac{\sqrt[3]{-27+h} - (-3)}{h} = \frac{\sqrt[3]{-27+h} + 3}{h},$$

aplicamos la conjugada

$$\frac{\sqrt[3]{-27+h}+3}{h} = \frac{\left(\sqrt[3]{-27+h}+3\right)}{h}\,\frac{\left(\left(\sqrt[3]{-27+h}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{-27+h}\right)(3) + (3)^2\right)}{\left(\left(\sqrt[3]{-27+h}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{-27+h}\right)(3) + (3)^2\right)}$$

$$= \frac{\left(\sqrt[3]{-27+h}\right)^3 + (3)^3}{h\left(\sqrt[3]{(-27+h)^2} - 3\sqrt[3]{-27+h} + 9\right)} = \frac{-27+h+27}{h\left(\sqrt[3]{(-27+h)^2} - 3\sqrt[3]{-27+h} + 9\right)}$$

$$= \frac{h}{h\left(\sqrt[3]{(-27+h)^2} - 3\sqrt[3]{-27+h} + 9\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-27+h)^2} - 3\sqrt[3]{-27+h} + 9}.$$

Luego,

$$\frac{f(-27+h) - f(-27)}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-27+h)^2} - 3\sqrt[3]{-27+h} + 9}.$$

★

Ejemplo 7.4 *: Sea* $f(x) = x^3$. *Calcular:* ***a)*** $f(h+2)$; ***b)*** $f(x+h)$; ***c)*** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, *con* $h \neq 0$.

Solución : a) Tenemos que

$$f(\cdot) = (\cdot)^3,$$

así,

$$f(h+2) = \overbrace{(h+2)^3}^{\boxed{\substack{\text{Producto notable} \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}}} = (h)^3 + 3(h)^2(2) + 3(h)(2)^2 + (2)^3 = h^3 + 6h^2 + 12h + 8,$$

es decir,

$$f(h+2) = h^3 + 6h^2 + 12h + 8.$$

b) Tenemos que

$$f(x+h) = (x+h)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(h) + 3(x)(h)^2 + (h)^3 = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3,$$

es decir,

$$f(x+h) = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3.$$

c) Tenemos que

$$f(x+h) = x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3 \qquad \text{y} \qquad f(x) = x^3,$$

entonces

$$f(x+h) - f(x) = \overbrace{\left(x^3 + 3hx^2 + 3h^2x + h^3\right)}^{\boxed{\substack{\text{Función } y=f(x) \\ \text{evaluada en } x+h}}} - \overbrace{\left(x^3\right)}^{\boxed{\text{Función } y=f(x)}} = x^3 + 3hx^2 + 3hx + h^3 - x^3$$

$$= \underbrace{3hx^2 + 3h^2x + h^3}_{\boxed{\text{Factor común } h}} = h\left(3x^2 + 3hx + h^2\right),$$

es decir,

$$f(x+h) - f(x) = h\left(3x^2 + 3hx + h^2\right),$$

por lo que,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{h\left(3x^2 + 3hx + h^2\right)}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2,$$

luego,

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2.$$

★

Ejemplo 7.5 *: Hallar los puntos de corte con los ejes coordenados de las siguientes funciones*

1. $f(x) = k, \quad k$ *constante* 2. $f(x) = x^4$ 3. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

Solución : 1. Puesto que, los puntos en el eje y son de la forma $(0, y)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje y se hace $x = 0$, de aquí,

$$y = f(0) = k, \qquad \text{por lo tanto, el punto de corte con el eje } y \text{ es } (0, k).$$

Como los puntos en el eje x son de la forma $(x, 0)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje x se hace $y = 0$, de aquí,

$$0 = f(x) = k \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \text{Si } k = 0, \text{ entonces los puntos de corte con el eje } x \text{ son } (x,0), \text{ con } x \in \mathbb{R}. \\ \text{Si } k \neq 0, \text{ entonces la función } \textbf{no} \text{ tiene puntos de corte con el eje } x. \end{cases}$$

2. Puesto que, los puntos en el eje y son de la forma $(0, y)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje y se hace $x = 0$, de aquí,

$$y = f(0) = (0)^4 = 0, \qquad \text{por lo tanto, el punto de corte con el eje } y \text{ es } (0, 0).$$

Como los puntos en el eje x son de la forma $(x, 0)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje x se hace $y = 0$, de aquí,

$$0 = f(x) = x^4 \qquad \Longrightarrow \qquad x^4 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0,$$

por lo tanto, el punto de corte con el eje x es $(0, 0)$.

3. Puesto que, los puntos en el eje y son de la forma $(0, y)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje y se hace $x = 0$, como f no está definida en $x = 0$, concluimos que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **no** tiene puntos de corte con el eje y.

Como los puntos en el eje x son de la forma $(x, 0)$, entonces para obtener el punto de corte con el eje x se hace $y = 0$, de aquí,

$$0 = f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = 1, \quad \text{lo que es una contradicción,}$$

por lo tanto, concluimos que $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **no** tiene puntos de corte con el eje x. ★

Ejemplo 7.6 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones* $f(x) = x$ *y* $g(x) = \sqrt{x}$*.*

Solución : Debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = [0, \infty),$$

debemos resolver la ecuación

$$x = \sqrt{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = [0, \infty).$$

Entonces,

$$x = \sqrt{x} \iff \underset{\boxed{\begin{array}{c}\text{Como } x \in [0,\infty) \\ |x| = x\end{array}}}{x^2 = \underset{\uparrow}{|x|}} \iff x^2 = x \iff x^2 - x = 0 \iff x(x-1) = 0,$$

de aquí,

$$x(x-1) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1.$$

- Si $x = 0$, entonces $y = f(0) = 0$.
- Si $x = 1$, entonces $y = f(1) = 1$.

Luego, los puntos de intersección de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ son los pares ordenados $(0, 0)$ y $(1, 1)$. ★

Ejemplo 7.7 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *y* $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$*.*

Solución : Debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\},$$

entonces, debemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces,
$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x-1}{x^2}=0,$$
de aquí,
$$\frac{x-1}{x^2}=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x-1=0 \quad \text{siempre y cuando} \quad x^2\neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=1.$$

- Si $x=1$, entonces $y=f(1)=\dfrac{1}{(1)}=1.$

Luego, el punto de intersección de las funciones $f(x)=\dfrac{1}{x}$ y $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$ es el par ordenado $(1,1)$. ★

Ejemplo 7.8 *: Demuestre que la función $f(x)=x^2$ es estrictamente creciente para todo $x\in[0,\infty)$.*

Demostración : Es conocido que, una función $f:\text{Dom}\, f\subseteq\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** es un intervalo $I\subseteq \text{Dom}\, f$ si, para todo $x_1,x_2\in I$, tal que $x_1<x_2$ se tiene que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir,
$$\boxed{x_1<x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1)<f(x_2)\,,} \qquad \leftarrow \quad f \ \text{ mantiene desigualdades.}$$

Sean $x_1,x_2\in[0,\infty)$, entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos que $x_1<x_2$ (Propiedad de tricotomía del orden de los néumeros reales).

Hipótesis 1 : $x_1>0$; Hipótesis 2 : $x_2>0$; Hipótesis 3 : $x_1<x_2$; Tesis : $x_1^2<x_2^2$,

así, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Comenzando con la hipótesis 3, como

$x_1<x_2$ (Hipótesis 3)

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por x_1, como x_1 es positiva (Hipótesis 1) la desigualdad no cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$x_1^2<x_1x_2$ (Desigualdad I)

por otro lado, podemos hacer las mismas operaciones, pero esta vez multiplicando por x_2

$x_1<x_2$ (Hipótesis 3)

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por x_2, como x_2 es positiva (Hipótesis 2) la desigualdad no cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$x_1x_2<x_2^2$ (Desigualdad II)

Entonces, tenemos
$$x_1^2<x_1x_2 \qquad \text{y} \qquad x_1x_2<x_2^2,$$
por la propiedad transitiva de orden de los números reales
$$x_1^2<x_2^2,$$
con lo que concluimos
$$\boxed{\text{si} \qquad 0<x_1<x_2, \qquad \text{entonces} \qquad x_1^2<x_2^2,}$$

es decir, la función $f(x) = x^2$ mantiene la desigualdad, cuando los términos son positivos, por lo que

$$\boxed{\text{la función } f(x) = x^2 \text{ es estrictamente creciente para todo } x \in [0, \infty).}$$

★

Ejemplo 7.9 *: Demuestre que la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo su dominio.*

Demostración : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2)\,,} \qquad \leftarrow \quad f \text{ mantiene desigualdades.}$$

Puesto que, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos que $x_1 < x_2$ (Propiedad de tricotomía del orden de los néumeros reales).

Hipótesis 1 : $x_1 \in \mathbb{R}$; Hipótesis 2 : $x_2 \in \mathbb{R}$; Hipótesis 3 : $x_1 < x_2$; Tesis : $x_1^3 < x_2^3$,

entonces, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

Obtenemos la demostración por contradicción, es decir, mantenemos las hipótesis y negamos la tesis

Hipótesis 1 : $x_1 \in \mathbb{R}$; Hipótesis 2 : $x_2 \in \mathbb{R}$; Hipótesis 3 : $x_1 < x_2$; Tesis : $x_1^3 > x_2^3$.

De aquí, si $x_1^3 > x_2^3$, entonces

$$x_1^3 > x_2^3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1^3 - x_2^3 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) > 0,$$

es conocido que el producto $ab > 0$ si y solo si a y b tienen el mismo signo, es decir

$$ab > 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad \begin{cases} a > 0 & \text{y} \quad b > 0 \\ & \text{ó} \\ a < 0 & \text{y} \quad b < 0. \end{cases}$$

Demostremos que la expresión $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2$ siempre es mayor o igual a cero. Para ello, estudiamos dos casos

- **Caso I :** Si x_1 y x_2 tienen el mismo signo, entonces

$$x_1 x_2 > 0, \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0 + x_1^2 + x_2^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > x_1^2 + x_2^2,$$

puesto que, $x_1^2 + x_2^2 > 0$, por ser la suma de dos valores positivos, se concluye que

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0.$$

- **Caso II :** Si x_1 y x_2 tiene signos contrario, supongamos que $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$, entonces $x_1 x_2 < 0$, así,

$x_1 < x_2$ (Hipótesis 3)

$\downarrow$ Multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por x_1, como x_1 es negativa la desigualdad cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$x_1^2 > x_1 x_2$ (Desigualdad I)

por lo tanto,

$$x_1 x_2 < x_1^2,$$

luego,

$$x_1^2 + x_1 x_2 > 0 \qquad \leftarrow \quad \text{Se mantiene el signo del mayor.}$$

si sumamos a ambos lados de la desigualdad x_2^2, obtenemos

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > x_2^2 > 0,$$

por transitividad, se concluye que

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0.$$

Así, $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0$, con lo que

$$(x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) > 0, \qquad \text{si y solo si} \qquad x_1 - x_1 > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_1 > x_2,$$

lo cual contradice que $x_1 < x_2$ (Hipóteis 3), por lo que, se tiene,

$$\boxed{\text{si} \qquad x_1 < x_2, \qquad \text{entonces} \qquad x_1^3 < x_2^3,}$$

es decir, la función $f(x) = x^3$ mantiene la desigualdad para todo $x \in \mathbb{R}$, así,

$$\boxed{\text{la función } \; f(x) = x^3 \; \text{ es estrictamente creciente para todo } \; x \in \mathbb{R}.}$$

★

Ejemplo 7.10 *: Demuestre que la función* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *es estrictamente decreciente en todo su dominio.*

Demostración : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente decreciente** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2)\,,} \qquad \leftarrow \quad f \;\text{ cambia desigualdades.}$$

Puesto que, $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$, se tiene

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)\,,$$

así, debemos dividir la demostración para los valores $x \in (-\infty, 0)$ y para los valores $x \in (0, \infty)$.

Estudiamos los dos casos

- **Caso I :** Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos que $x_1 < x_2$ (Propiedad de tricotomía del orden de los néumeros reales).

  Sean $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$, entonces, tenemos que

  Hipótesis 1 : $x_1 < 0$; Hipótesis 2 : $x_2 < 0$; Hipótesis 3 : $x_1 < x_2$; Tesis : $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$,

  así, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

  De la hipótesis 3, se tiene $x_1 < x_2$, multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $\dfrac{1}{x_1}$, como x_1 es negativo (Hipótesis 1), se tiene que $\dfrac{1}{x_1}$ también es negativo, por lo tanto, la desigualdad cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$$\frac{1}{x_1}\, x_1 > \frac{1}{x_1}\, x_2 \qquad \underset{\uparrow}{\Longleftrightarrow} \qquad 1 > \frac{1}{x_1}\, x_2,$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Elemento inverso en } \; \mathbb{R} \\ \dfrac{1}{x_1}\, x_1 = 1\end{array}}$$

se tiene $1 > \dfrac{1}{x_1}\ x_2$, multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $\dfrac{1}{x_2}$, como x_2 es negativo (Hipótesis 2), se tiene que $\dfrac{1}{x_2}$ también es negativo, por lo tanto, la desigualdad cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$$\frac{1}{x_2}\,1 < \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,x_2 \underset{\boxed{\substack{\text{Elemento identidad en } \mathbb{R}\\ \frac{1}{x_2}\,1=\frac{1}{x_2}}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,x_2 \underset{\boxed{\substack{\text{Elemento inverso en } \mathbb{R}\\ \frac{1}{x_2}\,x_2=1}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1},$$

por lo que, se tiene,

$$\boxed{\text{si} \qquad x_1 < x_2 < 0, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2},}$$

es decir, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cambia la desigualdad para todo $x \in (-\infty, 0)$, así,

$$\boxed{\text{la función } \ f(x) = \frac{1}{x} \ \text{ es estrictamente decreciente para todo } \ x \in (-\infty, 0).}$$

- **Caso II :** Sean $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, entonces, sin pérdida de generalidad, consideremos que $x_1 < x_2$ (Propiedad de tricotomía del orden de los néumeros reales).

  Sean $x_1, x_2 \in (0, \infty)$, entonces, tenemos que

  Hipótesis 1 : $x_1 > 0$; Hipótesis 2 : $x_2 > 0$; Hipótesis 3 : $x_1 < x_2$; Tesis : $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$,

  así, usando las hipótesis 1, 2 y 3, debemos demostrar la tesis.

  De la hipótesis 3, se tiene $x_1 < x_2$, multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $\dfrac{1}{x_1}$, como x_1 es positivo (Hipótesis 1), se tiene que $\dfrac{1}{x_1}$ también es positivo, por lo tanto, la desigualdad no cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$$\frac{1}{x_1}\,x_1 < \frac{1}{x_1}\,x_2 \underset{\boxed{\substack{\text{Elemento inverso en } \mathbb{R}\\ \frac{1}{x_1}\,x_1=1}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} 1 < \frac{1}{x_1}\,x_2,$$

  se tiene $1 < \dfrac{1}{x_1}\ x_2$, multiplicamos, ambos lados de la desigualdad, por $\dfrac{1}{x_2}$, como x_2 es positivo (Hipótesis 2), se tiene que $\dfrac{1}{x_2}$ también es positivo, por lo tanto, la desigualdad no cambia (Propiedad multiplicativa del orden de los números reales)

$$\frac{1}{x_2}\,1 < \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,x_2 \underset{\boxed{\substack{\text{Elemento identidad en } \mathbb{R}\\ \frac{1}{x_2}\,1=\frac{1}{x_2}}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1}\,\frac{1}{x_2}\,x_2 \underset{\boxed{\substack{\text{Elemento inverso en } \mathbb{R}\\ \frac{1}{x_2}\,x_2=1}}}{\underset{\uparrow}{\iff}} \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1},$$

  por lo que, se tiene,

$$\boxed{\text{si} \qquad x_1 < x_2 < 0, \qquad \text{entonces} \qquad \frac{1}{x_2} < \frac{1}{x_1},}$$

es decir, la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ cambia la desigualdad para todo $x \in (0, \infty)$, así,

$$\boxed{\text{la función } f(x) = \frac{1}{x} \text{ es estrictamente decreciente para todo } x \in (0, \infty).}$$

De los casos I y II, concluimos que

$$\boxed{\text{la función } f(x) = \frac{1}{x} \text{ es estrictamente decreciente en todo su dominio.}}$$

★

Ejemplo 7.11 : *Diga en que intervalo la función* $h(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *es creciente ó decreciente.*

Solución : Una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **creciente** es un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2),} \qquad \longleftarrow \quad f \text{ mantiene desigualdades.}$$

mientras que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **decreciente** es un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \geq f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \geq f(x_2),} \qquad \longleftarrow \quad f \text{ cambia desigualdades.}$$

Es conocido que Dom $h : \mathbb{R} \setminus \{0\}$, así, $x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$, entonces, si, para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $x_1 < x_2$ estudiamos dos casos, el caso negativo, $x_1, x_2 \in (-\infty, 0)$ y el caso positivo, $x_1, x_2 \in (0, \infty)$

$$\begin{tikzcd}
& x_1, x_2 \in \text{Dom } h \arrow[dl, "\text{Parte negativa}"'] \arrow[dr, "\text{Parte positiva}"] & \\
x_1 < x_2 < 0 \arrow[d, "\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}"'] & & 0 < x_1 < x_2 \arrow[d, "\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}"] \\
x_1^2 > x_2^2 \arrow[d, "\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}"'] & & x_1^2 < x_2^2 \arrow[d, "\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}"] \\
\dfrac{1}{x_1^2} < \dfrac{1}{x_2^2} \arrow[d] & & \dfrac{1}{x_1^2} > \dfrac{1}{x_2^2} \arrow[d] \\
h(x_1) < h(x_2) & & h(x_1) > h(x_2)
\end{tikzcd}$$

Observemos que en la parte negativa la desigualdad se mantuvo, es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) < h(x_2),$$

mientras que, en la parte positiva la desigualdad cambió

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) > h(x_2),$$

por lo tanto, se concluye que

$$\boxed{\text{la función } \ f(x) = \frac{1}{x^2} \ \text{ es estrictamente decreciente en el intervalo } \ (-\infty, 0),}$$

mientras que,

$$\boxed{\text{la función } \ f(x) = \frac{1}{x^2} \ \text{ es estrictamente creciente en el intervalo } \ (0, \infty).}$$

★

Ejemplo 7.12 : *Determinar el rango de la función* $f(x) = x^2$.

Solución : Puesto que, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, se tiene,

$$-\infty < x < \infty,$$

aplicamos la función a la desigualdad, es decir, elevamos al cuadrado, puesto que, la operación elevar al cuadrado cambia desigualdades si los términos son negativos y mantiene la desigualdad si los términos son positivos, (ver ejercicios 27 y 28) entonces, nos vemos en la obligación de dividir la desigualdad en dos desigualdades, una para los términos negativos y otra para los términos positivos y el cero.

$$\begin{tikzcd}
& -\infty < x < \infty \arrow[dl, "\text{Parte negativa}"'] \arrow[dr, "\text{Parte positiva}"] & \\
-\infty < x \leq 0 \arrow[d, "{\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}"'] & & 0 \leq x < \infty \arrow[d, "{\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}"] \\
\infty > x^2 \geq 0 \arrow[dr] & & 0 \leq x^2 < \infty \arrow[dl, "{\text{Consideramos } \ x^2 \in [0,\infty) \bigcup [0,\infty)}"] \\
& 0 \leq x^2 < \infty \arrow[d, "f(x) = x^2"] & \\
& 0 \leq f(x) < \infty \arrow[d, "y = f(x)"] & \\
& 0 \leq y < \infty, &
\end{tikzcd}$$

entonces, el rango de f es $\operatorname{Rgo} f = [0, \infty)$. ★

Ejemplo 7.13 : *Determinar el rango de la función* $f(x) = \sqrt{x}$, *si* $x \in (1, 9]$.

Solución : Puesto que, $x \in (1, 9]$, entonces

$$1 < x \leq 9,$$

aplicamos la función a la desigualdad, es decir, aplicamos la raíz cuadrada, en virtud que, la función raíz cuadrada es una función estrictamente creciente en todo su dominio, es decir, para todo $x \in [0, \infty)$ (ver ejercicio 30), en partícular para todo $x \in (1, 9]$, se tiene que, al aplicar dicha función a la desigualdad dada, la misma se mantiene, así,

$$1 < x \leq 9 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{1} < \sqrt{x} \leq \sqrt{9} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < \sqrt{x} \leq 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < y \leq 3,$$

por lo que, el rango de f es $\operatorname{Rgo} f = (1, 3]$, si $x \in (1, 9]$. ★

Ejemplo 7.14 *: Demuestre que si la función $y = f(x)$ es una función estrictamente decreciente para todo $x \in (a,b)$, entonces,*

$$\text{Rgo } f = (f(b), f(a)).$$

Demostración : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente decreciente** es un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2),} \qquad \leftarrow \quad f \text{ cambia desigualdades.}$$

Puesto que, $x \in (a,b)$, entonces

$$a < x < b,$$

aplicamos la función a la desigualdad, en virtud que, la función es estrictamente decreciente la desigualdad cambia, así,

$$a < x < b \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) > f(x) > f(b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(a) > y > f(b),$$

por lo tanto, $y \in (f(b), f(a))$. Luego,

$$\text{Rgo } f = (f(b), f(a)).$$

★

Ejemplo 7.15 *: Demuestre que la función $f(x) = x^4$ es una función par.*

Demostración : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **par**, si y solo si

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que, $\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, (intervalo simétrico) tenemos que,

$$f(-x) = (-x)^4 = ((-1)(x))^4 = (-1)^4 (x)^4 = (1)\left(x^4\right) = x^4 = f(x),$$

luego, $f(-x) = f(x)$, por lo que $f(x) = x^4$ es una función par. ★

Ejemplo 7.16 *: Estudie la simétria con los ejes coordenados de la función $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.*

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **par**, si y solo si

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ y una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **impar**, si y solo si

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que $\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, (intervalo simétrico) tenemos que,

$$f(-x) = k = f(x),$$

luego, $f(-x) = f(x)$, por lo que $f(x) = k$ es una función par. ★

Ejemplo 7.17 *: Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función impar.*

Demostración : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **impar**, si y solo si

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que $\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}$, (intervalo simétrico) tenemos que,

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x} = -f(x),$$

luego, $f(-x) = -f(x)$, por lo que $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es una función impar. ★

Ejemplo 7.18 *: Estudie la simétria con los ejes coordenados de la función* $f(x) = \sqrt{x}$.

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **par**, si y solo si

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ y una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **impar**, si y solo si

$$f(-x) = -f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que $\text{Dom } f = \mathbb{R} = [0, \infty)$, por **no** ser un intervalo simétrico, concluimos que $f(x) = \sqrt{x}$ **no** es una función par, ni impar. ★

Ejemplo 7.19 *: Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = x^2$.

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, si demostramos que $x_1 = x_2$, entonces podremos concluir que f es inyectiva. Así,

$$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1^2 = x_2^2 \iff \underbrace{x_1^2 - x_2^2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Producto: suma por su diferencia} \; a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)}}} = 0 \iff (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$$

es conocido que el producto $ab = 0$ si y solo si $a = 0$ ó $b = 0$, de aquí,

$$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 & \iff & x_1 = -x_2 \\ & \text{ó} & \\ x_1 - x_2 = 0 & \iff & x_1 = x_2, \end{cases}$$

es decir,

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = -x_2 \quad \text{ó} \quad x_1 = x_2,$$

como no se puede concluir que $x_1 = x_2$, entonces la función $f(x) = x^2$ **no** es inyectiva en su dominio. ★

Ejemplo 7.20 *: Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = x^6$.

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Por contraejemplo: Consideremos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, claramente $x_1 \neq x_2$, pero

$$f(x_1) = f(-1) = (-1)^6 = 1 = (1)^6 = f(1) = f(x_2),$$

es decir,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{pero,} \qquad f(x_1) = f(x_2),$$

con lo que concluimos que $f(x) = x^6$ **no** es inyectiva en su dominio. ★

Ejemplo 7.21 *: Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = x^3$.

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, si demostramos que $x_1 = x_2$, entonces podremos concluir que f es inyectiva. Así,

$$x_1^3 = x_2^3 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^3 - x_2^3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2\right) = 0,$$

de aquí,

$$x_1 - x_2 = 0 \qquad \text{o} \qquad x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0,$$

si $x_1 - x_2 = 0$, se tiene que $x_1 = x_2$, mientras que, si $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 0$, se tiene, al resolver esta ecuación cuadrática en variable x_1 (igualmente si se piensa en variable x_2), que

$$x_1 = \frac{-(x_2) \pm \sqrt{(x_2)^2 - 4(1)(x_2^2)}}{2(1)} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{x_2^2 - 4x_2^2}}{2} = \frac{-x_2 \pm \sqrt{-3x_2^2}}{2} \longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

a menos que, $x_2 = 0$, de donde se tiene que

$$x_1^2 + x_1(0) + (0)^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1^2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = 0,$$

con lo que, $x_1 = x_2$, así, que la expresión $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 \neq 0$, excepto cuando x_1 y x_2 sean iguales a cero, por lo tanto, la única ecuación que se cumple es $x_1 - x_2 = 0$, por lo que concluimos que $f(x) = x^3$ es una función inyectiva. ★

Ejemplo 7.22 *: Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = k$, *donde* $k \in \mathbb{R}$, *es una constante.*

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Por contraejemplo: Consideremos $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, claramente $x_1 \neq x_2$, pero

$$f(x_1) = f(1) = k = f(2) = f(x_2),$$

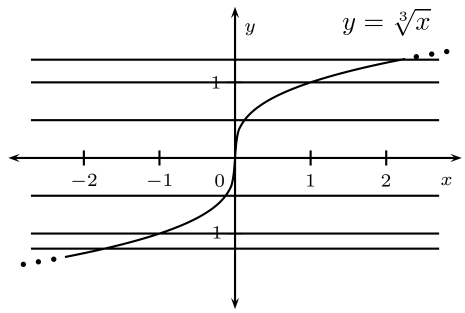
es decir,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{pero,} \qquad f(x_1) = f(x_2),$$

con lo que concluimos que $f(x) = x^6$ **no** es inyectiva en su dominio. ★

Ejemplo 7.23 : *Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Solución : Este estudio, a diferencia de los ejemplos anteriores, lo realizaremos graficamente, es conocido que una función es inyectiva en un intervalo I, si al trazar rectas verticales, cada recta vertical toca a la grafica de la función f en un solo punto



por lo tanto, la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es inyectiva. ★

Ejemplo 7.24 : *Consideremos la función* $f(x) = [\![x]\!]$, *definida como*

$$[\![x]\!] = \textit{mayor entero igual ó menor que } x,$$

denominada ***función parte entera de*** x. *Hallar*

1. $[\![1.27]\!]$ 2. $[\![3.49]\!]$ 3. $[\![0.735]\!]$ 4. $[\![-0.181]\!]$ 5. $[\![-2.001]\!]$

Solución : 1. Tenemos que

$$[\![1.27]\!] = \text{mayor entero igual ó menor que } 1.27,$$

es decir, aquel mayor valor $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k \leq 1.27$, de aquí,

$$k \in \{1, 0, -1, -2, -3, -4, \ldots\},$$

donde, el mayor valor es $k = 1$, por lo tanto, $[\![1.27]\!] = 1$.

2. Tenemos que

$$[\![3.49]\!] = \text{mayor entero igual ó menor que } 3.49,$$

es decir, aquel mayor valor $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k \leq 3.49$, de aquí,

$$k \in \{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, \ldots\},$$

donde, el mayor valor es $k = 3$, por lo tanto, $[\![3.49]\!] = 3$.

3. Tenemos que

$$[\![0.735]\!] = \text{mayor entero igual ó menor que } 0.735,$$

es decir, aquel mayor valor $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k \leq 0.735$, de aquí,

$$k \in \{0, -1, -2, -3, -4, -5, \ldots\},$$

donde, el mayor valor es $k = 0$, por lo tanto, $[\![0.735]\!] = 0$.

4. Tenemos que

$$[\![-0.181]\!] = \text{mayor entero igual ó menor que } -0.181,$$

es decir, aquel mayor valor $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k \leq -0.181$, de aquí,

$$k \in \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \ldots\},$$

donde, el mayor valor es $k = -1$, por lo tanto, $[\![-0.181]\!] = -1$.

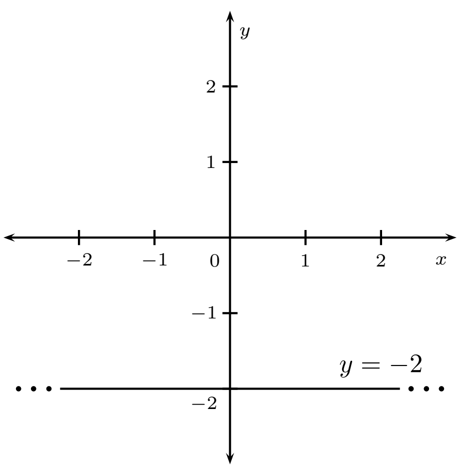
5. Tenemos que
$$[\![-2.001]\!] = \text{mayor entero igual ó menor que } -2.001,$$
es decir, aquel mayor valor $k \in \mathbb{Z}$, tal que $k \leq -2.001$, de aquí,
$$k \in \{-3, -4, -5, -6, -7, \dots\},$$
donde, el mayor valor es $k = -3$, por lo tanto, $[\![-2.001]\!] = -3$. ★

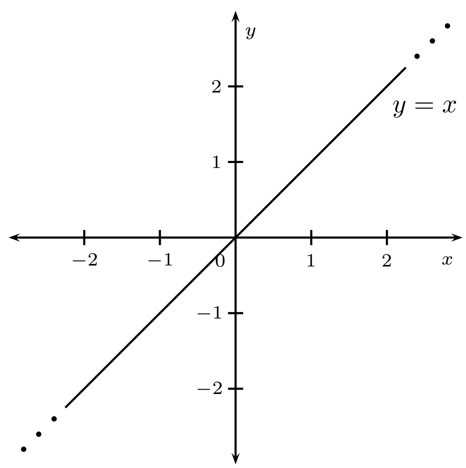
Ejemplo 7.25 *: Estudiar la inyectividad de la función* $f(x) = [\![x]\!]$.

Solución : Por contraejemplo: Consideremos $x_1 = 1.1$ y $x_2 = 1.2$, claramente $x_1 \neq x_2$, pero
$$f(x_1) = f(1.1) = [\![1.1]\!] = 1 = [\![1.2]\!] = f(1.2) = f(x_2),$$
es decir,
$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{pero}, \qquad f(x_1) = f(x_2),$$
con lo que concluimos que $f(x) = [\![x]\!]$ **no** es inyectiva en su dominio. ★

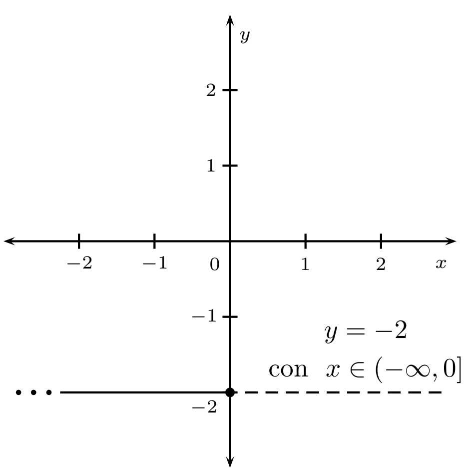
Ejemplo 7.26 *: Graficar la función* $f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad x \leq 0 \\ x & si \quad x > 0. \end{cases}$

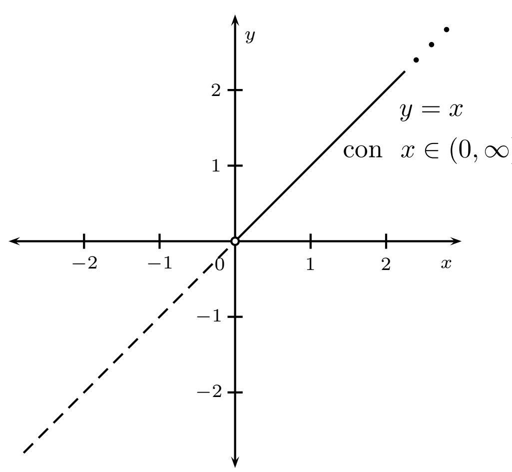
Solución : Tenemos que, las graficas de las funciones involucradas en la función a trozos f son



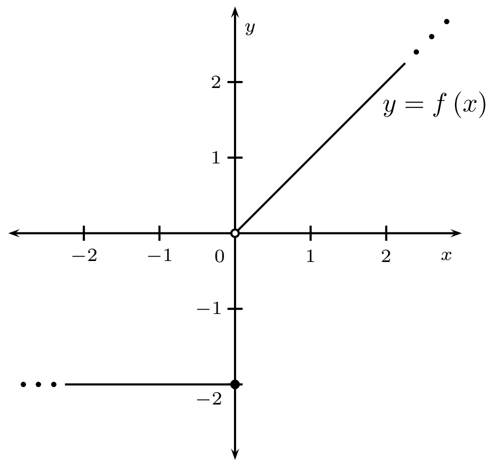


de cada grafica consideramos solo aquel trozo de grafica que corresponde a los valores x dado en f, así,





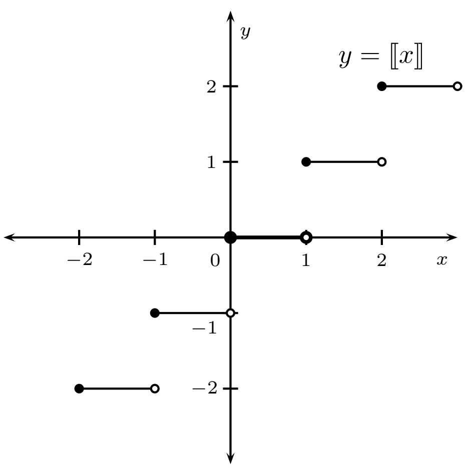
Luego, la grafica de la función a trozos f es

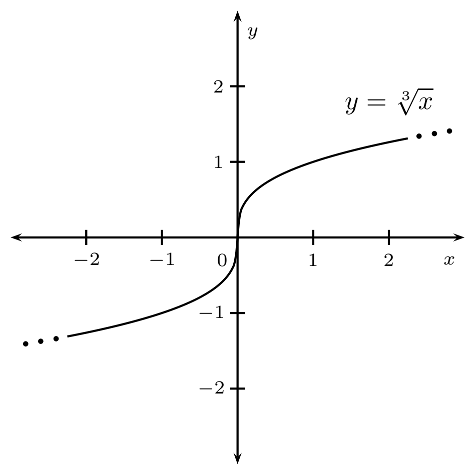


★

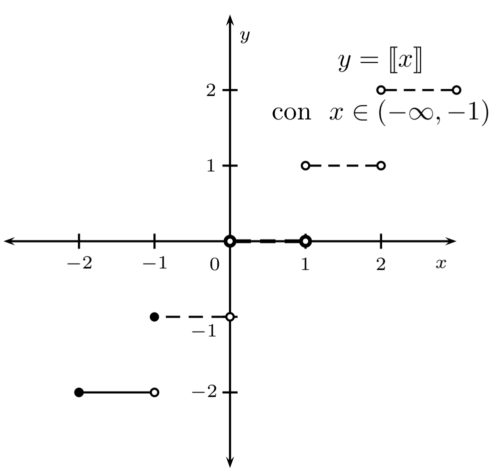
Ejemplo 7.27 *: Graficar la función* $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & si \quad x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x} & si \quad x > -1. \end{cases}$

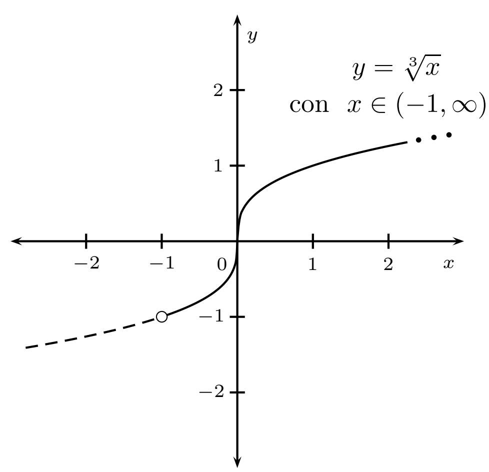
Solución : Tenemos que, las graficas de las funciones involucradas en la función a trozos f son



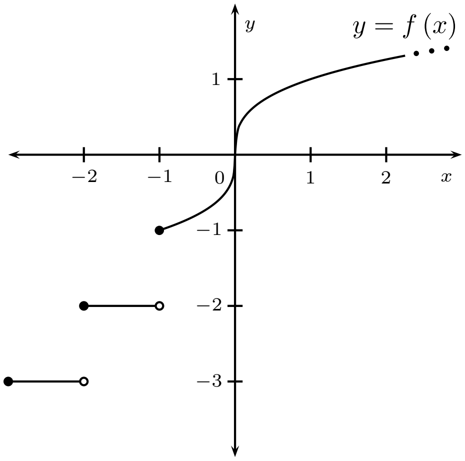


de cada grafica consideramos solo aquel trozo de grafica que corresponde a los valores x dado en f, así,





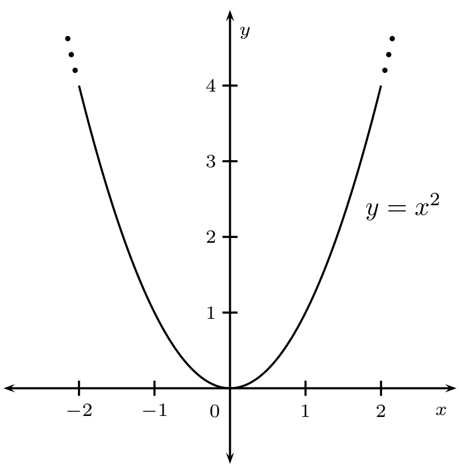
Luego, la grafica de la función a trozos f es

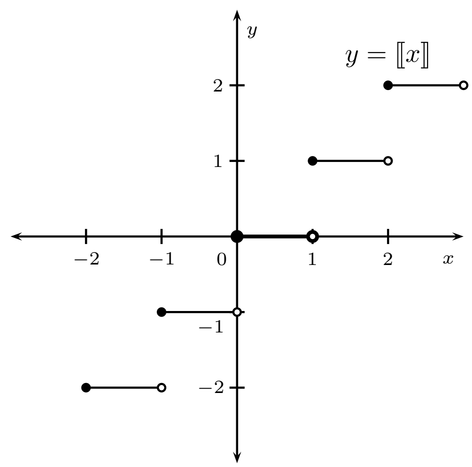


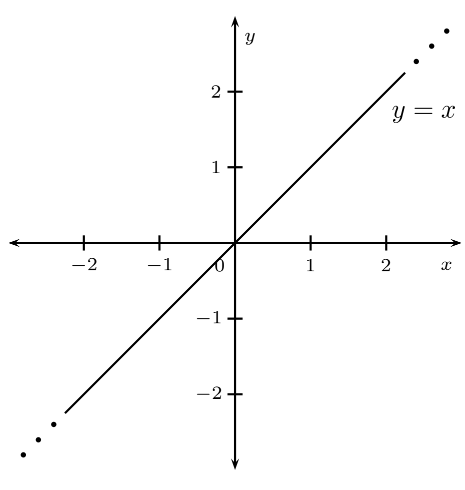
★

Ejemplo 7.28 *: Graficar la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < -3/2 \\ [\![x]\!] & si \quad x \in [-3/2, 1) \\ x & si \quad x > 1. \end{cases}$

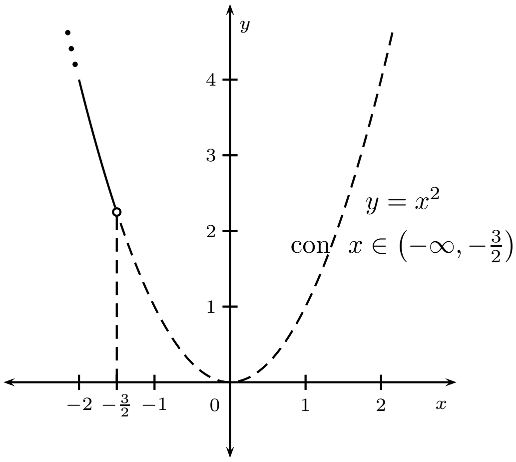
Solución : Tenemos que, las graficas de las funciones involucradas en la función a trozos f son

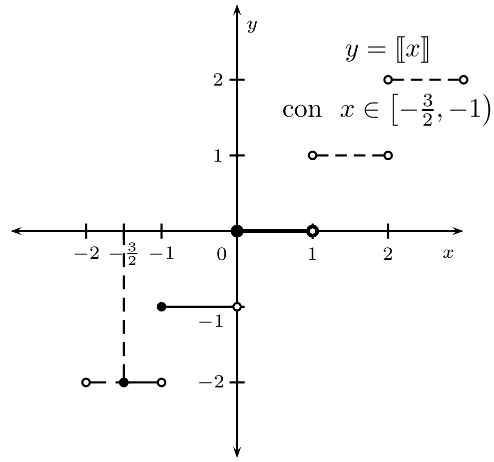


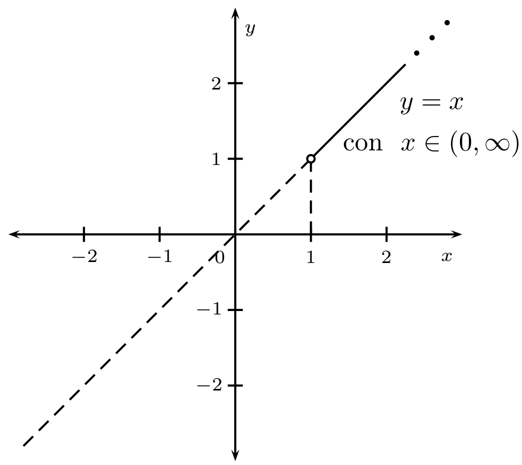




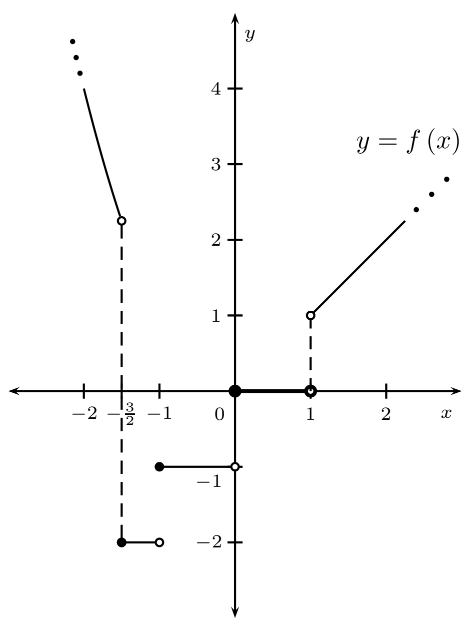
de cada grafica consideramos solo aquel trozo de grafica que corresponde a los valores x dado en f, así,







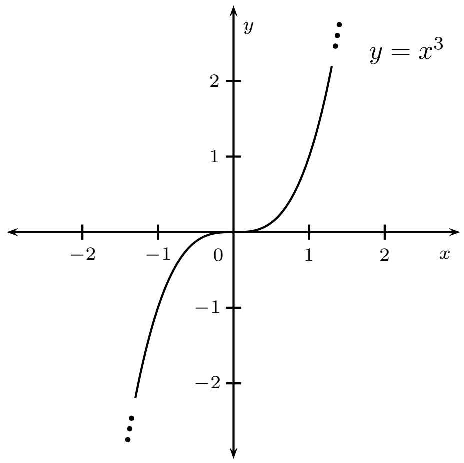
Luego, la grafica de la función a trozos f es

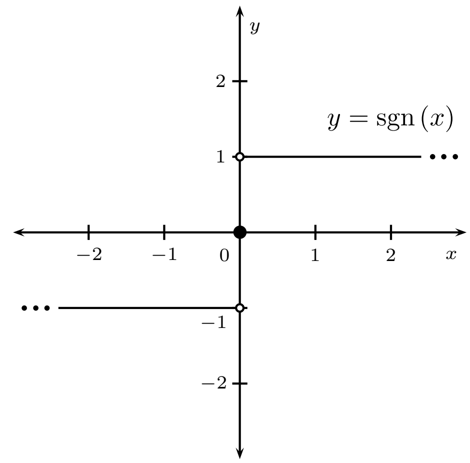


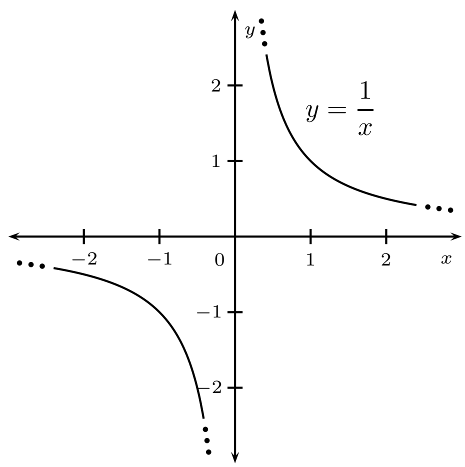
★

Ejemplo 7.29 *: Graficar la función* $f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad |x| > 1 \\ \operatorname{sgn}(x) & si \quad |x| = 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad 0 < |x| < 1 \end{cases}$

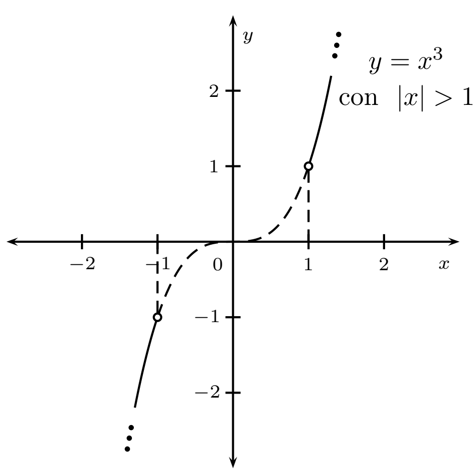
Solución : Tenemos que, las graficas de las funciones involucradas en la función a trozos f son

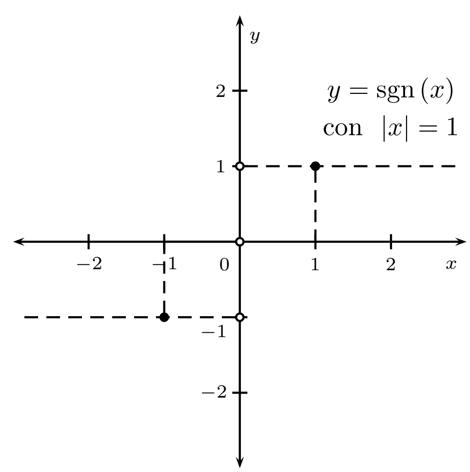




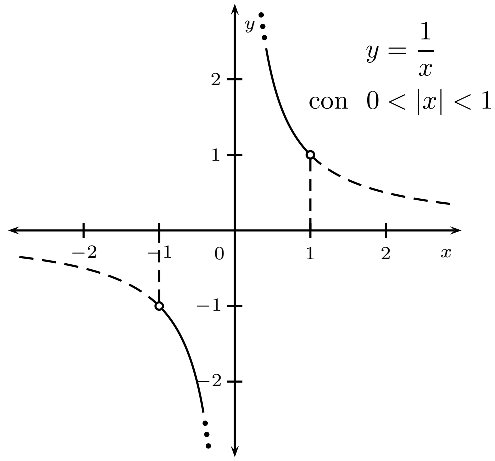


de cada grafica consideramos solo aquel trozo de grafica que corresponde a los valores x dado en f, así,



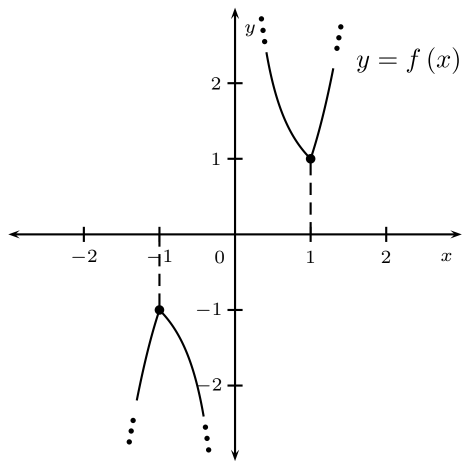


$|x| > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 1 \quad \text{ó} \quad x < -1$ $\qquad$ $|x| = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1 \quad \text{ó} \quad x = -1$



$$0 < |x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 < x < 0 \ \text{ y } \ 0 < x < 1$$

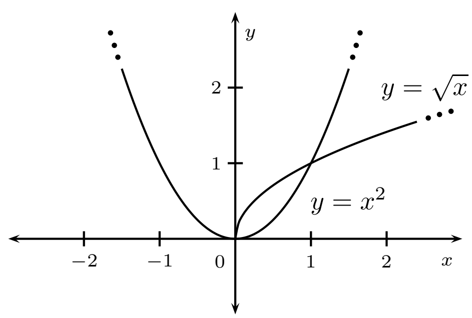
Luego, la grafica de la función a trozos f es



★

Ejemplo 7.30 : *Resolver graficamente la siguiente desigualdad* $x^2 \leq \sqrt{x}$.

Solución : Graficamos



Buscamos los puntos de intersección entre las dos funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, para ello debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = [0, \infty),$$

debemos resolver la ecuación

$$x^2 = \sqrt{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = [0, \infty).$$

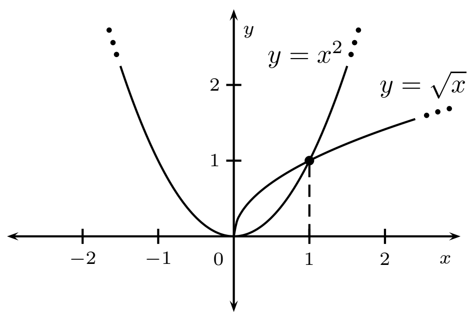
Entonces,

$$x^2 = \sqrt{x} \iff x^4 = \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Como } x \in [0,\infty) \\ |x| = x}}}}{|x|} \iff x^4 = x \iff x^4 - x = 0 \iff x(x-1)\left(x^2+x+1\right) = 0,$$

de aquí,

$$x(x-1)\left(x^2+x+1\right) = 0 \iff x = 0 \quad \text{ó} \quad x = 1.$$

Así,



Observemos que la función $f(x) = x^2$ se encuentra por debajo ó coincide con la función $g(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 1]$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad

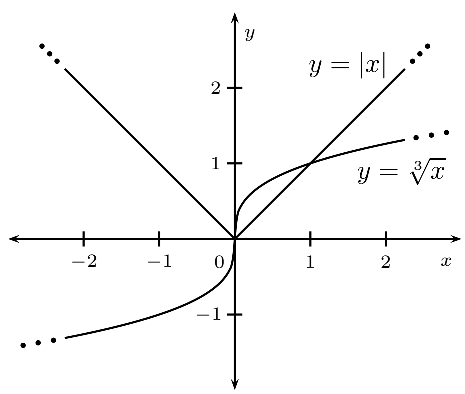
$$x^2 \leq \sqrt{x}$$

viene dada por $x \in [0, 1]$

★

Ejemplo 7.31 *: Resolver graficamente la siguiente desigualdad* $|x| > \sqrt[3]{x}$.

Solución : Graficamos



Buscamos los puntos de intersección entre las dos funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, para ello debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = \mathbb{R},$$

debemos resolver la ecuación

$$|x| = \sqrt[3]{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R}.$$

Observemos que la intersección de las funciones ocurre para los x positivos, por lo tanto, $|x| = x$ y resolvemos

$$x = \sqrt[3]{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R}.$$

Entonces,

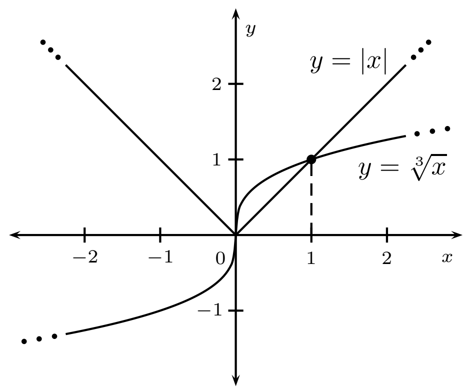
$$x = \sqrt[3]{x} \iff x^3 = x \iff x^3 - x = 0 \iff x\left(x^2-1\right) = 0 \iff x\,(x-1)\,(x+1) = 0,$$

de aquí,

$$x\,(x-1)\,(x+1) = 0 \iff x = 0, \quad x = -1 \quad \text{ó} \quad x = 1,$$

pero $x = -1$ no puede ocurrir, ya que la intersección ocurre para los valores $x \geq 0$, luego, los valores x son $x = 0$ y $x = 1$.

Así,



Observemos que la función $f(x) = |x|$ se encuentra por encima de la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $(-\infty, 0)$ y en $(1, \infty)$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad

$$|x| > \sqrt[3]{x}$$

viene dada por $x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, \infty)$

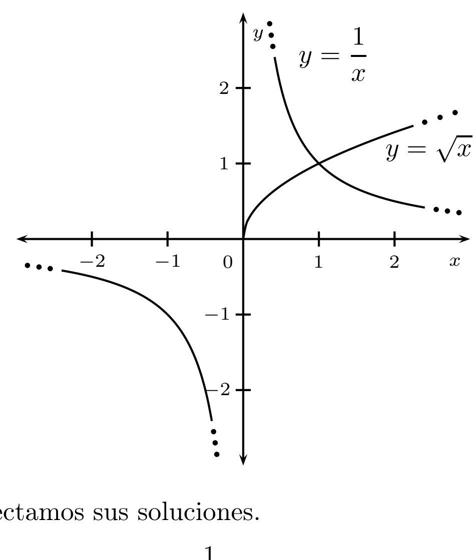
★

Ejemplo 7.32 *: Resolver graficamente la siguiente desigualdad* $\dfrac{1}{x} < \sqrt{x} \leq x$.

Solución : Resolvemos las dos desigualdades

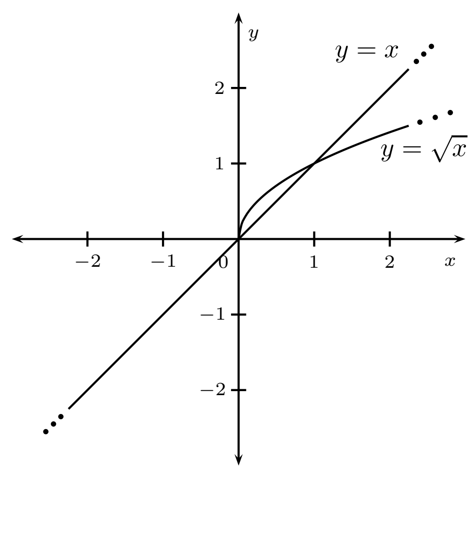
Desigualdad I

$$\frac{1}{x} < \sqrt{x}$$



Desigualdad II

$$\sqrt{x} \leq x$$



e intersectamos sus soluciones.

- **Desigualdad I :** $\dfrac{1}{x} < \sqrt{x}$. Buscamos los puntos de intersección entre las dos funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt{x}$, para ello debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = [0, \infty),$$

debemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = (0, \infty).$$

Entonces,

$$\frac{1}{x} = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Como } x \in [0,\infty) \\ |x| = x}}}}{\frac{1}{x^2} = |x|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^2} - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 - x^3}{x^2} = 0,$$

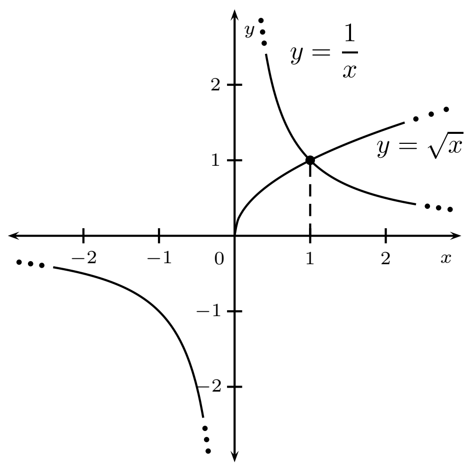
de aquí,

$$1 - x^3 = 0, \quad \text{siempre y cuando} \quad x^2 \neq 0,$$

por lo tanto

$$(1 - x)\left(x^2 + x + 1\right) = 0, \quad \text{siempre y cuando} \quad x \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1.$$

Así,



Observemos que la función $f(x) = \frac{1}{x}$ se encuentra por debajo de la función $g(x) = \sqrt{x}$ en el intervalo $(1, \infty)$. Por lo tanto, la solución de la desigualdad I

$$\frac{1}{x} < \sqrt{x}$$

viene dada por $\text{sol}_1 : x \in (1, \infty)$.

- **Desigualdad II :** $\sqrt{x} \leq x$. Buscamos los puntos de intersección entre las dos funciones $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x$, para ello debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de g y al dominio de h, tal que

$$g(x) = h(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } g = [0, \infty) \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } h = \mathbb{R},$$

debemos resolver la ecuación

$$x = \sqrt{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h = [0, \infty).$$

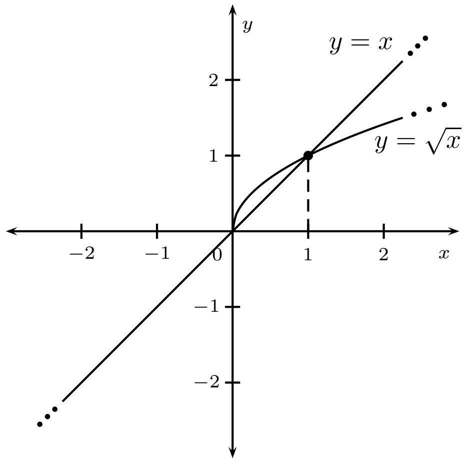
Entonces,

$$x = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Como } x \in [0,\infty) \\ |x| = x}}}}{x^2 = |x|} \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x - 1) = 0,$$

de aquí,

$$x(x - 1) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 0 \qquad \text{ó} \qquad x = 1.$$

Así,



Observemos que la función $g(x) = \sqrt{x}$ se encuentra por debajo ó coincide con la función $h(x) = x$ en el intervalo $[1, \infty)$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad II

$$\sqrt{x} \leq x$$

viene dada por $\text{sol}_2 : x \in [1\infty)$.

Luego, la solución de la cadena de desigualdades viene dada por

$$\text{sol} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = (1, \infty) \bigcap [1, \infty) = (1, \infty).$$

★

Ejemplo 7.33 *: Resolver graficamente la siguiente desigualdad* $\dfrac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x} \geq [\![x]\!]$.

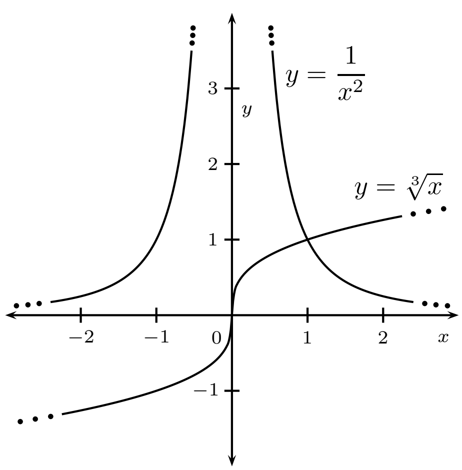
Solución : Resolvemos las dos desigualdades

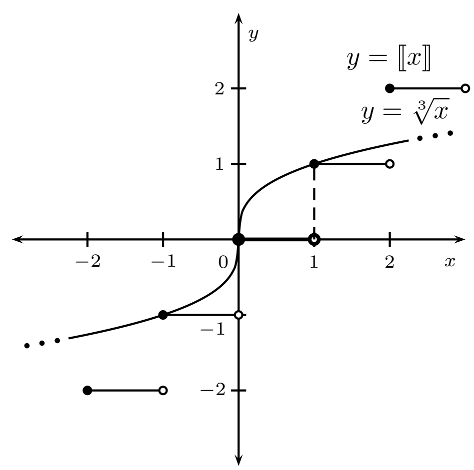
Desigualdad I

$$\frac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x}$$

Desigualdad II

$$\sqrt[3]{x} \geq [\![x]\!]$$





e intersectamos sus soluciones.

- **Desigualdad I :** $\dfrac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x}$. Buscamos los puntos de intersección entre las dos funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, para ello debemos hallar los valores x pertenecientes al dominio de f y al dominio de g, tal que

$$f(x) = g(x),$$

puesto que,

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = \mathbb{R},$$

debemos resolver la ecuación

$$\frac{1}{x^2} = \sqrt[3]{x}, \qquad \text{para todo} \quad x \in \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Entonces,

$$\frac{1}{x^2} = \sqrt[3]{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^6} = x \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x^6} - x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1 - x^7}{x^6} = 0,$$

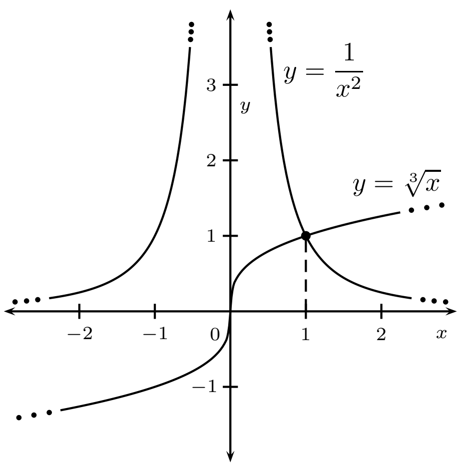
de aquí,

$$1 - x^7 = 0, \quad \text{siempre y cuando} \quad x^2 \neq 0,$$

por lo tanto

$$(1 - x)\left(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1\right) = 0, \quad \text{siempre y cuando} \quad x \neq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 1.$$

Así,



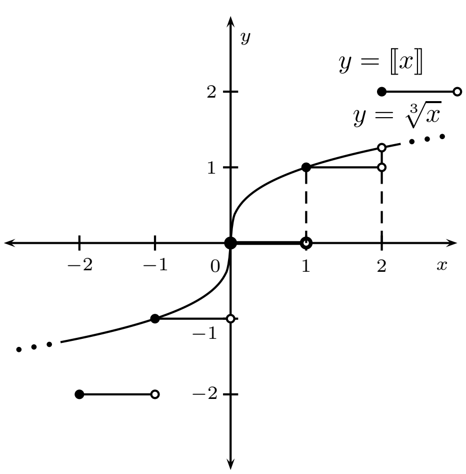
Observemos que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ se encuentra por encima de la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $(-\infty, 1) - \{0\}$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad I

$$\frac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x}$$

viene dada por $\text{sol}_1 : x \in (-\infty, 1) - \{0\}$.

- **Desigualdad II :** $\sqrt[3]{x} \geq [\![x]\!]$. Observemos las graficas de las funciones $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $h(x) = [\![x]\!]$.



La función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ se encuentra por encima ó coincide con la función $h(x) = [\![x]\!]$ en el intervalo $(-\infty, 2)$.

Por lo tanto, la solución de la desigualdad II

$$\sqrt[3]{x} \geq [\![x]\!]$$

viene dada por $\text{sol}_2 : x \in (-\infty, 2)$.

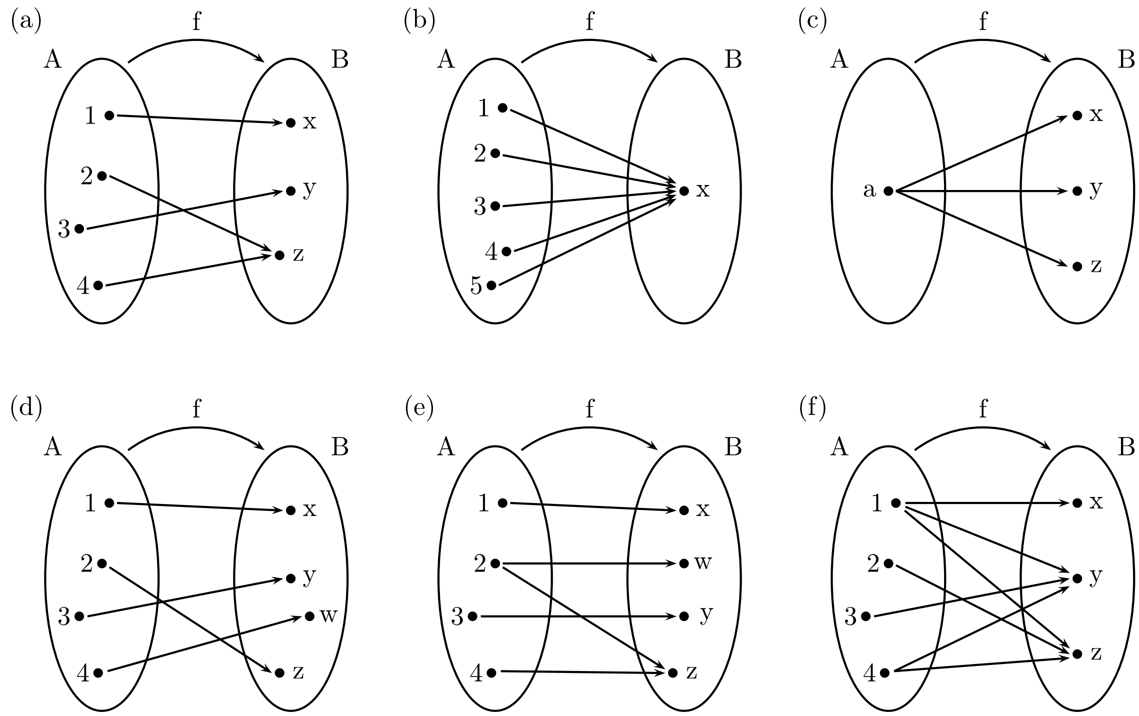
Luego, la solución de la cadena de desigualdades viene dada por

$$\text{sol} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \{(-\infty, 1) - \{0\}\} \bigcap (-\infty, 2) = (-\infty, 1) - \{0\}.$$

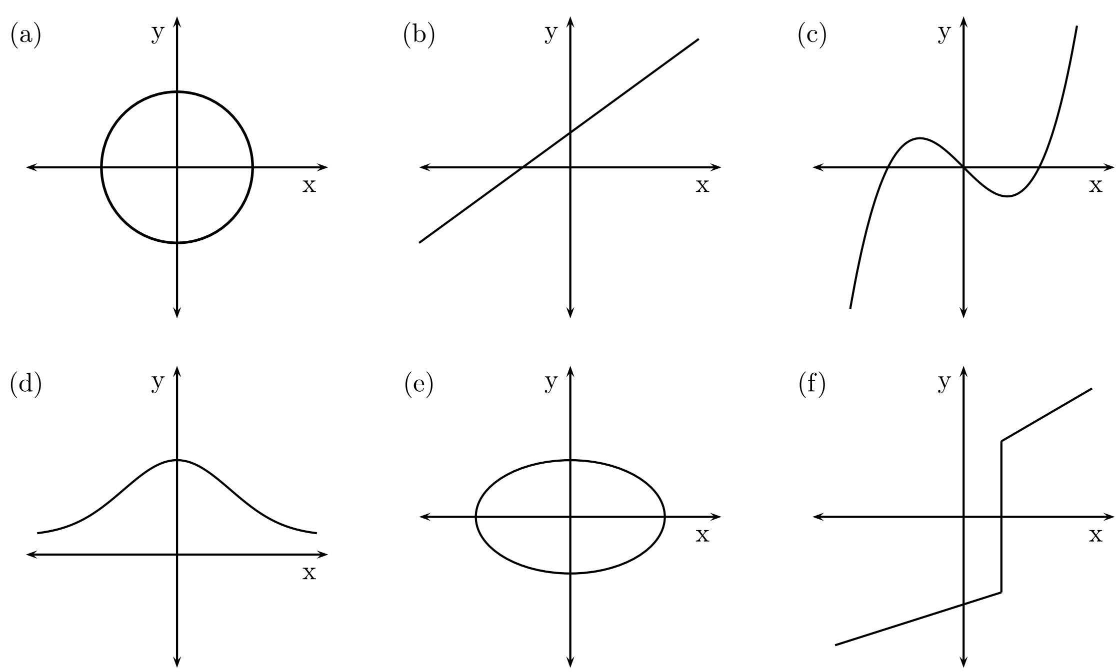
★

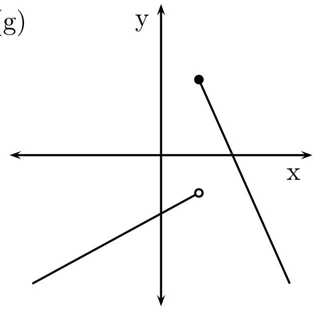
Ejercicios

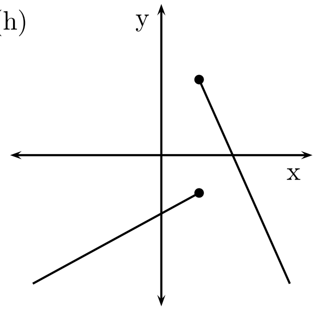
1. Diga cual de las siguientes relaciones representa una función. Justifique su respuesta.

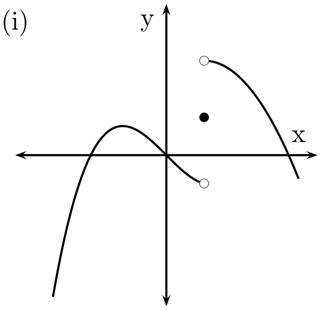


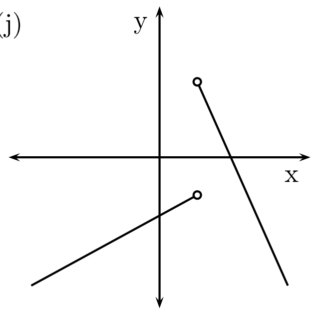
2. Diga cual de las siguientes graficas representa una función de la forma $y = f(x)$. Justifique su respuesta.

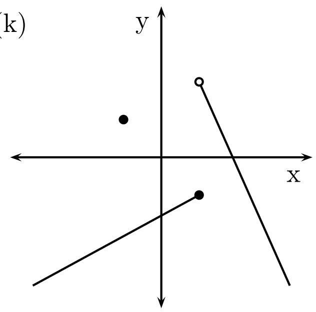


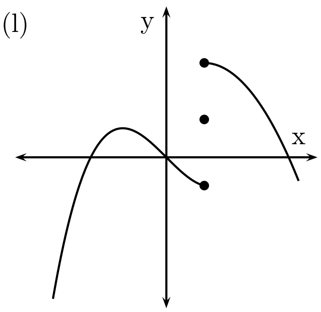
(g)


(h)


(i)


(j)


(k)


(l)


3. Sea $f(x)=x$. Calcular: **a)** $f(-1)$; **b)** $f(\pi)$; **c)** $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$, con $h\neq 0$.

4. Sea $f(x)=-2$. Calcular: **a)** $f(-2)$; **b)** $f(0)$; **c)** $\dfrac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$, con $h\neq 0$.

5. Sea $f(x)=\sqrt{x}$. Calcular: **a)** $f(2)$; **b)** $f(8)$; **c)** $\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$, con $h\neq 0$.

6. Sea $f(x)=x^2$. Calcular: **a)** $f(h)$; **b)** $f(-3)$; **c)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, con $h\neq 0$.

7. Sea $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Calcular: **a)** $f(1)$; **b)** $f(8)$; **c)** $\dfrac{f(-27+h)-f(-27)}{h}$, con $h\neq 0$.

8. Sea $f(x)=x^3$. Calcular: **a)** $f(h+2)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, con $h\neq 0$.

9. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Calcular: **a)** $f(1-h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, con $h\neq 0$.

10. Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$. Calcular: **a)** $f(1-h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, con $h\neq 0$.

11. Sea $f(x)=|x|$. Calcular: **a)** $f(-h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f\left(\frac{1}{2}+h\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{h}$, con $h\neq 0$.

12. Consideremos la función $f(x)=\llbracket x\rrbracket$, definida como

$$\llbracket x\rrbracket = \text{mayor entero igual ó menor que } x,$$

denominada **función parte entera de** x. Hallar

1.	$\llbracket 1.27\rrbracket$	2.	$\llbracket 3.49\rrbracket$	3.	$\llbracket 0.735\rrbracket$	4.	$\llbracket -0.181\rrbracket$	5.	$\llbracket -2.001\rrbracket$
6.	$\llbracket -0.01\rrbracket$	7.	$\llbracket 0\rrbracket$	8.	$\llbracket 0.01\rrbracket$	9.	$\llbracket -\pi\rrbracket$	10.	$\left\llbracket \dfrac{\pi}{2}\right\rrbracket$
11.	$\llbracket -\sqrt{2}\rrbracket$	12.	$\llbracket \sqrt{3}\rrbracket$	13.	$\left\llbracket \dfrac{\sqrt[3]{8}}{3}\right\rrbracket$	14.	$\llbracket -1.001\rrbracket$	15.	$\llbracket 1.001\rrbracket$

13. Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, definida como

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases},$$

denominada **función signo de** x. Hallar

1. $\operatorname{sgn}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 2. $\operatorname{sgn}(-1.24)$ 3. $\operatorname{sgn}(0)$ 4. $\operatorname{sgn}(3)$ 5. $\operatorname{sgn}(\pi)$

6. $\operatorname{sgn}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ 7. $\operatorname{sgn}(0.01)$ 8. $\operatorname{sgn}(-0.01)$ 9. $\operatorname{sgn}\left(\sqrt{2}\right)$ 10. $\operatorname{sgn}\left(-\sqrt{3}\right)$

14. Hallar los puntos de corte con los ejes coordenados de las siguientes funciones, donde k es una constante

1. $f(x) = k$ 2. $f(x) = x$ 3. $f(x) = x^2$ 4. $f(x) = x^3$

5. $f(x) = x^4$ 6. $f(x) = |x|$ 7. $f(x) = \sqrt{x}$ 8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

9. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 10. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 11. $f(x) = [\![x]\!]$ 12. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$

15. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$.

16. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$.

17. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.

18. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

19. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

20. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt{x}$.

21. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

22. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

23. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

24. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

25. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

26. Demuestre que la función $f(x) = x$ es estrictamente creciente para todo $x \in \mathbb{R}$.

27. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es estrictamente creciente para todo $x \in [0, \infty)$.

28. Demuestre que la función $f(x) = x^2$ es estrictamente decreciente si $x < 0$.

29. Demuestre que la función $f(x) = x^3$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

30. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt{x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

31. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt[4]{x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

32. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es estrictamente decreciente en todo su dominio.

33. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es estrictamente creciente si $x < 0$.

34. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ es estrictamente decreciente si $x > 0$.

35. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

36. Demuestre que la función $f(x) = \sqrt[5]{x}$ es estrictamente creciente en todo su dominio.

37. Demuestre que la función $f(x) = x^4$ es estrictamente creciente si $x > 0$.

38. Demuestre que la función $f(x) = x^4$ es estrictamente decreciente si $x < 0$.

39. Demuestre que la función $f(x) = [\![x]\!]$ es creciente en todo su dominio.

40. Demuestre que la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ es creciente en todo su dominio.

41. Demuestre que la función $f(x) = |x|$ es estrictamente creciente si $x > 0$.

42. Demuestre que la función $f(x) = |x|$ es estrictamente decreciente si $x < 0$.

43. Completar la siguiente tabla según lo demostrado en los ejercicios del 26 hasta el 42 sobre la monotonía de las siguientes funciones básicas

Monotonía de la función

Función	Intervalo de crecimiento	Intervalo de decrecimiento
$f(x) = x$		
$f(x) = x^2$		
$f(x) = x^3$		
$f(x) = x^4$		
$f(x) = \sqrt{x}$		
$f(x) = \sqrt[4]{x}$		
$f(x) = \sqrt[3]{x}$		
$f(x) = \sqrt[5]{x}$		
$f(x) = \|x\|$		
$f(x) = \dfrac{1}{x}$		
$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$		
$f(x) = [\![x]\!]$		
$f(x) = \operatorname{sgn}(x)$		

44. Determinar el rango de la función $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

45. Determinar el rango de las funciones del ejercicio 43.

46. Determinar el rango de la función $f(x) = x$, si $x \in [-2, 5]$.

47. Determinar el rango de la función $f(x) = \sqrt{x}$, si $x \in (1, 9]$.

48. Determinar el rango de la función $f(x) = \sqrt[3]{x}$, si $x \in (-4, 8)$.

49. Determinar el rango de la función $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$, si $x \in \left[0, \sqrt{3}\right]$.

50. Determinar el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$, si $x \in \left[-3, -\dfrac{1}{2}\right]$.

51. Determinar el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, si $x \in [-5, 0)$.

52. Determinar el rango de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, si $x \in \left(0, \dfrac{7}{2}\right]$.

53. Demuestre que si la función $y = f(x)$ es una función estrictamente creciente para todo $x \in (a, b)$, entonces,
$$\text{Rgo } f = (f(a), f(b)).$$

54. Demuestre que si la función $y = f(x)$ es una función estrictamente decreciente para todo $x \in (a, b)$, entonces,
$$\text{Rgo } f = (f(b), f(a)).$$

55. Estudie la simétria con los ejes coordenados de la función $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

56. Diga cuales de las funciones básicas dadas en el ejercicio 43 son pares, impares ó ninguna de ellas.

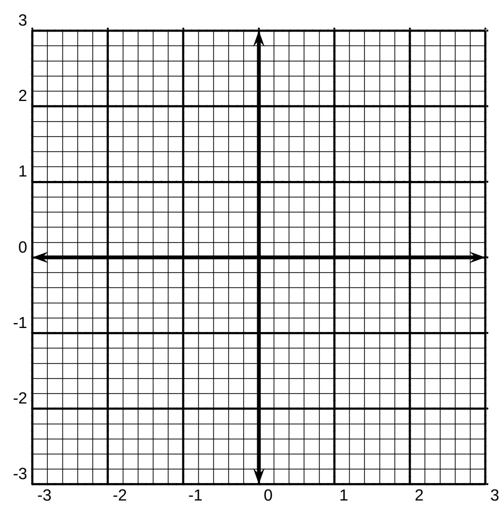
57. Estudiar la inyectividad de la función $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, es una constante.

58. Estudie la inyectividad de funciones básicas dadas en el ejercicio 43.

59. Considere la **Función Constante :** $f(x) = k$, donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

x	$f(x)$
-2	
$-\dfrac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\dfrac{5}{2}$	



Función Constante $f(x) = k$; $P(x, y) = (x, k)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

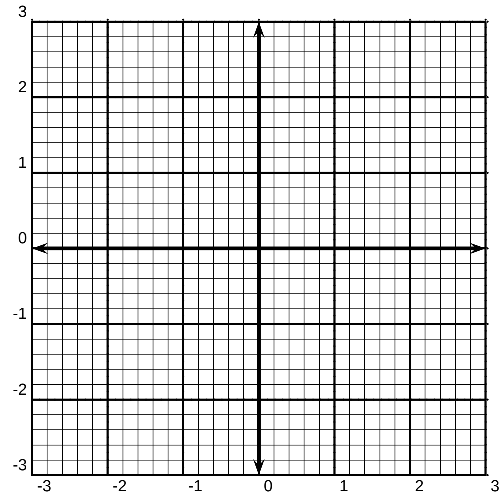
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

60. Considere la **Función Identidad :** $f(x) = x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función Identidad $f(x) = x$; $P(x, y) = (x, x)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

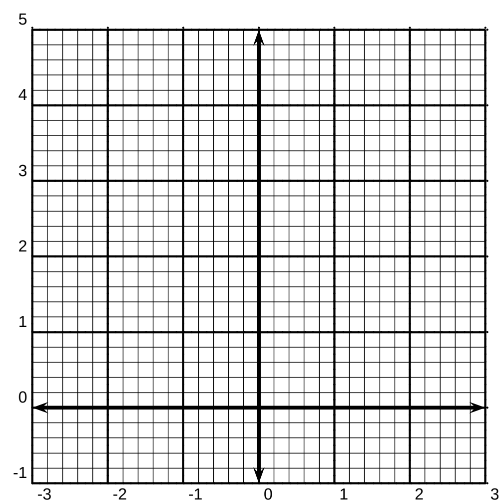
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

61. Considere la **Función Cuadrática :** $f(x) = x^2$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
2	



Función Cuadrática $f(x) = x^2$; $P(x, y) = \left(x, x^2\right)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

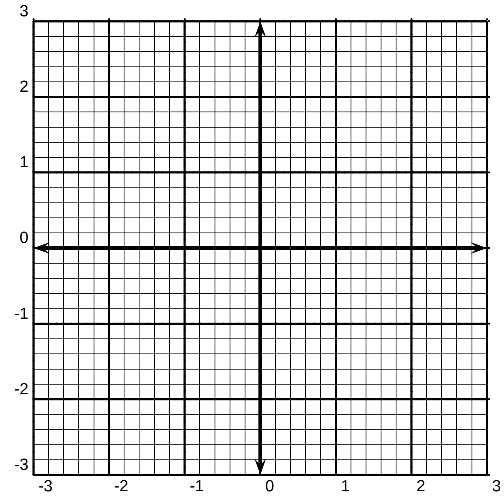
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

62. Considere la **Función Cúbica :** $f(x) = x^3$.

x	$f(x)$
$-\frac{7}{5}$	
-1	
$-\frac{1}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt[3]{2}$	
$\frac{7}{5}$	



Función Cúbica $f(x) = x^3$; $P(x,y) = \left(x, x^3\right)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

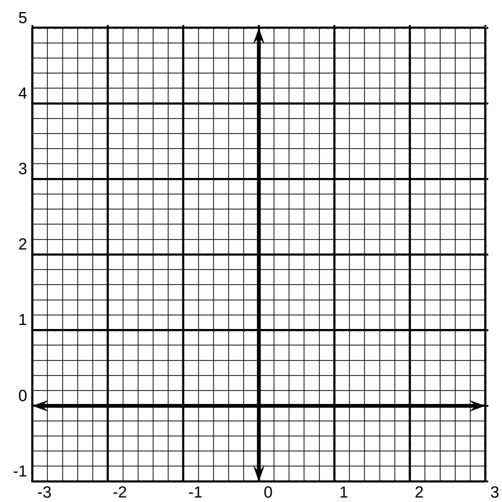
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

63. Considere la **Función Polinómica grado** 4 **:** $f(x) = x^4$.

x	$f(x)$
$-\frac{7}{5}$	
$-\frac{5}{4}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{7}{5}$	
$\sqrt{2}$	



Función Polinómica grado 4 $f(x) = x^4$; $P(x,y) = \left(x, x^4\right)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

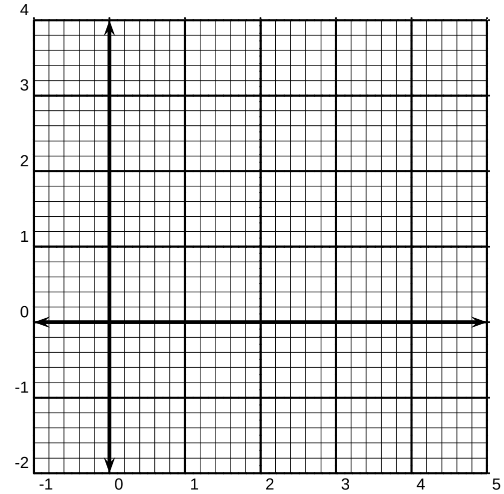
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

64. Considere la **Función Raíz cuadrada :** $f(x) = \sqrt{x}$.

x	$f(x)$
$-\frac{1}{2}$	
0	
$\frac{1}{4}$	
1	

x	$f(x)$
2	
3	
4	
$\frac{9}{2}$	



Función Raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$; $P(x, y) = (x, \sqrt{x})$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

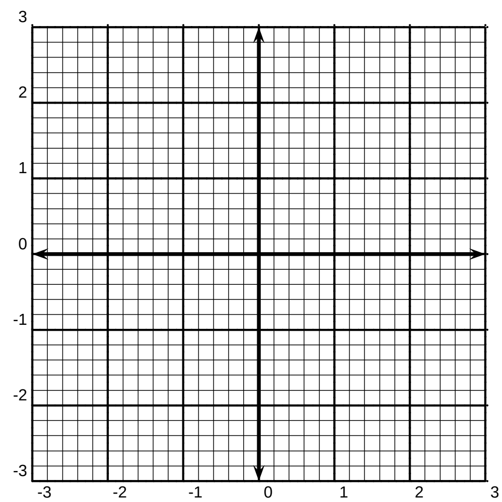
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

65. Considere la **Función Raíz cúbica :** $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función Raíz cúbica $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $P(x, y) = (x, \sqrt[3]{x})$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

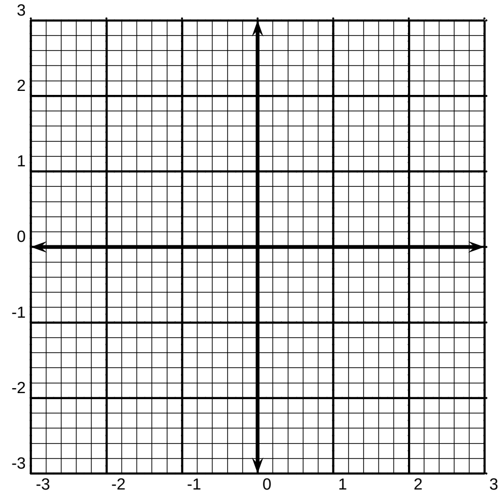
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

66. Considere la **Función Hipérbola básica :** $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	$f(x)$
-2	
-1	
$-\dfrac{1}{2}$	
$-\dfrac{2}{5}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{2}{5}$	
$\dfrac{1}{2}$	
1	
2	
$\dfrac{5}{2}$	



Función Hipérbola básica $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $P(x, y) = \left(x, \dfrac{1}{x}\right)$

Dominio : __________ Rango : __________ Inyectiva : __________

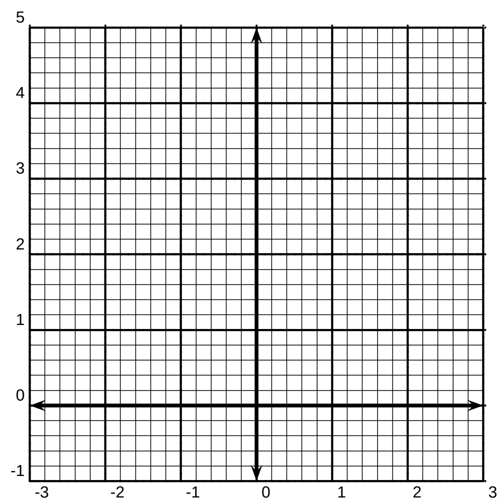
Punto(s) de corte: Eje x: __________ Eje y: __________

Monotonía : __________ Simetría : __________

67. Considere la **Función Hipérbola cuadrática :** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

x	$f(x)$
-2	
-1	
$-\dfrac{1}{2}$	
$-\dfrac{9}{20}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{9}{20}$	
$\dfrac{1}{2}$	
1	
2	
$\dfrac{5}{2}$	



Función Hipérbola cuadrática $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$; $P(x, y) = \left(x, \dfrac{1}{x^2}\right)$

Dominio : __________ Rango : __________ Inyectiva : __________

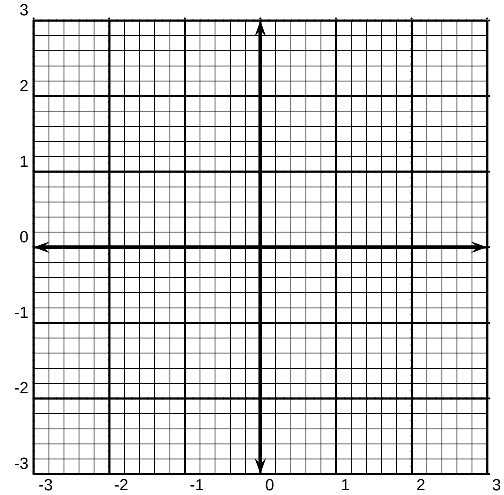
Punto(s) de corte: Eje x: __________ Eje y: __________

Monotonía : __________ Simetría : __________

68. Considere la **Función Valor absoluto :** $f(x) = |x|$.

x	$f(x)$
-2	
$-\dfrac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{1}{2}$	
1	
2	
$\dfrac{5}{2}$	



Función Valor absoluto $f(x) = |x|$; $P(x,y) = (x, |x|)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

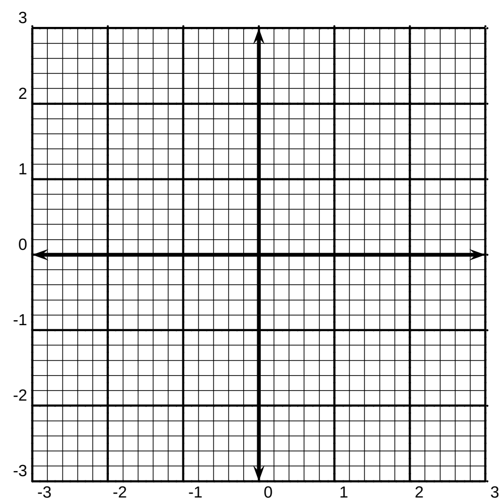
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

69. Considere la **Función Parte entera :** $f(x) = [\![x]\!]$.

x	$f(x)$
-2	
$-\dfrac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\dfrac{5}{2}$	



Función Parte entera $f(x) = [\![x]\!]$; $P(x,y) = (x, [\![x]\!])$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

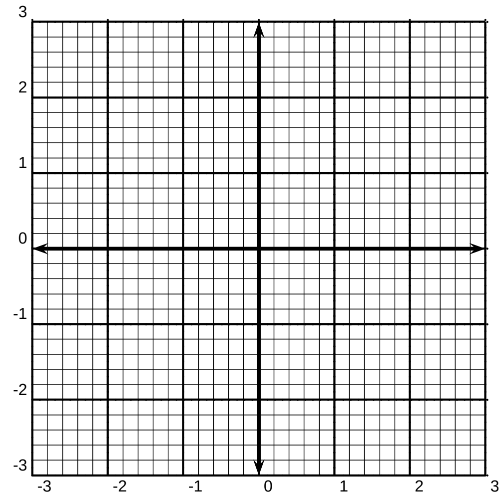
Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

70. Considere la **Función Signo :** $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función Signo $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$; $P(x, y) = (x, \operatorname{sgn}(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ____________ Eje y: ____________

Monotonía : ________ Simetría : ________

71. (a) Graficar las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$ y $h(x) = x^6$ en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

72. (a) Graficar las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5$ y $h(x) = x^7$ en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

73. (a) Graficar las funciones $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt[4]{x}$ y $h(x) = \sqrt[6]{x}$ en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

74. (a) Graficar las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = \sqrt[5]{x}$ y $h(x) = \sqrt[7]{x}$ en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

75. (a) Graficar las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ y $h(x) = x$ para $x \geq 0$, en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

76. (a) Graficar las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ y $h(x) = x$, en un mismo sistema coordenado.
 (b) ¿Qué observa en cuanto a la forma de las graficas obtenidas?.

77. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

78. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

79. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ [\![x]\!] & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$

80. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & \text{si} \quad x \leq -1 \\ \sqrt[3]{x} & \text{si} \quad x > -1. \end{cases}$

81. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad |x| \leq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt[3]{x} & \text{en caso contrario} \end{cases}$

82. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad |x| \neq 0 \\ -2 & \text{en caso contrario} \end{cases}$

83. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x < -3 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si} \quad -3 < x < 2 \\ x & \text{si} \quad x \geq 2. \end{cases}$

84. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad |x| < \dfrac{3}{2} \\ 2 & \text{si} \quad |x| = \dfrac{3}{2} \\ x^3 & \text{si} \quad |x| > \dfrac{3}{2}. \end{cases}$

85. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < -\dfrac{3}{2} \\ [\![x]\!] & \text{si} \quad x \in \left[-\dfrac{3}{2}, 1\right) \\ x & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

86. Graficar la función $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad |x| > 1 \\ \operatorname{sgn}(x) & \text{si} \quad |x| = 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < |x| < 1 \end{cases}$

87. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $x^2 \leq \sqrt{x}$.

88. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $|x| \leq 2$.

89. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $|x| \geq 2$.

90. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $|x| > \sqrt[3]{x}$.

91. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{x^2}$.

92. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x^2}$.

93. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $-2 \leq \dfrac{1}{x^2} < \sqrt{x}$.

94. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $\dfrac{1}{x} < \sqrt{x} \leq x$.

95. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $x^2 < \dfrac{1}{x} \leq \sqrt[3]{x}$.

96. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $\dfrac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x} \geq [\![x]\!]$.

97. Resolver graficamente la siguiente desigualdad $\dfrac{1}{x^2} > \sqrt[3]{x} > [\![x]\!]$.

Respuestas: Ejercicios

1.a. Si; 1.b. Si; 1.c. No; 1.d. Si; 1.e. No; 1.f. No; 2.a. No; 2.b. Si; 2.c. Si; 2.d. Si; 2.e. No; 2.f. No; 2.g. Si; 2.h. No; 2.i. Si; 2.j. Si; 2.k. No; 2.l. No; 3.a. -1; 3.b. π; 3.c. 1; 4.a. -2; 4.b. -2; 4.c. 0; 5.a. $\sqrt{2}$; 5.b. $2\sqrt{2}$; 5.c. $\frac{1}{\sqrt{4+h}+2}$; 6.a. h^2; 6.b. 9; 6.c. $2x+h$; 7.a. 1; 7.b. 2; 7.c. $\frac{1}{\sqrt[3]{(h-27)^2}-3\sqrt[3]{h-27}+9}$; 8.$a$. $(h+2)^3$; 8.b. $(x+h)^3$; 8.c. $3x^2+3xh+h^2$; 9.a. $\frac{1}{1-h}$; 9.b. $\frac{1}{x+h}$; 9.c. $-\frac{1}{a(a+h)}$; 10.a. $\frac{1}{(1-h)^2}$; 10.b. $\frac{1}{(x+h)^2}$; 10.c. $-\frac{2a+h}{a^2(a+h)^2}$; 11.a. $|h|$; 11.b. $|x+h|$; 11.c. $\frac{|1+2h|-1}{2h}$; 12.1. 1; 12.2. 3; 12.3. 0; 12.4. -1; 12.5. -3; 12.6. -1; 12.7. 0; 12.8. 0; 12.9. -4; 12.10. 1; 12.11. -2; 12.12. 1; 12.13. 0; 12.14. -2; 12.15. 1; 13.1. -1; 13.2. -1; 13.3. 0; 13.4. 1; 13.5. 1; 13.6. 1; 13.7. 1; 13.8. -1; 13.9. 1; 13.10. -1; 14.1. Eje x : No tiene. Eje y : $(0,k)$; 14.2. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.3. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.4. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.5. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.6. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.7. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.8. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 14.9. Eje x : No tiene. Eje y : No tiene; 14.10. Eje x : No tiene. Eje y : No tiene; 14.11. Eje x : $x \in [0,1)$. Eje y : $(0,0)$; 14.12. Eje x : $(0,0)$. Eje y : $(0,0)$; 15. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 16. $A(-1,-1)$, $B(0,0)$, $C(1,1)$; 17. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 18. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 19. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 20. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 21. $A(-1,-1)$, $B(0,0)$, $C(1,1)$; 22. $A(0,0)$, $B(1,1)$; 23. $A(-1,-1)$, $B(0,0)$, $C(1,1)$; 24. $A(-1,-1)$, $B(1,1)$; 25. $A(1,1)$; 44. Rgo $f : \{k\}$; 45.1. Rgo $f : \mathbb{R}$; 45.2. Rgo $f : [0,\infty)$; 45.3. Rgo $f : \mathbb{R}$; 45.4. Rgo $f : [0,\infty)$; 45.5. Rgo $f : [0,\infty)$; 45.6. Rgo $f : [0,\infty)$; 45.7. Rgo $f : \mathbb{R}$; 45.8. Rgo $f : \mathbb{R}$; 45.9. Rgo $f : \mathbb{R} - \{0\}$; 45.10. Rgo $f : \mathbb{R} - \{0\}$; 45.11. Rgo $f : \mathbb{Z}$; 45.12. Rgo $f : \{-1,0,1\}$; 46. Rgo $f : [-2,5]$; 47. Rgo $f : (1,3]$; 48. Rgo $f : \left(-\sqrt[3]{4}, 2\right)$; 49. Rgo $f : \{0,1\}$; 50. Rgo $f : \left[-2, -\frac{1}{3}\right]$; 51. Rgo $f : \left[\frac{1}{5}, \infty\right)$; 52. Rgo $f : \left[\frac{4}{49}, \infty\right)$; 55. $f(x) = k$ Par; 56.1. $f(x) = x$ Impar; 56.2. $f(x) = x^2$ Par; 56.3. $f(x) = x^3$ Impar; 56.4. $f(x) = x^4$ Par; 56.5. $f(x) = \sqrt{x}$ No tiene simétrica; 56.6. $f(x) = \sqrt[4]{x}$ No tiene simétrica; 56.7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Impar; 56.8. $f(x) = \sqrt[5]{x}$ Impar; 56.9. $f(x) = \frac{1}{x}$ Impar; 56.10. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ Par; 56.11. $f(x) = [\![x]\!]$ No tiene simétrica; 56.12. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ Par; 57. $f(x) = k$ No es inyectiva; 58.1. $f(x) = x$ Inyectiva; 58.2. $f(x) = x^2$ No es inyectiva; 58.3. $f(x) = x^3$ Inyectiva; 58.4. $f(x) = x^4$ No es inyectiva; 58.5. $f(x) = \sqrt{x}$ Inyectiva; 58.6. $f(x) = \sqrt[4]{x}$ Inyectiva; 58.7. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ Inyectiva; 58.8. $f(x) = \sqrt[5]{x}$ Inyectiva; 58.9. $f(x) = \frac{1}{x}$ Inyectiva; 58.10. $f(x) = \frac{1}{x^2}$ No es inyectiva; 58.11. $f(x) = [\![x]\!]$ No es inyectiva; 58.12. $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ No es inyectiva; 87. $[0,1]$; 88. $[-2,2]$; 89. $(-\infty,-2] \bigcup [2,\infty)$; 90. $(-\infty,0) \bigcup (1,\infty)$; 91. $(-\infty,0) \bigcup (0,1]$; 92. $(1,\infty)$; 93. $(1,\infty)$; 94. $(1,\infty)$; 95. No tiene solución; 96. $(-\infty,1) - \{0\}$; 97. $(-\infty,1) - \{-1,0\}$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.

3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Algebra de funciones.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.08

- Funciones. Álgebra de funciones. Composición de funciones.
- Dominio y rango de una función real a valor real.
- Función par, impar, creciente, decreciente, periódica, inyectiva.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 8.1 *: Sean las funciones* $f(x) = x$ *y* $g(x) = \sqrt{x}$. *Determinar*

1. $f + g$ 2. fg 3. $\dfrac{f}{g}$ 4. $\dfrac{g}{f}$

y sus dominios.

Solución : Tenemos que

$$\text{Dom } f : \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g : [0, \infty),$$

así,

1. Para $f + g$: Se tiene que
$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x + \sqrt{x},$$
es decir,
$$(f+g)(x) = x + \sqrt{x},$$
donde,
$$\text{Dom } (f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap [0, \infty) = [0, \infty).$$
Luego,
$$(f+g)(x) = x + \sqrt{x}, \qquad \text{Dom } (f+g) = [0, \infty).$$

2. Para fg : Se tiene que
$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = (x)\left(\sqrt{x}\right) = x\sqrt{x} = x^{3/2},$$
es decir,
$$(fg)(x) = x^{3/2},$$
donde,
$$\text{Dom } (fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap [0, \infty) = [0, \infty).$$
Luego,
$$(fg)(x) = x^{3/2}, \qquad \text{Dom } (fg) = [0, \infty).$$

3. Para $\dfrac{f}{g}$: Se tiene que
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} = x^{1-\frac{1}{2}} = x^{1/2} = \sqrt{x},$$
es decir,
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{x},$$

entonces,

$$\text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right)=\text{Dom }f\bigcap\text{Dom }g-\{x\in\text{Dom }g\ /\ g(x)=0\}$$

donde,

$$g(x)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad \sqrt{x}=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x=0,$$

así,

$$\text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right)=\text{Dom }f\bigcap\text{Dom }g-\{x\in\text{Dom }g\ /\ g(x)=0\}=\mathbb{R}\bigcap[0,\infty)-\{0\}=(0,\infty).$$

Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{x}, \qquad\qquad \text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right)=(0,\infty).$$

4. Para $\dfrac{g}{f}$: Se tiene que

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\sqrt{x}}{x}=x^{1/2-1}=x^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

es decir,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

entonces,

$$\text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right)=\text{Dom }g\bigcap\text{Dom }f-\{x\in\text{Dom }f\ /\ f(x)=0\}$$

donde,

$$f(x)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x=0,$$

así,

$$\text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right)=\text{Dom }g\bigcap\text{Dom }f-\{x\in\text{Dom }f\ /\ f(x)=0\}=[0,\infty)\bigcap\mathbb{R}-\{0\}=(0,\infty).$$

Luego,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad\qquad \text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right)=(0,\infty).$$

★

Ejemplo 8.2 *: Sean las funciones* $f(x)=x+2$ *y* $g(x)=x^2-4$. *Determinar*

1. $f+g$ 2. fg 3. $\dfrac{f}{g}$ 4. $\dfrac{g}{f}$

y sus dominios.

Solución : Tenemos que

$$\text{Dom }f:\mathbb{R} \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \text{Dom }g:\mathbb{R},$$

así,

1. Para $f+g$: Se tiene que

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x+2+x^2-4=x^2+x-2,$$

es decir,

$$(f+g)(x)=x^2+x-2,$$

donde,

$$\text{Dom }(f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(f+g)(x) = x^2 + x - 2, \qquad\qquad \text{Dom }(f+g) = \mathbb{R}.$$

2. Para fg : Se tiene que

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = (x+2)\left(x^2-4\right) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8,$$

es decir,

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8,$$

donde,

$$\text{Dom }(fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8, \qquad\qquad \text{Dom }(fg) = \mathbb{R}.$$

3. Para $\dfrac{f}{g}$: Se tiene que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Se cancela } x+2, \text{ siempre que } x+2\neq 0}}}{=} \frac{1}{x-2} \qquad \text{con} \quad \underbrace{x \neq -2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Condición } x+2\neq 0,}}},$$

es decir,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x-2},$$

entonces,

$$\text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$$

donde,

$$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm 2,$$

así,

$$\text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\} = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{\pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\}.$$

Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x-2}, \qquad\qquad \text{Dom }\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}.$$

4. Para $\dfrac{g}{f}$: Se tiene que

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+2} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Se cancela } x+2, \text{ siempre que } x+2\neq 0}}}{=} x-2 \qquad \text{con} \quad \underbrace{x \neq -2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Condición } x+2\neq 0,}}},$$

es decir,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x - 2,$$

entonces,

$$\text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right) = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } f - \{x \in \text{Dom } f \ / \ f(x) = 0\}$$

donde,

$$f(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -2,$$

así,

$$\text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right) = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } f - \{x \in \text{Dom } f \ / \ f(x) = 0\} = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{-2\} = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

Luego,

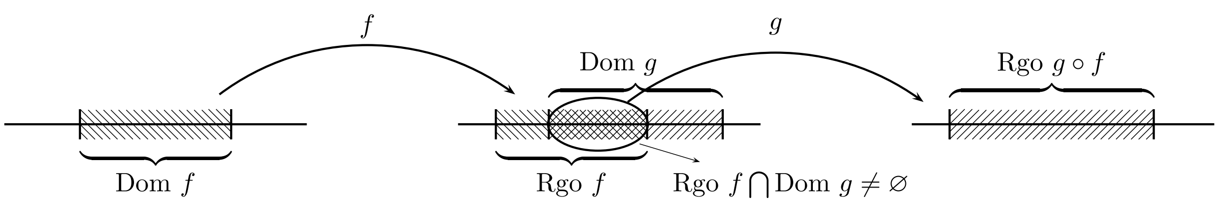
$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x - 2, \qquad\qquad \text{Dom }\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R} - \{-2\}.$$

★

Ejemplo 8.3 *: Determinar* $g \circ f$ *y* $f \circ g$ *si*

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad y \qquad\qquad g(x) = \sqrt{x}.$$

Solución : Es conocido que la composición $g \circ f$ es posible realizarla si y solo si $\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $g \circ f$

Buscamos el rango de f. Por el ejemplo 7.12, es conocido que, $\text{Rgo } f = [0, \infty)$.

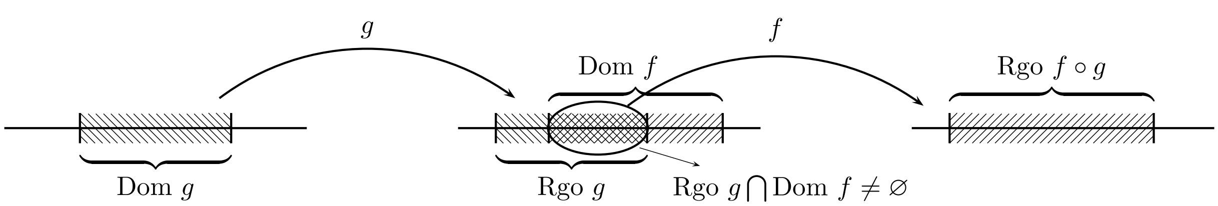
Como $\text{Dom } g = [0, \infty)$, entonces

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g = [0, \infty) \bigcap [0, \infty) = [0, \infty) \neq \varnothing,$$

por lo tanto, la composición se puede realizar, así,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{(x)^2} = |x|, \qquad \text{con} \quad x \in \text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

Es conocido que la composición $f \circ g$ es posible realizarla si y solo si $\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $f \circ g$

Buscamos el rango de g. Observemos que el dominio natural de la función $g(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$.

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra y, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $0 \leq x < \infty$ en una desigualdad que involucre a $y = \sqrt{x}$, para ello, aplicamos raíz cuadrada a la desigualdad $0 \leq x < \infty$, recordemos que la raíz cuadrada mantiene desigualdades, así,

$$0 \leq x < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{0} \leq \sqrt{x} < \sqrt{\infty} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \sqrt{x} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq g(x) < \infty,$$

por lo tanto, $\text{Rgo } g = [0, \infty)$.

Como $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, entonces

$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f = [0, \infty) \bigcap \mathbb{R} = [0, \infty) \neq \varnothing,$$

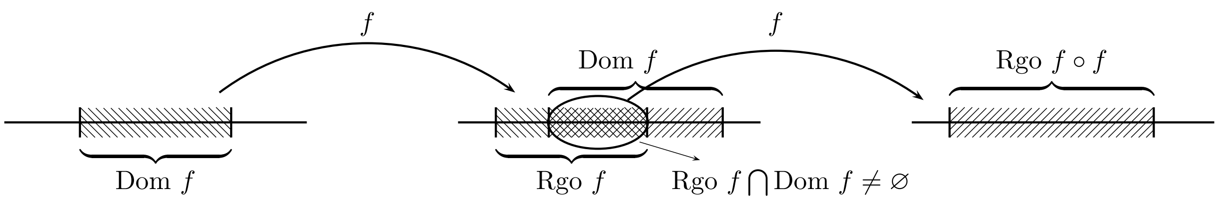
por lo tanto, la composición se puede realizar, así,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,$$

para todo $x \in \text{Dom } g = [0, \infty)$. ★

Ejemplo 8.4 *: Sean* $f(x) = \dfrac{1}{x}$. *Hallar* $f \circ f$, *si es posible, y su dominio.*

Solución : Es conocido que la composición $f \circ f$ es posible realizarla si y solo si $\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $f \circ f$

Buscamos el rango de f. Por el ejercicio 45 de la guía 7, es conocido que, $\text{Rgo } f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Como $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$, entonces

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\} \bigcap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\} \neq \varnothing,$$

por lo tanto, la composición se puede realizar, así,

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\dfrac{1}{x}} = x, \qquad \text{con} \quad x \in \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Es conocido que el dominio de una función compuesta $f \circ g$ viene dado por

$$x \in \text{Dom } (f \circ g) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \text{Dom } g \bigcap \{x \ / \ g(x) \in \text{Dom } f\},$$

así, el domino de $f \circ f$, viene dado por

$$x \in \text{Dom } (f \circ f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \text{Dom } f \bigcap \{x \ / \ f(x) \in \text{Dom } f\},$$

de aquí,

$$x \in \mathbb{R} - \{0\} \qquad \text{y} \qquad f(x) \in \mathbb{R} - \{0\},$$

es decir,

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty) \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{x} \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty),$$

donde

$$\frac{1}{x} \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty) \iff \frac{1}{x} < 0 \quad \text{o} \quad \frac{1}{x} > 0 \iff x < 0 \quad \text{o} \quad x > 0$$

$$\iff x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty) \iff x \in \mathbb{R} - \{0\},$$

entonces

$$x \in \text{Dom } (f \circ f) \iff x \in \mathbb{R} - \{0\} \bigcap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

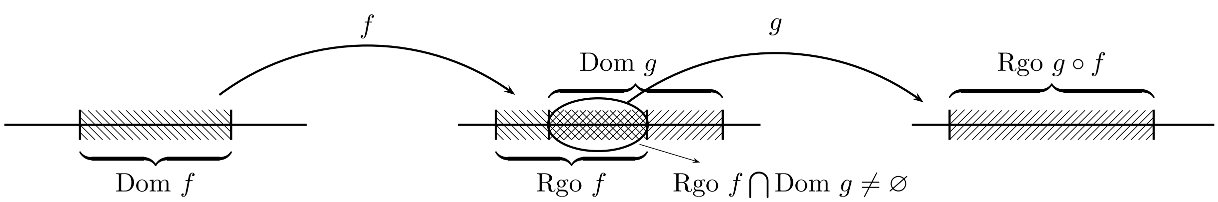
Luego,

$$(f \circ f)(x) = x, \qquad \text{con} \quad x \in \text{Dom } (f \circ f) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

★

Ejemplo 8.5 *: Sean* $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ *y* $g(x) = \sqrt[4]{x}$*. Hallar* $g \circ f$*, si es posible, y su dominio.*

Solución : Es conocido que la composición $g \circ f$ es posible realizarla si y solo si Rgo $f \bigcap$ Dom $g \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $g \circ f$

Buscamos el rango de f. Observemos que el dominio natural de la función $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, es decir,

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty) \implies x < 0 \quad \text{o} \quad x > 0.$$

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra y, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar las desigualdades $x < 0$ y $x > 0$, en desigualdades que involucren a $y = -\dfrac{1}{x^2}$, para ello, elevamos al cuadrado a las desigualdades $x < 0$ y $x > 0$, (recordemos que la elevación al cuadrado mantiene desigualdades si los términos son positivos y la cambia si los términos son negativos) aplicamos el inverso multiplicativo y por último, multiplicamos por -1, lo cual también cambia la desigualdad, por ser un número negativo, así,

- Para $x < 0$: Se tiene

$$x < 0 \iff x^2 > 0 \iff \frac{1}{x^2} > 0 \iff -\frac{1}{x^2} < 0 \iff f(x) < 0,$$

por lo tanto, Rgo $f = (-\infty, 0)$, para $x < 0$.

- Para $x > 0$: Se tiene

$$x > 0 \iff x^2 > 0 \iff \frac{1}{x^2} > 0 \iff -\frac{1}{x^2} < 0 \iff f(x) < 0.$$

por lo tanto, Rgo $f = (-\infty, 0)$, para $x > 0$.

Luego,

$$\text{Rgo } f = (-\infty, 0) \bigcup (-\infty, 0) = (-\infty, 0).$$

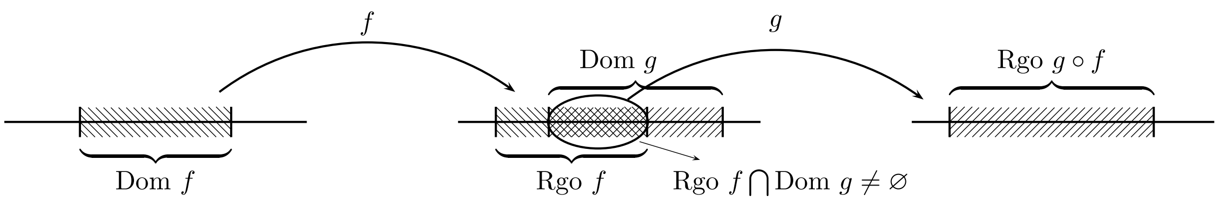
Como $\text{Dom } g = [0, \infty)$, entonces

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g = (-\infty, 0) \bigcap [0, \infty) = \varnothing,$$

por lo tanto, la composición **NO** se puede realizar. ★

Ejemplo 8.6 *: Sean* $f(x) = \sqrt{x}$ *y* $g(x) = x^2 - 6x + 9$. *Hallar* $g \circ f$, *si es posible, y su dominio.*

Solución : Es conocido que la composición $g \circ f$ es posible realizarla si y solo si $\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $g \circ f$

Buscamos el rango de f. Observemos que el dominio natural de la función $f(x) = \sqrt{x}$ es $[0, \infty)$.

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra y, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $0 \leq x < \infty$ en una desigualdad que involucre a $y = \sqrt{x}$, para ello, aplicamos raíz cuadrada a la desigualdad $0 \leq x < \infty$, recordemos que la raíz cuadrada mantiene desigualdades, así,

$$0 \leq x < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sqrt{0} \leq \sqrt{x} < \sqrt{\infty} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq \sqrt{x} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq f(x) < \infty,$$

por lo tanto, $\text{Rgo } f = [0, \infty)$.

Como $\text{Dom } g = \mathbb{R}$, entonces

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g = [0, \infty) \bigcap \mathbb{R} = [0, \infty) \neq \varnothing,$$

por lo tanto, la composición se puede realizar, así,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 6\left(\sqrt{x}\right) + 9 = x - 6\sqrt{x} + 9,$$

para todo $x \in \text{Dom } f = [0, \infty)$.

Es conocido que el dominio de una función compuesta $g \circ f$ viene dado por

$$x \in \text{Dom } (g \circ f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \text{Dom } f \bigcap \{x \ / \ f(x) \in \text{Dom } g\},$$

así, el domino de $g \circ f$, viene dado por

$$x \in \text{Dom } (g \circ f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \text{Dom } f \bigcap \{x \ / \ f(x) \in \text{Dom } g\},$$

de aquí,

$$x \in [0, \infty) \qquad \text{y} \qquad f(x) \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$x \in [0, \infty) \qquad \text{y} \qquad \sqrt{x} \in (-\infty, \infty),$$

donde
$$\sqrt{x} \in (-\infty, \infty) \qquad \Longleftrightarrow \qquad -\infty < \sqrt{x} < \infty,$$
pero, la expresión $\sqrt{(\cdot)}$ siempre es mayor o igual a cero, así,
$$-\infty < \sqrt{x} < \infty \qquad \text{nos queda} \qquad 0 \leq \sqrt{x} < \infty,$$
elevamos al cuadrado, es conocido que la aplicación "elevar al cuadrado" no cambia la desigualdad si los términos involucrados en la misma son positivos, por lo tanto
$$0 \leq \sqrt{x} < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad (0)^2 \leq \left(\sqrt{x}\right)^2 < (\infty)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \leq x < \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad 0 \in [0, \infty),$$
entonces
$$x \in \text{Dom } (g \circ f) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in [0, \infty) \bigcap [0, \infty) = [0, \infty).$$

Luego,
$$(g \circ f)(x) = x - 6\sqrt{x} + 9, \qquad \text{con} \quad x \in \text{Dom } (g \circ f) = [0, \infty).$$

★

Ejemplo 8.7 *: Sean las funciones*
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} \qquad \text{y} \qquad g(x) = x - 3.$$
Determinar las funciones $f + g$, fg, *y* $\dfrac{f}{g}$ *y sus dominios.*

Solución : Observemos que
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \sqrt{(x-3)^2} = |x - 3|,$$
y por definición de valor absoluto
$$f(x) = |x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si} \quad x - 3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x - 3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) & \text{si} \quad x < 3. \end{cases}$$

Los dominios naturales de las funciones f y g son
$$\text{Dom } f : \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g : \mathbb{R},$$
así,

- Para $f + g$: Se tiene que
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) = |x-3| + x - 3 = \begin{cases} x - 3 + x - 3 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3) + x - 3 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}, \end{aligned}$$
es decir,
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases},$$
donde,
$$\text{Dom } (f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$
Luego,
$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}, \qquad \text{Dom } (f+g) = \mathbb{R}.$$

- Para fg : Se tiene que

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = |x-3|\,(x-3) = \begin{cases} (x-3)(x-3) & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)(x-3) & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases},$$

es decir,

$$(fg)(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases},$$

donde,

$$\text{Dom } (fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(fg)(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)^2 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}, \qquad \text{Dom } (fg) = \mathbb{R}.$$

- Para $\dfrac{f}{g}$: Se tiene que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{|x-3|}{x-3} = \begin{cases} \dfrac{x-3}{x-3} & \text{si} \quad x \geq 3, \quad \text{con} \quad x-3 \neq 0 \\ -\dfrac{x-3}{x-3} & \text{si} \quad x < 3, \end{cases}$$

de aquí,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \overbrace{\dfrac{x-3}{x-3}}^{\boxed{\substack{\text{Se cancela } x-3, \\ \text{siempre que } x-3 \neq 0}}} & \text{si} \quad x > 3, \quad \text{con} \quad x-3 \neq 0 \\ -\dfrac{x-3}{x-3} & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \overbrace{x > 3}^{\boxed{\text{Condición } x-3 \neq 0,}} \\ -1 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases},$$

es decir,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ -1 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases},$$

entonces,

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$$

donde,

$$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3,$$

así,

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\} = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{3\} = \mathbb{R} - \{3\}.$$

Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ -1 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}, \qquad \text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{3\}.$$

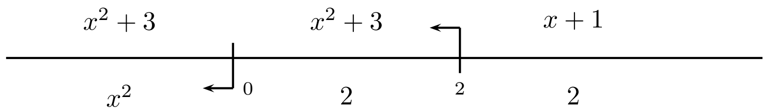
★

Ejemplo 8.8 *: Sean las funciones*

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & si \quad x \leq 2 \\ x+1 & si \quad x > 2 \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 0 \\ 2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Determinar las funciones $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ *y* $\dfrac{g}{f}$ *y sus dominios.*

Solución : Tenemos que



Los dominios naturales de las funciones f y g son

$$\text{Dom } f : \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g : \mathbb{R},$$

así,

- Para $f+g$: Se tiene que

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \begin{cases} x^2+3+x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+3+2 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x-1+2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases},$$

es decir,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases},$$

donde,

$$\text{Dom } (f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x^2+3 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ x+1 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}, \qquad \text{Dom } (f+g) = \mathbb{R}.$$

- Para fg : Se tiene que

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x) = \begin{cases} \left(x^2+3\right)\left(x^2\right) & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \left(x^2+3\right)(2) & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ (x-1)(2) & \text{si} \quad x < 2 \end{cases} = \begin{cases} x^4+3x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x^2+6 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases},$$

es decir,

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^4+3x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x^2+6 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases},$$

donde,

$$\text{Dom } (fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(fg)(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x^2 + 6 & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ 2x - 2 & \text{si} \quad x < 2 \end{cases}, \qquad \text{Dom } (fg) = \mathbb{R}.$$

- Para $\dfrac{f}{g}$: Se tiene que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2} & \text{si} \quad x \leq 0, \quad \text{con } x \neq 0 \\ \dfrac{x^2+3}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2} & \text{si} \quad \overbrace{x < 0}^{\boxed{\text{Condición } x \neq 0,}} \\ \dfrac{x^2+3}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

entonces,

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\}$$

donde,

$$g(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0,$$

así,

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\} = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R} - \{0\}.$$

Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3}{x^2} & \text{si} \quad x < 0 \\ \dfrac{x^2+3}{2} & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{x-1}{2} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}, \qquad \text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{0\}.$$

- Para $\dfrac{g}{f}$: Se tiene que

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+3} & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \dfrac{2}{x^2+3} & \text{si} \quad 0 < x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x > 2 \end{cases},$$

entonces,

$$\text{Dom } \left(\frac{g}{f}\right) = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } f - \{x \in \text{Dom } f \ / \ f(x) = 0\}$$

donde,

$$f(x)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2+3=0 & \text{si} \quad x\leq 2 \\ x-1=0 & \text{si} \quad x>2 \end{cases},$$

Para $x^2+3=0$ si $x\geq 2$. Aplicando la resolvente para $a=1$, $b=0$ y $c=3$ se tiene

$$x=\frac{-(0)\pm\sqrt{(0)^2-4(1)(3)}}{2(1)}=\frac{\pm\sqrt{-12}}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

por lo tanto, $x^2+3=0$ no tiene solución en los números reales, es decir, nunca será iguala cero.

Para $x-1=0$ si $x>2$. Tenemos que $x=1$, pero $x=1$ no pertenece al intervalo $(2,\infty)$, así, $x-1=0$ no tiene solución para $x>2$.

Por lo tanto,

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right)=\text{Dom } g\bigcap \text{Dom } f-\{x\in \text{Dom } f \ / \ f(x)=0\}=\mathbb{R}\bigcap\mathbb{R}-\varnothing=\mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right)=\mathbb{R}.$$

Luego,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+3} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \dfrac{2}{x^2+3} & \text{si} \quad 0<x\leq 2 \\ \dfrac{2}{x-1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}, \qquad \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right)=\mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 8.9 : *Para las funciones* $f(x)=\sqrt{x^2-2x-3}$ *y* $g(x)=8-x^3$. *Determinar:*

a. $f+g$; ***b.*** fg; ***c.*** f/g; ***d.*** g/f; ***e.*** *Dominio natural de cada una.*

Solución : En primer lugar, buscamos el dominio de las funciones f y g.

- Dominio de f : La función f tiene sentido si

$$x^2-2x-3\geq 0.$$

Resolvemos la desigualdad, para ello factorizamos el polinomio de segundo grado usando la resolvente con $a=1$, $b=-2$ y $c=-3$, de aquí,

$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2(1)}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{2+4}{2}=\dfrac{6}{2}=3 \\ \dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$

por lo tanto, la factorización del polinomio es

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$$

y la desigualdad

$$x^2-2x-3\geq 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad (x-3)(x+1)\geq 0.$$

Buscamos la raíces de los factores

$$(x+1)(x-3)=0 \qquad \Longrightarrow \qquad x=-1 \quad \text{y} \quad x=3$$

Estudiamos el signo de los factores

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,\infty)$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto, la solución de la desigualdad es

$$x \in (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f : (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty).$$

- Dominio de g : La función g tiene sentido para todo número real, es decir,

$$\text{Dom } g : \mathbb{R}$$

Los dominios naturales de las funciones f y g son

$$\text{Dom } f : (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty) \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g : \mathbb{R},$$

así,

a. Para la suma $f+g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x^2-2x-3} + 8 - x^3$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } (f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \left\{ (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty) \right\} \bigcap \mathbb{R} = (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty).$$

Luego,

$$(f+g)(x) = \sqrt{x^2-2x-3} + 8 - x^3, \qquad \text{Dom } (f+g) = (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty).$$

b. Para el producto fg :

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = \left(8 - x^3\right) \sqrt{x^2-2x-3}$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } (fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \left\{ (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty) \right\} \bigcap \mathbb{R} = (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty).$$

Luego,

$$(fg)(x) = \left(8 - x^3\right) \sqrt{x^2-2x-3}, \qquad \text{Dom } (fg) = (-\infty,-1] \bigcup [3,\infty).$$

c. Para el cociente $\dfrac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{8-x^3}$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\},$$

donde,

$$g(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 8 - x^3 = 0.$$

Buscamos la raíces del polinomio de tercer grado, aplicando el método de Ruffini

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 0 & 0 & 8 \\ 2 & & -2 & -4 & -8 \\ \hline & -1 & -2 & -4 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \ \checkmark$$

de aquí, los valores -1, -2 y -4, corresponden a los coeficientes de un polinomio de segundo grado dado por $p(x) = -x^2 - 2x - 4$, para obtener las raíces de este polinomio aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = -2$ y $c = -4$,

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(-4)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 16}}{-2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{-2} \longleftarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Raíz cuadrada de un} \\ \text{número negativo.} \\ \text{Número complejo.}\end{array}}$$

por lo que, el polinomio $p(x) = -x^2 - 2x - 4$, es irreducible, no tiene raíces reales, con lo que concluimos que la única solución de $8 - x^3 = 0$, es $x = 2$, es decir,

$$8 - x^3 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = 2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \left\{ (-\infty, -1] \bigcup [3, \infty) \right\} \bigcap \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, -1] \bigcup [3, \infty).$$

Luego,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}{8 - x^3}, \qquad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = (-\infty, -1] \bigcup [3, \infty).$$

d. Para el cociente $\dfrac{g}{f}$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{8 - x^3}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \text{Dom}\, f \bigcap \text{Dom}\, g - \{x \in \text{Dom}\, f \ / \ f(x) = 0\},$$

donde,

$$f(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2 - 2x - 3} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 2x - 3 = 0,$$

para obtener las raíces de este polinomio usamos la resolvente

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2(1)} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ \dfrac{2-4}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \end{cases}$$

por lo tanto,

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = -1 \quad \text{y} \quad x = 3,$$

así,

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \left\{ (-\infty, -1] \bigcup [3, \infty) \right\} \bigcap \mathbb{R} - \{-1, 3\} = (-\infty, -1) \bigcup (3, \infty).$$

Luego,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{8 - x^3}{\sqrt{x^2 - 2x - 3}}, \qquad \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = (-\infty, -1) \bigcup (3, \infty).$$

★

Ejemplo 8.10 *: Para las funciones* $f(x) = x^2 - 2x$ *y* $g(x) = 16 - x^4$. *Determinar:*

a. $f+g$; ***b.*** fg; ***c.*** f/g; ***d.*** g/f; ***e.*** *Dominio natural de cada una.*

Solución : En primer lugar, buscamos el dominio de las funciones f y g.

• Para f : La función f tiene sentido para todo número real, es decir,

$$\text{Dom } f : \mathbb{R}$$

• Para g : La función g tiene sentido para todo número real, es decir,

$$\text{Dom } g : \mathbb{R}$$

Tenemos

a. Para la suma $f+g$:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 - 2x + 16 - x^4$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } (f+g) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Luego,

$$(f+g)(x) = x^2 - 2x + 16 - x^4, \qquad \text{Dom } (f+g) = \mathbb{R}.$$

b. Para el producto fg :

$$(fg)(x) = f(x)\, g(x) = \left(x^2 - 2x\right)\left(16 - x^4\right) = 16x^2 - x^6 - 32x + 2x^5$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } (fg) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} = \mathbb{R}$$

Luego,

$$(fg)(x) = 16x^2 - x^6 - 32x + 2x^5, \qquad \text{Dom } (fg) = \mathbb{R}.$$

c. Para el cociente $\dfrac{f}{g}$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2 - 2x}{16 - x^4}$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom } \left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \left\{x \in \text{Dom } g \ / \ g(x) = 0\right\},$$

donde,

$$g(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad 16 - x^4 = 0.$$

Buscamos la raíces del polinomio de cuarto grado, para ello usamos la factorización por productos notables

$$16 - x^4 = \overbrace{(4)^2 - \left(x^2\right)^2}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Suma por su diferencia con}\\ a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\ a=4 \quad \text{y} \quad b=x^2\end{array}}} = \left(4 - x^2\right)\left(4 + x^2\right) = \overbrace{\left((2)^2 - (x)^2\right)}^{\boxed{\begin{array}{c}\text{Suma por su diferencia con}\\ a^2-b^2=(a-b)(a+b)\\ a=2 \quad \text{y} \quad b=x\end{array}}}\left(4 + x^2\right) = (2 - x)(2 + x)\left(4 + x^2\right),$$

para obtener las raíces del polinomio de segundo grado dado por $p(x) = x^2 + 4$, aplicamos la resolvente con $a = 1$, $b = 0$ y $c = 4$

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(4)}}{2(-1)} = \frac{\pm\sqrt{-12}}{-2} \longleftarrow$$

Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.

por lo que, el polinomio $p(x) = x^2 + 4$, es irreducible, no tiene raíces reales, entonces, la factorización del polinomio de cuarto grado es

$$16 - x^4 = (2 - x)(2 + x)\left(4 + x^2\right),$$

así,

$$16 - x^4 = 0 \qquad \text{es equivalente a} \qquad (2 - x)(2 + x)\left(4 + x^2\right) = 0,$$

de aquí,

$$(2 - x)(2 + x)\left(4 + x^2\right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2 - x = 0 & \Longrightarrow \quad x = 2 \\ 2 + x = 0 & \Longrightarrow \quad x = -2 \\ 4 + x^2 & \leftarrow \quad \text{Irreducible,} \end{cases}$$

con lo que,

$$16 - x^4 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = \pm 2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{\pm 2\} = \mathbb{R} - \{\pm 2\},$$

observemos que

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x}{16 - x^4} = \frac{x(x-2)}{(2-x)(2+x)(4+x^2)} = \frac{-x(2-x)}{(2-x)(2+x)(4+x^2)} = \frac{-x}{(2+x)(4+x^2)}$$

es decir,

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{-x}{(2+x)(4+x^2)}, \qquad \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}.$$

d. Para el cociente $\dfrac{g}{f}$.

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{16 - x^4}{x^2 - 2x}$$

y su dominio viene dado por

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \text{Dom } f \bigcap \text{Dom } g - \{x \in \text{Dom } f \ / \ f(x) = 0\},$$

donde,

$$f(x) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 - 2x = 0,$$

para obtener las raíces de este polinomio factorizamos sacando factor común x.

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x-2) = 0,$$

de aquí,

$$x(x-2) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ x - 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2, \end{cases}$$

con lo que,

$$x^2 - 2x = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = 0 \quad \text{y} \quad x = 2.$$

Por lo tanto,

$$\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R} \bigcap \mathbb{R} - \{0,2\} = \mathbb{R} - \{0,2\}.$$

Observemos que

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{16-x^4}{x^2-2x} = \frac{(2-x)(2+x)\left(4+x^2\right)}{x(x-2)} = \frac{-(x-2)(2+x)\left(4+x^2\right)}{x(x-2)} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Se cancela } x-2, \\ \text{ya que } x=2 \in \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right)}}}}{=} -\frac{(2+x)\left(4+x^2\right)}{x},$$

es decir,

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = -\frac{(2+x)\left(4+x^2\right)}{x}, \qquad\qquad \text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) = \mathbb{R} - \{0,2\}.$$

★

Ejemplo 8.11 *: Sea* $f(x) = x - x^2$. *Calcular*

a) $f(h-1)$ ***b)*** $f(x+h)$ ***c)*** $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, *con* $h \neq 0$.

Solución : a) Tenemos que

$$f(\cdot) = (\cdot) - (\cdot)^2,$$

así,

$$f(h-1) = \underbrace{(h-1)-(h-1)^2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } h-1}}} = (h-1)(1-(h-1)) = (h-1)(1-h+1) = (h-1)(2-h),$$

es decir,

$$f(h-1) = (h-1)(2-h).$$

b) Tenemos que

$$f(x+h) = \underbrace{(x+h)-(x+h)^2}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } x+h}}} = (x+h)(1-(x+h)) = (x+h)(1-x-h),$$

es decir,

$$f(x+h) = (x+h)(1-x-h)$$

c) Tenemos que

$$f(x+h) = (x+h)(1-x-h) \qquad \text{y} \qquad f(x) = x - x^2,$$

entonces

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)\overbrace{(1-x-h)}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Ley distributiva con} \\ \text{el término } x+h}} \\ \downarrow}} - \underbrace{\left(x-x^2\right)}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Factor común } x}}} = \underline{x(1-x-h)} + h(1-x-h) - \underline{x(1-x)}$$

$$\boxed{\text{Factor común } x}$$

$$= x\left(1 - x - h - (1 - x)\right) + h\left(1 - x - h\right) = x\left(1 - x - h - 1 + x\right) + h\left(1 - x - h\right)$$

$$= \underbrace{x\left(-h\right) + h\left(1 - x - h\right)}_{\boxed{\text{Factor común } h}} = h\left(-x + 1 - x - h\right) = h\left(1 - 2x - h\right),$$

es decir,

$$f\left(x + h\right) - f\left(x\right) = h\left(1 - 2x - h\right),$$

luego,

$$\frac{f\left(x + h\right) - f\left(x\right)}{h} = \frac{h\left(1 - 2x - h\right)}{h} = 1 - 2x - h.$$

★

Ejemplo 8.12 *: Sea* $f\left(x\right) = \dfrac{2 - x}{x^2 + 3x - 1}$. *Calcular*

a) $f\left(3 - z\right)$ ***b)*** $f\left(x + h\right)$ ***c)*** $\dfrac{f\left(x + h\right) - f\left(x\right)}{h}$, *con* $h \neq 0$.

Solución : **a)** Tenemos que

$$f\left(\cdot\right) = \frac{2 - \left(\cdot\right)}{\left(\cdot\right)^2 + 3\left(\cdot\right) - 1},$$

así,

$$f\left(3 - z\right) = \frac{2 - \left(3 - z\right)}{\left(3 - z\right)^2 + 3\left(3 - z\right) - 1} = \frac{2 - 3 + z}{9 - 6z + z^2 + 9 - 3z - 1} = \frac{z - 1}{z^2 - 9z + 17},$$

es decir,

$$f\left(3 - z\right) = \frac{z - 1}{z^2 - 9z + 17}.$$

b) Tenemos que

$$f\left(x + h\right) = \frac{2 - \left(x + h\right)}{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1} = \frac{2 - x - h}{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1},$$

es decir,

$$f\left(x + h\right) = \frac{2 - x - h}{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1}.$$

c) Tenemos que

$$f\left(x + h\right) = \frac{2 - x - h}{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1} \qquad \text{y} \qquad f\left(x\right) = \frac{2 - x}{x^2 + 3x - 1},$$

entonces,

$$f\left(x + h\right) - f\left(x\right) = \frac{2 - x - h}{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1} - \frac{2 - x}{x^2 + 3x - 1}$$

$$= \frac{\left(2 - x - h\right)\left(x^2 + 3x - 1\right) - \left(2 - x\right)\left(\overbrace{\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1}^{\boxed{\text{Desarrollando y agrupando}}}\right)}{\left(\left(x + h\right)^2 + 3\left(x + h\right) - 1\right)\left(x^2 + 3x - 1\right)}$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{(2-x-h)\left(x^2+3x-1\right)-(2-x)\left(x^2+2xh+h^2+3x+3h-1\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{(2-x-h)\left(x^2+3x-1\right)-(2-x)\left(\left(x^2+3x-1\right)+\left(3h+2hx+h^2\right)\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

Ley distributiva con el término $\left(3h+2hx+h^2\right)+\left(x^2+3x-1\right)$

$$=\frac{(2-x-h)\left(x^2+3x-1\right)-\left(\overline{2-x}\right)\left(\left(x^2+3x-1\right)+\left(3h+2hx+h^2\right)\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{(2-x-h)\left(x^2+3x-1\right)-(2-x)\left(x^2+3x-1\right)-(2-x)\left(3h+2hx+h^2\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{\overbrace{(2-x-h)\left(x^2+3x-1\right)-(2-x)\left(x^2+3x-1\right)}^{\text{Factor común } x^2+3x-1}-(2-x)\overbrace{\left(3h+2hx+h^2\right)}^{\text{Factor común } h}}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{(2-x-h-(2-x))\left(x^2+3x-1\right)-h(2-x)(3+2x+h)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{(2-x-h-2+x)\left(x^2+3x-1\right)-h(2-x)(3+2x+h)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{(-h)\left(x^2+3x-1\right)-h(2-x)(3+2x+h)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{\overbrace{(-h)\left(x^2+3x-1\right)+(-h)(2-x)(3+2x+h)}^{\text{Factor común } -h}}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{-h\left(x^2+3x-1+(2-x)(3+2x+h)\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

Ley distributiva

$$=\frac{-h\left(x^2+3x-1+\overline{(2-x)(3+2x+h)}\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$=\frac{-h\left(x^2+3x-1+\left(6+4x+2h-3x-2x^2-hx\right)\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$$

$$f(x+h)-f(x)=\frac{-h\left(x^2+3x-1+\left(2h+x-hx-2x^2+6\right)\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)}$$

$$=\frac{-h\left(-x^2-hx+4x+5+2h\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)}=\frac{h\left(x^2+hx-4x-5-2h\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)},$$

es decir,

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h\left(x^2+hx-4x-5-2h\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)},$$

por lo tanto,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\dfrac{h\left(x^2+hx-4x-5-2h\right)}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)}}{h}$$

$$=\frac{h\left(x^2+hx-4x-5-2h\right)}{h\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)}=\frac{x^2+hx-4x-5-2h}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)},$$

luego,

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{x^2+hx-4x-5-2h}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)(x^2+3x-1)}$$

★

Ejemplo 8.13 *: Determinar el dominio de la función* $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+4.$

Solución : Observemos que f es la suma de las funciones $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$ y $f_3(x)=4$, así,

$$\text{Dom } f=\text{Dom } f_1\bigcap\text{Dom } f_2\bigcap\text{Dom } f_3$$

Función f_1 **:** Con respecto a la función f_1, tenemos que,

$$\sqrt{(\cdot)}\qquad\text{tiene sentido si y solo si}\qquad(\cdot)\geq 0,$$

así, la función

$$f_1(x)=\sqrt{x}\quad\text{tiene sentido si y solo si}\quad x\geq 0\quad\Longrightarrow\quad x\in[0,\infty)\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\text{Dom } f_1=[0,\infty)}$$

Función f_2 **:** Con respecto a la función f_2, tenemos que,

$$\frac{1}{(\cdot)}\qquad\text{tiene sentido si y solo si}\qquad(\cdot)\neq 0,$$

así, la función

$$f_2(x)=\frac{1}{x}\quad\text{tiene sentido si y solo si}\quad x\neq 0\quad\Longrightarrow\quad x\in\mathbb{R}-\{0\}\quad\Longrightarrow\quad\boxed{\text{Dom } f_2=\mathbb{R}-\{0\}}$$

Función f_3 **:** Con respecto a la función f_3, puesto que es una función constante, entonces está definida para todo valor real x, así, $\boxed{\text{Dom } f_3=\mathbb{R}.}$

Por lo tanto,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 \bigcap \text{Dom } f_3 = [0, \infty) \bigcap \mathbb{R} - \{0\} \bigcap \mathbb{R} = (0, \infty),$$

es decir,

$$\boxed{\text{Dom } f = (0, \infty).}$$

★

Ejemplo 8.14 *: Determinar el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{x^3 \sqrt{2-x}}{2x^2 - 9x + 4}$.

Solución : Observemos que f es el cociente de las funciones $f_1(x) = x^3 \sqrt{2-x}$ y $f_2(x) = 2x^2 - 9x + 4$, así,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 - \{x \in \text{Dom } f_2 \ / \ f_2(x) = 0\}$$

Función f_1 **:** La función f_1 es el producto de las funciones

$$g(x) = x^3 \qquad \text{y} \qquad h(x) = \sqrt{2-x},$$

es decir,

$$f_1(x) = x^3 \sqrt{2-x} = g(x)\, h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h,$$

así, f_1 involucra dos funciones a saber

$$(\cdot)^3 \quad \text{tiene sentido si y solo si} \quad (\cdot) \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{(\cdot)} \quad \text{tiene sentido si y solo si} \quad (\cdot) \geq 0,$$

de aquí,

- La función $g(x) = x^3$ tiene sentido si y solo si $x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Dom } g = \mathbb{R}.}$
- La función $h(x) = \sqrt{2-x}$ tiene sentido si y solo si

$$2 - x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 2 \geq x \quad \Longrightarrow \quad x \in (-\infty, 2] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Dom } h = (-\infty, 2].}$$

Por lo que,

$$\text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h = \mathbb{R} \bigcap (-\infty, 2] = (-\infty, 2],$$

entonces,

$$\boxed{\boxed{\text{Dom } f_1 = (-\infty, 2].}}$$

Función f_2 **:** Tenemos que la función f_2, tiene sentido para todo número real, así, $\boxed{\boxed{\text{Dom } f_2 = \mathbb{R}}}$

Por otra parte,

$$f_2(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x^2 - 9x + 4 = 0,$$

aplicando la resolvente con $a = 2$, $b = -9$ y $c = 4$, se tiene

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(4)}}{2(2)} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 32}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{49}}{4} = \begin{cases} \dfrac{9+7}{4} = \dfrac{16}{4} = 4 \\[2mm] \dfrac{9-7}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

así, $f_2(x) = 0$ cuando $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = 4$, luego

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 - \{x \in \text{Dom } f_2 \ / \ f_2(x) = 0\} = (-\infty, 2] \bigcap \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 4\right\} = (-\infty, 2] - \{4\},$$

es decir,

$$\boxed{\text{Dom } f = (-\infty, 2] - \left\{\frac{1}{2}\right\}.}$$

★

Ejemplo 8.15 *: Determinar el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{-x}}{1 - \sqrt{x}}$.

Solución : Observemos que f es el cociente de las funciones $f_1(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{-x}$ y $f_2(x) = 1 - \sqrt{x}$, así,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 - \{x \in \text{Dom } f_2 \ / \ f_2(x) = 0\},$$

pero, también podemos pensar la función f como el producto de dos funciones $f_1(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{-x}$ y $f_2(x) = \dfrac{1}{1 - \sqrt{x}}$, así,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2,$$

de cualquiera de la dos formas se obtiene el dominio.

Para obtener el dominio de la función f usamos la primera forma de f, la vemos como un cociente.

Función f_1 **:** Con respecto a la función f_1, tenemos que, es consecuencia de la diferencia de las funciones

$$g(x) = \sqrt[4]{x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \sqrt[3]{-x},$$

es decir,

$$f_1(x) = \sqrt[4]{x} - \sqrt[3]{-x} = g(x) - h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h,$$

así, f_1 involucra dos funciones a saber

$$\begin{array}{lll} \sqrt[4]{(\cdot)} & \text{tiene sentido si y solo si} & (\cdot) \geq 0 \\ \sqrt[3]{-(\cdot)} & \text{tiene sentido si y solo si} & (\cdot) \in \mathbb{R} \end{array}$$

de aquí,

- La función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene sentido si y solo si $x \geq 0 \Longrightarrow x \in [0, \infty) \Longrightarrow \boxed{\text{Dom } g = [0, \infty).}$
- La función $h(x) = \sqrt[3]{-x}$ tiene sentido si y solo si $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \boxed{\text{Dom } h = \mathbb{R}.}$

Por lo que,

$$\text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h = [0, \infty) \bigcap \mathbb{R} = [0, \infty),$$

entonces,

$$\boxed{\boxed{\text{Dom } f_1 = [0, \infty)}}$$

Función f_2 **:** Tenemos que, la función f_2 es consecuencia de la diferencia de las funciones

$$p(x) = 1 \qquad \text{y} \qquad w(x) = \sqrt{x},$$

es decir,

$$f_2(x) = 1 - \sqrt{x} = p(x) - w(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f_2 = \text{Dom } p \bigcap \text{Dom } w,$$

así, f_2 involucra dos funciones a saber

$$1 \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \in \mathbb{R}$$

$$\sqrt{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \geq 0$$

de aquí,

- La función $p(x) = 1$ tiene sentido si y solo si $x \in \mathbb{R} \Longrightarrow \boxed{\text{Dom } p = \mathbb{R}.}$

- La función $w(x) = \sqrt{x}$ tiene sentido si y solo si $x \geq 0 \Longrightarrow \boxed{\text{Dom } w = [0, \infty).}$

Por lo que,

$$\text{Dom } f_2 = \text{Dom } p \bigcap \text{Dom } w = \mathbb{R} \bigcap [0, \infty) = [0, \infty),$$

entonces,

$$\boxed{\boxed{\text{Dom } f_2 = [0, \infty)}}$$

Por otra parte,

$$f_2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \sqrt{x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 = \sqrt{x} \quad \Longleftrightarrow \quad (1)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{x = 1}_{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Puesto que, } x \geq 0, \; x \in \text{Dom } f_2 = [0, \infty)}}}$$

así, $f_2(x) = 0$ cuando $x = 1$.

Luego,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 - \{x \in \text{Dom } f_2 \ / \ f_2(x) = 0\} = \mathbb{R} \bigcap [0, \infty) - \{1\} = [0, \infty) - \{1\},$$

es decir,

$$\boxed{\text{Dom } f = [0, \infty) - \{1\}.}$$

★

Ejemplo 8.16 *: Determinar el dominio de la función* $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{6 - x^2} - \dfrac{6 - x^2}{x}$.

Solución : Observemos que f es la diferencia de las funciones $f_1(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{6 - x^2}$ y $f_2(x) = \dfrac{6 - x^2}{x}$, así,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2$$

Función f_1 : Con respecto a la función f_1, tenemos que es consecuencia del producto de las funciones

$$g(x) = \sqrt[4]{x} \qquad \text{y} \qquad h(x) = \frac{1}{6 - x^2},$$

es decir,

$$f_1(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{6 - x^2} = \sqrt[4]{x} \cdot \frac{1}{6 - x^2} = g(x)\, h(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h,$$

así, f_1 involucra dos funciones que proporcionan condiciones para su definición, a saber

$$\sqrt[4]{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \geq 0$$

$$\frac{1}{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \neq 0,$$

para obtener el dominio de f_1 debemos tener en cuenta que

1. la función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene sentido si y solo si $x \geq 0$
2. la función $h(x) = \dfrac{1}{6-x^2}$ tiene sentido si y solo si $6 - x^2 \neq 0$

de esto se obtiene que

1. La función $g(x) = \sqrt[4]{x}$ tiene sentido si $x \in [0, \infty) \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } g = [0, \infty)$
2. Para obtener los valores de x para los cuales h tiene sentido, es equivalente resolver la igualdad $6-x^2 = 0$ y la(s) solución(es) de esta ecuación excluirla(s) de $\mathbb{R}$, así,

$$6 - x^2 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = \pm\sqrt{6}$$

Luego, la función $h(x) = \dfrac{1}{6-x^2}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{6}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } h = \mathbb{R} - \left\{\pm\sqrt{6}\right\}$.

Por lo que,

$$\text{Dom } f_1 = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h = [0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Dom } f_1 = [0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\}}$$

Función f_2 **:** Tenemos que la función f_2, es consecuencia del producto de las funciones

$$p(x) = 6 - x^2 \qquad \text{y} \qquad w(x) = \frac{1}{x},$$

es decir,

$$f_2(x) = \frac{6-x^2}{x} = \left(6 - x^2\right) \cdot \frac{1}{x} = p(x)\, w(x) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f_2 = \text{Dom } p \bigcap \text{Dom } w,$$

así, f_2 involucra una función que proporciona condición para su definición, a saber

$$\frac{1}{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \neq 0,$$

ya que, p no impone condiciones por ser una función polinómica, por lo tanto, $\text{Dom } p = \mathbb{R}$, así, para obtener el dominio de f_2 debemos tener en cuenta que

$$\text{la función } \ w(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad x \neq 0,$$

de esto se obtiene que, la función $w(x) = \dfrac{1}{x}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } w = \mathbb{R} - \{0\}$.

Por lo que,

$$\text{Dom } f_2 = \text{Dom } p \bigcap \text{Dom } w = \mathbb{R} - \{0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Dom } f_2 = \mathbb{R} - \{0\}}$$

Luego,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \bigcap \text{Dom } f_2 = (0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Dom } f = (0, \infty) - \left\{\sqrt{6}\right\}}$$

★

Ejemplo 8.17 : *Determinar el rango de la función* $f(x) = mx + b$, *donde* $m < 0$ *y* b *es cualquier número real.*

Solución : Puesto que, $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, se tiene,

$$-\infty < x < \infty,$$

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra $y = f(x)$, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $-\infty < x < \infty$ en una desigualdad que involucre a $y = mx + b$, para ello, debemos multiplicar por m a la desigualdad $-\infty < x < \infty$ y luego sumar b.

$-\infty < x < \infty$ (Dominio natural de f)

$\downarrow$ Multiplicamos por m,
como m es negativo la desigualdad cambia
(Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$\infty > mx > -\infty$

$\downarrow$ Sumamos b a la desigualdad, la misma no cambia, pues,
la aplicación sumar un número mantiene desigualdades
(Propiedad de orden aditiva de los números reales)

$\infty > mx + b > -\infty,$

de aquí,

$$-\infty < \underbrace{mx + b}_{\boxed{y = f(x)}} < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Rgo } f = \mathbb{R}.}$$

★

Ejemplo 8.18 : *Determinar la imagen de la función* $h(x) = 5 - 3x$ *si* $x \in [-4, 2)$.

Solución : Buscamos el rango de h. Observemos que el dominio natural de la función $h(x) = 5 - 3x$ es $\mathbb{R}$, pero en este ejemplo estamos trabajando en una parte de ese domino natural, en el intervalo semi-abierto $[-4, 2)$, es decir, en un dominio restringido de h, $\text{Dom } h = [-4, 2)$, es decir, $-4 \leq x < 2$.

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra $y = h(x)$, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $-4 \leq x < 2$ en una desigualdad que involucre a $y = 5 - 3x$, para ello, debemos multiplicar por -3 a la desigualdad $-4 \leq x < 2$ y luego sumar 5.

$-4 \leq x < 2$ (Dominio restringido de h)

$\downarrow$ Multiplicamos por -3,
como -3 es negativo la desigualdad cambia
(Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$12 \geq -3x > -6$

$\downarrow$ Sumamos 5 a la desigualdad, la misma no cambia, pues,
la aplicación sumar un número mantiene desigualdades
(Propiedad de orden aditiva de los números reales)

$17 \geq 5 - 3x > -1,$

de aquí,

$$-1 < \underbrace{5 - 3x}_{\boxed{y = h(x)}} \leq 17 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Rgo } h = (-1, 17].}$$

★

Ejemplo 8.19 *: Determinar la imagen de la función* $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ *si* $x \in (-3,1)$.

Solución : Buscamos el rango de g. Observemos que el dominio natural de la función $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ es $\mathbb{R}$, pero en este ejemplo estamos trabajando en una parte de ese domino natural, en el intervalo abierto $(-3,1)$, es decir, en un dominio restringido de g, $\text{Dom } g = (-3,1)$, es decir, $-3 < x < 1$.

Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra y, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $-3 < x < 1$ en una desigualdad que involucre a $y = \sqrt{x^2+1}$, para ello, debemos elevar al cuadrado la desigualdad $-3 < x < 1$, es conocido que al elevar al cuadrado una desigualdad, la misma cambiará o se mantendrá dependiendo del signo de la expresión (ver ejercicios 27 y 28 de la guía 7), esto nos lleva a separar la desigualdad en dos, una desigualdad que contenga términos negativos y otra que contenga a los términos positivos, así,

$$-3 < x < 1$$

Parte negativa $\swarrow$ $\quad$ $\searrow$ Parte positiva

$$-3 < x \leq 0 \qquad\qquad 0 \leq x < 1$$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia) $\downarrow$ $\quad$ $\downarrow$ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)

$$9 > x^2 \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq x^2 < 1$$

$\searrow$ $\quad$ $\swarrow$ Consideramos $x^2 \in [0,9) \bigcup [0,1)$

$$0 \leq x^2 < 9$$

$\downarrow$ Sumamos 1 (la desigualdad se mantiene)

$$1 \leq x^2 + 1 < 10$$

$\downarrow$ Aplicamos $\sqrt{(\cdot)}$ (la desigualdad se mantiene)

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{x^2+1} < \sqrt{10}$$

como $\sqrt{1} = 1$, entonces el rango de g es $\boxed{\text{Rgo } g = \left[1, \sqrt{10}\right).}$ ★

Ejemplo 8.20 *: Determinar la imagen de la función* $h(x) = (2 - \sqrt{x})^3$.

Solución : Es conocido que la función h tiene sentido si $x \geq 0$, por lo tanto, $\text{Dom } h : [0, \infty)$.

Buscamos el rango de la función de g.

$$\text{Dom } h : [0,\infty) \qquad \Longrightarrow \qquad x \geq 0$$

$\downarrow$ Aplicamos $\sqrt{(\cdot)}$ (la desigualdad se mantiene)

$$\sqrt{x} \geq 0$$

$\downarrow$ Multiplicamos por -1 (la desigualdad cambia)

$$-\sqrt{x} \leq 0$$

$\downarrow$ Sumamos 2 (la desigualdad se mantiene)

$$2 - \sqrt{x} \leq 2$$

$\downarrow$ Elevamos al cubo (la desigualdad se mantiene)

$$(2-\sqrt{x})^3 \leq 8 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Rgo } h : (-\infty, 8]$$

Por lo tanto, $\boxed{\text{Rgo } h = (-\infty, 8].}$ ★

Ejemplo 8.21 *: Determinar la imagen de la función* $g(x) = x^2 - 3x$.

Solución : Buscamos el rango de la función de g. Observemos que

$$g(x) = x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4},$$

como $\operatorname{Dom} g = (-\infty, \infty)$, tenemos que

$$\operatorname{Dom} g = (-\infty, \infty) \qquad \Longrightarrow \qquad -\infty < x < \infty$$

$$\Big\downarrow \ \text{Restamos } \tfrac{3}{2} \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$-\infty < x - \frac{3}{2} < \infty$$

Parte negativa: $x - \dfrac{3}{2} \leq 0$ $\quad$ Parte positiva: $0 \leq x - \dfrac{3}{2}$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia): $\left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 \geq 0$ $\quad$ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene): $0 \leq \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2$

Misma desigualdad

$$0 \leq \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Big\downarrow \ \text{Restamos } \tfrac{9}{4} \ \text{(la desigualdad se mantiene)}$$

$$-\frac{9}{4} \leq \underbrace{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}_{\boxed{y = g(x)}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\operatorname{Rgo} g = \left[-\frac{9}{4}, \infty\right).}$$

★

Ejemplo 8.22 *: Determinar la imagen de la función* $f(x) = \sqrt[4]{5 - x^2}$.

Solución : La función f tiene sentido si $5 - x^2 \geq 0$, resolvemos la desigualdad, para ello factorizamos, como es una polinomio de grado dos, aplicamos la resolvente para $a = -1$, $b = 0$ y $c = 5$, así,

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(-1)(5)}}{2(-1)} = \frac{\pm\sqrt{20}}{-2} = \frac{\pm 2\sqrt{5}}{-2} = \frac{\pm\sqrt{5}}{-1} = \begin{cases} \dfrac{+\sqrt{5}}{-1} = -\sqrt{5} \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{5}}{-1} = \sqrt{5}, \end{cases}$$

por lo tanto, la factorización del polinomio es

$$-x^2 + 5 = -\left(x - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{5}\right).$$

Estudiamos el signo de los factores

	$(-\infty, -\sqrt{5})$	$(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$	$(\sqrt{5}, \infty)$
$-\left(x - \sqrt{5}\right)$	$+$	$+$	$-$
$x + \sqrt{5}$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

por lo que, la solución de la desigualdad $5 - x^2 \geq 0$, es

$$x \in \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,\right] \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f : \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\,\right].$$

Buscamos el rango de f.

$$\text{Dom } f = \left[-\sqrt{5}, \sqrt{5}\right] \qquad \Longrightarrow \qquad -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5}$$

$$\begin{array}{ccc}
\text{Parte negativa} \swarrow & & \searrow \text{Parte positiva} \\
-\sqrt{5} \leq x \leq 0 & & 0 \leq x \leq \sqrt{5} \\
\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad cambia)}} \Big\downarrow & & \Big\downarrow \substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}} \\
5 \geq x^2 \geq 0 & & 0 \leq x^2 \leq 5 \\
\searrow & & \swarrow \text{ Consideramos } x^2 \in [0,5] \bigcup [0,5]
\end{array}$$

$$0 \leq x^2 \leq 5$$

$$\Big\downarrow \substack{\text{Multiplicamos por } -1 \\ \text{(la desigualdad cambia)}}$$

$$0 \geq -x^2 \geq -5$$

$$\Big\downarrow \substack{\text{Sumamos } 5 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}$$

$$5 \geq 5 - x^2 \geq 0$$

$$\Big\downarrow \substack{\text{Aplicamos } \sqrt[4]{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}$$

$$\sqrt[4]{5} \geq \underbrace{\sqrt[4]{5 - x^2}}_{\uparrow \; \boxed{y = f(x)}} \geq \sqrt[4]{0}$$

como $\sqrt[4]{0} = 0$, entonces el rango de f es $\boxed{\text{Rgo } f = \left[0, \sqrt[4]{5}\right].}$ ★

Ejemplo 8.23 *: Determinar la imagen de la función* $f(x) = \dfrac{3 - x}{x - 1}$.

Solución : La función f tiene sentido si y solo si $x - 1 \neq 0$. Para obtener los valores de x para los cuales f tiene sentido, es equivalente resolver la igualdad $x - 1 = 0$ y la solución de esta ecuación excluirla de $\mathbb{R}$, así,

$$x - 1 = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = 1.$$

Luego, la función $f(x) = \dfrac{3 - x}{x - 1}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ Dom $f = \mathbb{R} - \{1\}$.

Observemos que la función f puede ser escrita como

$$f(x) = \frac{3 - x}{x - 1} = -\frac{x - 3}{x - 1} = -\frac{x - 1 + 1 - 3}{x - 1} = -\frac{(x - 1) + (1 - 3)}{x - 1} = -\frac{(x - 1) - 2}{x - 1}$$

$$= -\left[\frac{x - 1}{x - 1} - \frac{2}{x - 1}\right] = -\left[1 - \frac{2}{x - 1}\right] = \frac{2}{x - 1} - 1,$$

por lo tanto,

$$f(x) = \frac{2}{x - 1} - 1.$$

Hallamos el rango de f, para ello usamos el hecho que Dom $f - \mathbb{R} - \{1\} = (-\infty, 1) \bigcup (1, \infty)$, es decir,

$$x < 1 \qquad\qquad \text{o} \qquad\qquad x > 1,$$

por medio de operaciones algebraicas elementales buscamos transformar estas desigualdades en una desigualdad que involucre a la función $y = \dfrac{2}{x-1} - 1$. Así,

$$x<1 \;\xrightarrow{\text{Restamos } 1}\; x-1<0 \;\xrightarrow[\text{entonces } \frac{1}{x-1} \text{ es negativo}]{\text{Como } x-1 \text{ es negativo,}}\; \frac{1}{x-1}<0 \;\xrightarrow[\text{(la desigualdad se mantiene)}]{\text{Multiplicamos por } 2}\; \frac{2}{x-1}<0 \;\xrightarrow{\text{Restamos } 1}\; \underbrace{\frac{2}{x-1}-1}_{\boxed{y=f(x)}} < -1$$

$$x>1 \;\xrightarrow{\text{Restamos } 1}\; x-1>0 \;\xrightarrow[\text{entonces } \frac{1}{x-1} \text{ es positivo}]{\text{Como } x-1 \text{ es positivo,}}\; \frac{1}{x-1}>0 \;\xrightarrow[\text{(la desigualdad se mantiene)}]{\text{Multiplicamos por } 2}\; \frac{2}{x-1}>0 \;\xrightarrow{\text{Restamos } 1}\; \underbrace{\frac{2}{x-1}-1}_{\boxed{y=f(x)}} > -1$$

de estas dos últimas desigualdades tenemos que

$$y<-1 \qquad \text{ó} \qquad y>-1,$$

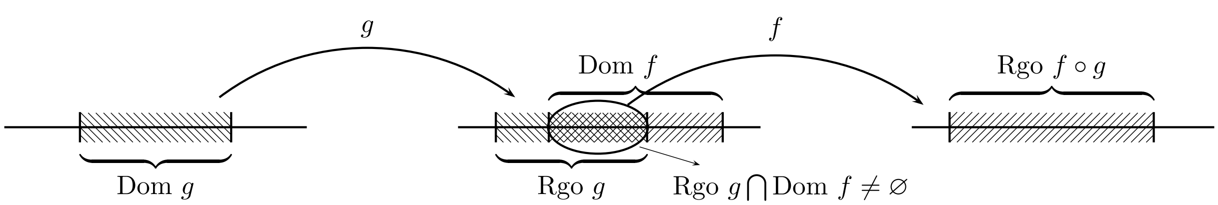
por lo que, el rango de f es

$$\text{Rgo } f = (-\infty,-1)\bigcup(-1,\infty) = \mathbb{R} - \{-1\}.$$

★

Ejemplo 8.24 *: Determinar* $f\circ g$ *si* $g(x) = (2-\sqrt{x})^3$ *y* $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$.

Solución : Es conocido que la composición $f\circ g$ se puede realizar si y solo si $\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $f\circ g$

En primer lugar, hallamos el rango de la primera función que se aplica, en este caso, $g(x) = (2-\sqrt{x})^3$. Por el ejemplo 8.20, tenemos que,

$$\text{Rgo } g = (-\infty, 8].$$

Por otra parte, La función f tiene sentido si y solo si $2-x\neq 0$. Para obtener los valores de x para los cuales f tiene sentido, es equivalente resolver la igualdad $2-x=0$ y la solución de esta ecuación excluirla de $\mathbb{R}$, así,

$$2-x=0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x=2.$$

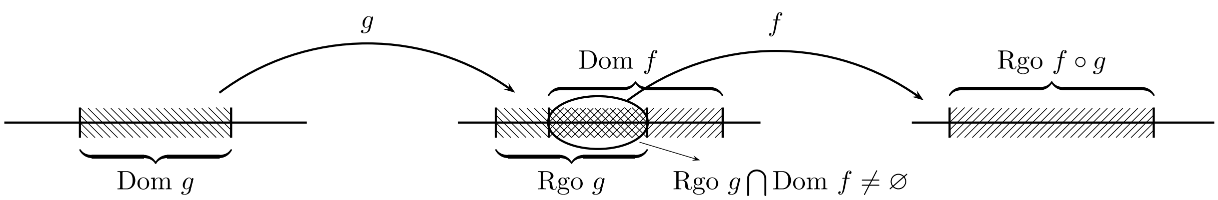
Luego, la función $f(x) = \dfrac{3x-1}{2-x}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \{2\} \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$.

Entonces
$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f = (-\infty, 8] \bigcap \mathbb{R} - \{2\} = (-\infty, 8] - \{2\} \neq \varnothing,$$
por lo tanto, la composición se puede realizar, así,
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\left(2-\sqrt{x}\right)^3\right) = \frac{3\left(2-\sqrt{x}\right)^3 - 1}{2 - \left(2-\sqrt{x}\right)^3}.$$

★

Ejemplo 8.25 *: Determinar* $f \circ g$ *y su dominio si*
$$f(x) = x^2, \quad x \in (-2, 2) \qquad \qquad y \qquad \qquad g(x) = \sqrt{x^2+1}, \quad x \in (-3, 1)$$

Solución : Es conocido que la composición $f \circ g$ se puede realizar si y solo si $\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing$



Esquema de la composición de $f \circ g$

Buscamos el rango de g. Por el ejemplo 8.19, tenemos que, el rango de g es $\text{Rgo } g = \left[1, \sqrt{10}\right)$.

Puesto que
$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f = \left[1, \sqrt{10}\right) \bigcap (-2, 2) = [1, 2) \neq \varnothing,$$
se puede realizar la composicón $f \circ g$, la cual viene dada por
$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt{x^2+1}\right) = \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 = \left|x^2+1\right| = x^2+1,$$
la última igualdad se cumple, ya que la expresión x^2+1 es positiva.

Hallamos el dominio de $(f \circ g)(x) = x^2+1$, podemos estar tentado a concluir que el dominio de $f \circ g$ es $\mathbb{R}$ y en realidad no estaríamos errado sino fuera por el hecho que las funciones f y g están definidas en dominios restringidos. Para hallar $\text{Dom } f \circ g$, procedemos de la siguiente manera

$$1 \le \sqrt{x^2+1} < 2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Elevamos al cuadrado} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} 1 \le x^2+1 < 4 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Restamos } 1}}}{\Longrightarrow} 0 \le x^2 < 3 \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} 0 \le |x| < \sqrt{3} \overset{\substack{\boxed{\substack{\text{Por definición} \\ \text{de valor absoluto}}} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3},$$

por lo tanto,
$$\text{Dom } f \circ g = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \bigcap \text{Dom } g = \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \bigcap (-3, 1) = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$$
así,
$$\boxed{\text{Dom } f \circ g = \left(-\sqrt{3}, 1\right)}$$

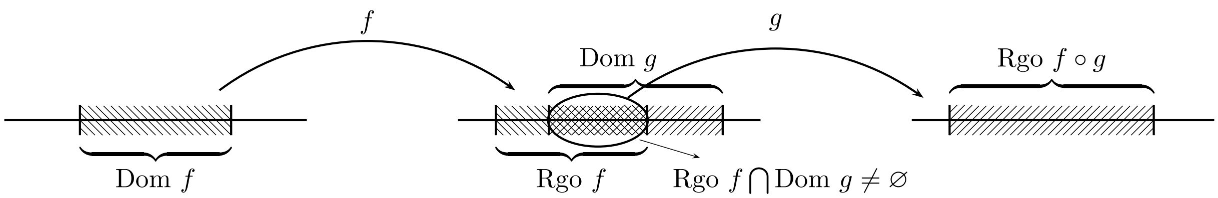
★

Ejemplo 8.26 *: Encuentre* $h(x) = g(f(x))$, *si es posible, y Determinar su dominio, donde* $f(x) = \sqrt{-x}$ *y*

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & si \quad x < -3 \\ \dfrac{x^2}{x-4} & si \quad -3 \leq x < 0. \end{cases}$$

Solución : Es conocido que para que la composición de funciones $g \circ f$ se pueda realizar se debe cumplir

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g \neq \varnothing.$$



Esquema de la composición de $g \circ f$

Buscamos el rango de la función de f. Como $\text{Dom } f = (-\infty, 0]$, tenemos que

$$x \leq 0 \quad \Longrightarrow \quad -x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{-x} \geq 0$$

$\boxed{\text{Multiplicamos por } -1 \text{ (la desigualdad cambia)}}$ $\boxed{\text{Aplicamos } \sqrt{(\cdot)} \text{ (la desigualdad se mantiene)}}$

así, $\text{Rgo } f = [0, \infty)$, mientras que, $\text{Dom } g = (-\infty, 0)$, luego

$$\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g = [0, \infty) \bigcap (-\infty, 0) = \varnothing,$$

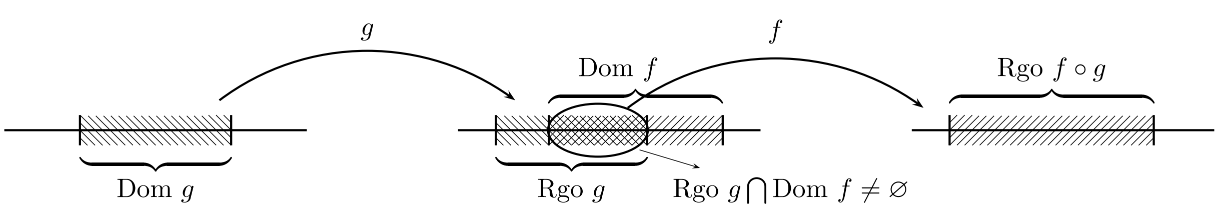
como $\text{Rgo } f \bigcap \text{Dom } g = \varnothing$, la composición **no** se puede realizar. ★

Ejemplo 8.27 *: Encuentre* $h(x) = f(g(x))$, *si es posible, y determine su dominio, donde* $g(x) = x^2 - 3x$ *y*

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad x \leq -2 \\ \sqrt{4 - x^2} & si \quad |x| < 2 \\ 3 - x^3 & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución : Es conocido que para que la composición de funciones $f \circ g$ se pueda realizar se debe cumplir

$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing.$$



Esquema de la composición de $f \circ g$

Buscamos el rango de la función de g. Por el ejemplo 8.21, tenemos que, el rango de g es $\text{Rgo } g = \left[-\dfrac{9}{4}, \infty\right)$.

Por otra parte, el dominio de la función

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si} \quad x\leq -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad |x|<2 \\ 3-x^3 & \text{si} \quad x>2, \end{cases}$$

viene dado por $\text{Dom } f=\mathbb{R}-\{2\}$.

Luego,

$$\text{Rgo } g\bigcap \text{Dom } f=\left[-\frac{9}{4},\infty\right)\bigcap \mathbb{R}-\{2\}=\left[-\frac{9}{4},\infty\right)-\{2\}\neq\varnothing,$$

como $\text{Rgo } g\bigcap \text{Dom } f\neq\varnothing$, la composición se puede realizar.

Tenemos que

$$h(x)=f(g(x))=\begin{cases} g(x) & \text{si} \quad g(x)\leq -2 \\ \sqrt{4-(g(x))^2} & \text{si} \quad |g(x)|<2 \\ 3-(g(x))^3 & \text{si} \quad g(x)>2, \end{cases}$$

es decir,

$$h(x)=\begin{cases} x^2-3x & \text{si} \quad x^2-3x\leq -2 \\ \sqrt{4-(x^2-3x)^2} & \text{si} \quad \left|x^2-3x\right|<2 \\ 3-\left(x^2-3x\right)^3 & \text{si} \quad x^2-3x>2 \end{cases}$$

Resolvemos las tres desigualdades que se generan de la definición de la función h, para conocer los valores x para los cuales están definidos cada parte de la función.

1. Para $x^2-3x\leq -2$, observemos que

$$x^2-3x\leq -2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad x^2-3x+2\leq 0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad (x-1)(x-2)\leq 0.$$

Raíces : $x=1$ y $x=2$.

Estudiamos el signo

	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,\infty)$
$x-1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución es

$$x\in[1,2],$$

así, $h(x)=x^2-3x$, si $x\in[1,2]\bigcap\mathbb{R}=[1,2]$.

2. Para $\left|x^2-3x\right|<2$, tenemos, por definición de valor absoluto, que

$$\left|x^2-3x\right|<2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad -2<x^2-3x<2,$$

por lo tanto, debemos resolver las desigualdades

Desigualdad I	**Desigualdad II**
$-2<x^2-3x$	$x^2-3x<2$

y luego intersectar las soluciones de cada una de las desigualdades.

Desigualdad I	**Desigualdad II**
$$-2 < x^2 - 3x$$ $$0 < x^2 - 3x + 2$$ $$0 < (x-1)(x-2)$$ Raíces : $x = 1, \quad x = 2$ Estudiamos el signo $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} & (-\infty,1) & (1,2) & (2,\infty) \\ \hline x-1 & - & + & + \\ \hline x-2 & - & - & + \\ \hline & + & - & + \end{array}$	$$x^2 - 3x < 2$$ $$x^2 - 3x - 2 < 0$$ $$\left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) < 0$$ Raíces : $x = \frac{3-\sqrt{17}}{2}, \quad x = \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ Estudiamos el signo $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|} & \left(-\infty,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) & \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2},\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) & \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2},\infty\right) \\ \hline x-\frac{3-\sqrt{17}}{2} & - & + & + \\ \hline x-\frac{3+\sqrt{17}}{2} & - & - & + \\ \hline & + & - & + \end{array}$
$\text{sol}_1 : x \in (-\infty, 1) \bigcup (2, \infty)$	$\text{sol}_2 : x \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_\text{F} = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_2 = \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \bigcup \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right),$$

así, $h(x) = \sqrt{4 - (x^2 - 3x)^2}$, si

$$x \in \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \bigcup \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) \bigcap \mathbb{R} = \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, 1\right) \bigcup \left(2, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right).$$

3. Para $x^2 - 3x > 2$, tenemos

$$x^2 - 3x > 2 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 3x - 2 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right) > 0.$$

Raíces : $\quad x = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}, \quad x = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}.$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$	$\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$	$\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right)$
$x - \frac{3-\sqrt{17}}{2}$	$-$	$+$	$+$
$x - \frac{3+\sqrt{17}}{2}$	$-$	$-$	$+$
	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right),$$

así, $h(x) = 3 - \left(x^2 - 3x\right)^3$, si

$$x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right) \bigcap \mathbb{R} = \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right) \bigcup \left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}, \infty\right).$$

Por lo tanto,

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4 - \left(x^2 - 3x\right)^2} & \text{si} \quad \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} < x < 1 \quad \text{ó} \quad 2 < x < \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 3 - \left(x^2 - 3x\right)^3 & \text{si} \quad x < \dfrac{3-\sqrt{17}}{2} \quad \text{ó} \quad x > \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

y su dominio es

$$\text{Dom } h = \mathbb{R} - \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}.$$

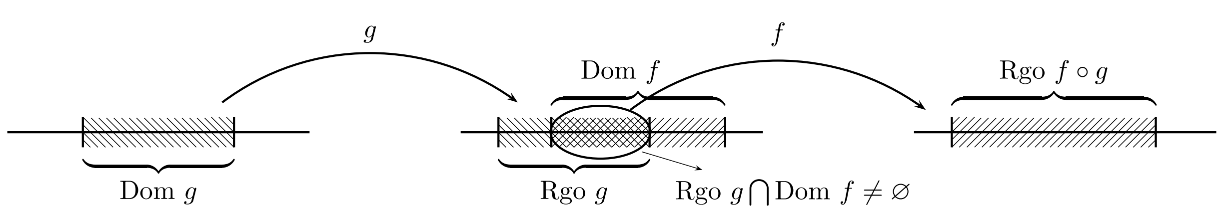
★

Ejemplo 8.28 *: Encuentre* $h(x) = f(g(x))$, *si es posible, y determine su dominio, donde*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & si \quad x < -3 \\ \dfrac{3x^2-1}{x^4+5} & si \quad -3 \leq x < 1 \\ 2 - 5x & si \quad x \geq 1 \end{cases} \qquad y \qquad g(x) = \begin{cases} 3 - 2x & si \quad x \geq 3 \\ x^2 - 2x + 2 & si \quad x < 3. \end{cases}$$

Solución : Es conocido que para que la composición de funciones $f \circ g$ se pueda realizar se debe cumplir

$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f \neq \varnothing.$$



Esquema de la composición de $f \circ g$

Buscamos el rango de la función de g, por ser una función a trozos, buscamos los rangos de cada una de las funciones involucradas en la definición de g y luego se unen dichos rango, para obtener Rgo g.

- Para la función $g_1(x) = 3 - 2x$. Puesto que, Dom $g_1 = [3, \infty)$, se tiene,

$$3 \leq x < \infty,$$

  Lo que buscamos son los valores entre los cuales se encuentra $y = g_1(x)$, es decir, por medio de operaciones algebraicas elementales se quiere transformar la desigualdad $3 \leq x < \infty$ en una desigualdad que involucre a $y = 3 - 2x$, para ello, debemos multiplicar por -2 a la desigualdad $3 \leq x < \infty$ y luego sumar 3.

$$3 \leq x < \infty \qquad \text{(Dominio restringido de } g_1\text{)}$$

$\downarrow$ Multiplicamos por -2, como -2 es negativo la desigualdad cambia (Propiedad de orden multiplicativa de los números reales)

$$-6 \geq -2x > -\infty$$

$\downarrow$ Sumamos 3 a la desigualdad, la misma no cambia, pues, la aplicación sumar un número mantiene desigualdades (Propiedad de orden aditiva de los números reales)

$$-3 \geq 3 - 2x > \infty,$$

de aquí,

$$-\infty < \underbrace{3 - 2x}_{\uparrow \atop \boxed{y = g_1(x)}} \leq -3 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Rgo } g_1 = (-\infty, -3].}$$

- Para la función $g_2(x) = x^2 - 2x + 2$. Observemos que

$$g_2(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1,$$

como $\text{Dom } g_2 = (-\infty, 3)$, tenemos que

$$\text{Dom } g_2 = (-\infty, 3) \qquad \Longrightarrow \qquad -\infty < x < 3$$

$\downarrow$ Restamos 1 (la desigualdad se mantiene)

$$-\infty < x - 1 < 2$$

Parte negativa $\swarrow$ $\qquad$ $\searrow$ Parte positiva

$$x - 1 \leq 0 \qquad\qquad 0 \leq x - 1 < 2$$

Elevamos al cuadrado (la desigualdad cambia) $\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ Elevamos al cuadrado (la desigualdad se mantiene)

$$(x-1)^2 \geq 0 \qquad\qquad 0 \leq (x-1)^2 < 4$$

$\searrow$ $\qquad$ $\swarrow$ Consideramos $(x-1)^2 \in [0,4) \bigcup [0, \infty)$

$$0 \leq (x-1)^2$$

$\downarrow$ Sumamos 1 (la desigualdad se mantiene)

$$1 \leq \underbrace{(x-1)^2 + 1}_{\uparrow \atop \boxed{y = g_2(x)}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\text{Rgo } g_2 = [1, \infty).}$$

Luego,

$$\text{Rgo } g = \text{Rgo } g_1 \bigcup \text{Rgo } g_2 = (-\infty, -3] \bigcup [1, \infty),$$

es decir,

$$\text{Rgo } g = (-\infty, -3] \bigcup [1, \infty).$$

Por otra parte, el dominio de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x < -3 \\ \dfrac{3x^2 - 1}{x^4 + 5} & \text{si} \quad -3 \leq x < 1 \\ 2 - 5x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

viene dado por Dom $f = \mathbb{R}$.

Luego,

$$\text{Rgo } g \bigcap \text{Dom } f = \Big\{ (-\infty, -3] \bigcup [1, \infty) \Big\} \bigcap \mathbb{R} = (-\infty, -3] \bigcup [1, \infty) \neq \varnothing,$$

como Rgo $g \bigcap$ Dom $f \neq \varnothing$, la composición se puede realizar.

Tenemos que

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{g(x) - 2} & \text{si} \quad g(x) < -3 \\ \dfrac{3(g(x))^2 - 1}{(g(x))^4 + 5} & \text{si} \quad -3 \leq g(x) < 1 \\ 2 - 5g(x) & \text{si} \quad g(x) \geq 1 \end{cases},$$

observemos que de las funciones involucradas en la definición de la función g, se tiene que

- La desigualdad $g(x) < -3$ se cumple para la función $g_1(x) = 3 - 2x$, ya que Rgo $g_1 = (-\infty, -3]$.
- La desigualdad $-3 \leq g(x) < 1$ se cumple para la función $g_1(x) = 3 - 2x$, pero solo cuando $g_1(x) = -3$.
- La desigualdad $g(x) \geq 1$ se cumple para la función $g_2(x) = x^2 - 2x + 2$, ya que Rgo $g_2 = [1, \infty)$.

Así,

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{3 - 2x}{(3 - 2x) - 2} & \text{si} \quad 3 - 2x < -3 \\ \dfrac{3(3 - 2x)^2 - 1}{(3 - 2x)^4 + 5} & \text{si} \quad -3 = 3 - 2x \\ 2 - 5\left(x^2 - 2x + 2\right) & \text{si} \quad x^2 - 2x + 2 \geq 1 \end{cases}$$

Resolvemos las tres desigualdades que se generan de la definición de la función h, para conocer los valores x para los cuales están definidos cada parte de la función.

1. Para $3 - 2x < -3$, se tiene

$$3 - 2x < -3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 + 3 < 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3 < x \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (3, \infty),$$

   de aquí,

$$h(x) = \frac{3 - 2x}{(3 - 2x) - 2} = \frac{3 - 2x}{1 - 2x},$$

   si $x \in (3, \infty) \bigcap [3, \infty) = (3, \infty)$.

2. Para $-3 = 3 - 2x$, se tiene

$$-3 = 3 - 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x = 3 + 3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = 3,$$

   de aquí,

$$h(x) = \frac{3(-3)^2 - 1}{(-3)^4 + 5} = \frac{3(9) - 1}{81 + 5} = \frac{26}{86} = \frac{13}{43},$$

   si $x = 3$.

3. Para $x^2 - 2x + 2 \geq 1$, se tiene

$$x^2 - 2x + 2 \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 - 2x + 1 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x - 1)^2 \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \mathbb{R},$$

   de aquí,

$$h(x) = 2 - 5\left(x^2 - 2x + 2\right) = -5x^2 + 10x - 8,$$

   si $x \in \mathbb{R} \bigcap (-\infty, 3) = (-\infty, 3)$.

Por lo tanto,

$$h(x) = f(g(x)) = \begin{cases} \dfrac{3-2x}{1-2x} & \text{si} \quad x > 3 \\ \dfrac{13}{43} & \text{si} \quad x = 3 \\ -5x^2 + 10x - 8 & \text{si} \quad x < 3 \end{cases} \qquad \text{con} \qquad \text{Dom } h = \mathbb{R}.$$

★

Ejemplo 8.29 *: Sean* $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2 - x^2$ *y* $h(x) = 2 - 3x$. *Hallar* $f \circ h \circ f \circ g$.

Solución : La funciones dada las escribimos de la siguiente forma

$$f(\cdot) = \sqrt{(\cdot)}, \qquad g(\cdot) = 2 - (\cdot)^2 \qquad \text{y} \qquad h(\cdot) = 2 - 3(\cdot).$$

Tenemos que

$$F(x) = (f \circ h \circ f \circ g)(x) = f(h(f(g(x)))),$$

por lo tanto,

$$F(x) = f\left(h\left(f\left(2 - x^2\right)\right)\right) = f\left(h\left(\sqrt{2 - x^2}\right)\right) = f\left(2 - 3\sqrt{2 - x^2}\right) = \sqrt{2 - 3\sqrt{2 - x^2}},$$

es decir,

$$(f \circ h \circ f \circ g)(x) = \sqrt{2 - 3\sqrt{2 - x^2}}.$$

★

Ejemplo 8.30 *: Considere las funciones* $f(x) = x^2 - 2x$ *y* $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$. *Hallar* $g \circ f \circ f$.

Solución : Las funciones dadas las escribimos como

$$f(\cdot) = (\cdot)^2 - 2(\cdot) \qquad \text{y} \qquad g(\cdot) = \frac{(\cdot)}{(\cdot) - 1}.$$

Tenemos que

$$F(x) = (g \circ f \circ f)(x) = g(f(f(x))),$$

por lo tanto,

$$F(x) = g\left(f\left(x^2 - 2x\right)\right) = g\left(\left(x^2 - 2x\right)^2 - 2\left(x^2 - 2x\right)\right) = g\left(\right)$$

donde

$$\left(x^2 - 2x\right)^2 - 2\left(x^2 - 2x\right) = \left(x^4 - 4x^3 + 4x^2\right) - 2x^2 + 4x = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x,$$

así,

$$F(x) = g\left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x\right) = \frac{\left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x\right)}{\left(x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x\right) - 1}.$$

Luego

$$(g \circ f \circ f)(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x}{x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 1}.$$

★

Ejemplo 8.31 *: Hallar las funciones que al componerlas se obtenga* $h(x) = \left(\sqrt[3]{1 - 2x} + 4\right)^2$.

Solución : Observe que el orden en que aparecen las funciones en dicha composición es:

$$\begin{array}{ccccccccc} (x) & \longrightarrow & 1 - 2(x) & \longrightarrow & \sqrt[3]{(1 - 2(x))} & \longrightarrow & \left(\sqrt[3]{(1 - 2(x))} + 4\right) & \longrightarrow & \left(\left(\sqrt[3]{(1 - 2(x))}\right) + 4\right)^2 \\ (\cdot) & \longrightarrow & 1 - 2(\cdot) & \longrightarrow & \sqrt[3]{(\cdot)} & \longrightarrow & (\cdot) + 4 & \longrightarrow & (\cdot)^2 \end{array}$$

luego, las funciones son

$$f(x) = 1 - 2x, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x}, \qquad w(x) = x + 4, \qquad r(x) = x^2$$

y el orden de composición es

$$h(x) = r(w(g(f(x)))).$$

★

Ejemplo 8.32 *: Hallar el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}}$.

Solución : La función f tiene sentido si

$$\frac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3} \geq 0,$$

la solución de esta desigualdad representa el dominio de la función f.

Factorizamos numerador y denominador, en ambos casos, por ser polinomios cuadráticos, aplicamos la resolvente

- Numerador : $3x^2+6x+8$. Aplicamos la resolvente para $a = 3$, $b = 6$ y $c = 8$

$$x = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(3)(8)}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-96}}{2(3)} = \frac{-6 \pm \sqrt{-60}}{6} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

- Denominador : x^2+2x+3. Aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = 2$ y $c = 3$

$$x = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \longleftarrow \boxed{\text{Raíz cuadrada de un número negativo. Número complejo.}}$$

de aquí,

	$(-\infty, \infty)$
$3x^2+6x+8$	$+$
x^2+2x+3	$+$
	$+$

es decir, la expresión $\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}$ siempre es mayor que cero, por lo que concluimos que

$$\boxed{\text{Dom } f = \mathbb{R}.}$$

★

Ejemplo 8.33 *: Hallar el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-5} - \dfrac{x}{x+3}}$.

Solución : La función f tiene sentido si

$$\frac{x+2}{x-5} - \frac{x}{x+3} \geq 0,$$

así,

$$\frac{x+2}{x-5} - \frac{x}{x+3} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{(x+2)(x+3) - x(x-5)}{(x-5)(x+3)} \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{10x+6}{(x-5)(x+3)} \geq 0.$$

Buscamos las raíces de la expresión del numerador y la expresión del denominador

- Numerador : $10x+6=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-\dfrac{3}{5}.$

- Denominador : $(x-5)(x+3)=0 \quad \Longrightarrow \quad x=5 \quad$ y $\quad x=-3.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-3)$	$\left(-3,-\frac{3}{5}\right)$	$\left(-\frac{3}{5},5\right)$	$(5,\infty)$
$10x+6$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego, la solución es

$$x \in \left(-3,-\frac{3}{5}\right] \bigcup (5,\infty).$$

Por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{Dom} f = \left(-3,-\frac{3}{5}\right] \bigcup (5,\infty).}$$

★

Ejemplo 8.34 *: Hallar el dominio de la función* $h(x)=\sqrt{\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1}}.$

Solución : La función h tiene sentido si

$$\frac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} \geq 0.$$

Resolvemos la desigualdad $\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1} \geq 0.$

Es conocido que un cociente es positivo si el numerador y denominador tienen signos iguales, en vista que la expresión valor absoluto es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x-1>0$, despejamos x, se obtiene que $x>\frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left(\frac{1}{5},\infty\right).$$

En este caso, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **menor ó igual**, por lo que aquellos valores x que hagan cero al valor absoluto deben pertenecer a la solución, como,

$$\left|2x^2-x-3\right|=0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2-x-3=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=-1 \quad \text{y} \quad x=\frac{3}{2},$$

puesto que, el valor $x=\dfrac{3}{2}$, ya pertenece al intervalo $\left(\dfrac{1}{5},\infty\right)$ solo debemos añadir el valor $x=-1$ a dicho intervalo, entonces, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(\frac{1}{5},\infty\right) \bigcup \{-1\},$$

por lo tanto,

$$\boxed{\text{Dom } h = \left(\frac{1}{5}, \infty\right) \bigcup \{-1\}.}$$

★

Ejemplo 8.35 : *Hallar el dominio de la función* $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, *donde* $f(x) = \sqrt{\dfrac{|2x^2 - x - 3|}{5x - 1}}$.

Solución : La función g tiene sentido si y solo si

$$\sqrt{\frac{|2x^2 - x - 3|}{5x - 1}} \neq 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{|2x^2 - x - 3|}{5x - 1} \geq 0,$$

lo que es equivalente a

$$\frac{|2x^2 - x - 3|}{5x - 1} > 0.$$

Resolvemos la desigualdad $\dfrac{|2x^2 - x - 3|}{5x - 1} > 0$.

Es conocido que un cociente es positivo si el numerador y denominador tienen signos iguales, en vista que la expresión valor absoluto siempre es positiva o igual a cero, tenemos que la desigualdad dada solo tiene solución si $5x - 1 > 0$, despejamos x, se obtiene que $x > \frac{1}{5}$, por lo que

$$x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right).$$

Por otro lado, observemos que la desigualdad que se desea resolver es una desigualdad **estricta**, $(>)$ por lo que no pertenecen a la solución aquellos valores x que hagan cero al valor absoluto, así,

$$|2x^2 - x - 3| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x^2 - x - 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -1 \quad \text{y} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$x \in \left(\frac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\},$$

por lo tanto,

$$\boxed{\text{Dom } g = \left(\frac{1}{5}, \infty\right) - \left\{\frac{3}{2}\right\}.}$$

★

Ejemplo 8.36 : *Hallar el dominio de la función* $f(x) = \sqrt{|x^2 - 3x - 5| - |x^2 + 6|}$.

Solución : La función f tiene sentido si

$$|x^2 - 3x - 5| - |x^2 + 6| \geq 0, \qquad \text{es decir,} \qquad |x^2 - 3x - 5| \geq |x^2 + 6|.$$

Es conocido que

$$|(\cdot)|^2 = (\cdot)^2,$$

además, elevar al cuadrado mantiene desigualdades si los términos son positivos como es el caso de la expresión valor absoluto, así,

$$|x^2 - 3x - 5| \geq |x^2 + 6| \quad \Longrightarrow \quad |x^2 - 3x - 5|^2 \geq |x^2 + 6|^2 \quad \Longrightarrow \quad (x^2 - 3x - 5)^2 \geq (x^2 + 6)^2,$$

resolvemos esta última desigualdad

$$\left(x^2-3x-5\right)^2 \geq \left(x^2+6\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \overbrace{\left(x^2-3x-5\right)^2-\left(x^2+6\right)^2}^{\boxed{\substack{\text{Suma por su diferencia con}\\ a=x^2-3x-5 \quad \text{y} \quad b=x^2+6}}} \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\overbrace{\left(x^2-3x-5\right)+\left(x^2+6\right)}^{\boxed{(a+b)}}\right)\left(\overbrace{\left(x^2-3x-5\right)-\left(x^2+6\right)}^{\boxed{(a-b)}}\right) \geq 0$$

$$\Longrightarrow \quad \left(2x^2-3x+1\right)(-3x-11) \geq 0,$$

factorizamos el polinomio de grado 2, para hallar sus raíces aplicamos la resolvente

$$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(1)}}{2(2)}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=\begin{cases} \dfrac{3+1}{4}=1 \\ \dfrac{3-1}{4}=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

así, la factorización del polinomio es

$$2x^2-3x+1=2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

por lo que debemos resolver la siguientes desigualdad

$$2(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)(-3x-11) \geq 0.$$

Buscamos las raíces de la expresión

$$x-1=0 \quad \Longrightarrow \quad x=1, \qquad x-\frac{1}{2}=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{1}{2}, \qquad -3x-11=0 \quad \Longrightarrow \quad x=-\frac{11}{3}.$$

Estudiamos el signo

	$\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right)$	$\left(-\frac{11}{3},\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,\infty)$
$2(x-1)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-\frac{1}{2}$	$-$	$-$	$+$	$+$
$-3x-11$	$+$	$-$	$-$	$-$
	$+$	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución es

$$x \in \left(-\infty,-\frac{11}{3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2},1\right],$$

por lo tanto,

$$\boxed{\operatorname{Dom} f=\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2},1\right].}$$

★

Ejemplo 8.37 *: Hallar el dominio de la función* $g(x)=\sqrt[4]{4-|2x+4|+|x-1|}$.

Solución : La función g tiene sentido si

$$4-|2x+4|+|x-1|\geq 0, \qquad \text{es decir,} \qquad |2x+4|-|x-1|\leq 4.$$

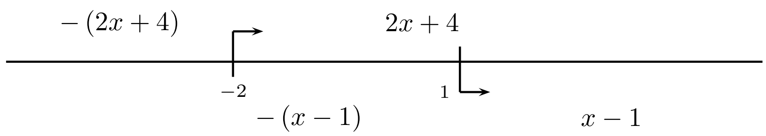
Por la definición de valor absoluto

$$|2x+4|=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad 2x+4\geq 0 \\ -(2x+4) & \text{si} \quad 2x+4<0 \end{cases}=\begin{cases} 2x+4 & \text{si} \quad x\geq -2 \\ -(2x+4) & \text{si} \quad x<-2 \end{cases}$$

y

$$|x-1|=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x-1\geq 0 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x-1<0 \end{cases}=\begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x\geq 1 \\ -(x-1) & \text{si} \quad x<1 \end{cases}$$

tenemos que, la recta real se secciona en



es decir,

$(-\infty,-2)$	$[-2,1)$	$[1,\infty)$
$-(2x+4)$	$2x+4$	$2x+4$
$-(x-1)$	$-(x-1)$	$x-1$

Caso I : Intervalo $(-\infty,-2)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{nos queda} \qquad -(2x+4)-(1-x)\leq 4,$$

resolviendo,

$$-(2x+4)-(1-x)\leq 4 \quad \Longrightarrow \quad -x\leq 9 \quad \Longrightarrow \quad x\geq 9,$$

entonces,

$$\text{sol}_1=[-9,\infty)\bigcap(-\infty,-2)=[-9,-2).$$

Caso II : Intervalo $[-2,1)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{nos queda} \qquad 2x+4-(1-x)\leq 4,$$

resolviendo,

$$2x+4-(1-x)\leq 4 \quad \Longrightarrow \quad 3x\leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x\leq \frac{1}{3},$$

entonces,

$$\text{sol}_2=\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]\bigcap[-2,1)=\left[-2,\frac{1}{3}\right).$$

Caso III : Intervalo $[1,\infty)$.

$$|2x+4|-|x-1|\leq 4, \qquad \text{nos queda} \qquad 2x+4-(x-1)\leq 4,$$

resolviendo,

$$2x+4-(x-1)\leq 4 \quad \Longrightarrow \quad x\leq -1,$$

entonces,

$$\text{sol}_3=(-\infty,-1]\bigcap[1,\infty)=\emptyset.$$

Luego, la solución final es

$$\text{sol}_F = \text{sol}_1 \bigcup \text{sol}_2 \bigcup \text{sol}_3 = [-9,-2) \bigcup \left[-2, \frac{1}{3}\right) \bigcup \emptyset = \left[-9, \frac{1}{3}\right),$$

por lo tanto,

$$\boxed{\text{Dom } g = \left[-9, \frac{1}{3}\right).}$$

★

Ejemplo 8.38 : *Diga si la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{2+|x|}$ *es una función par, impar ó ninguna de las dos.*

Solución : Es conocido que, una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **par**, si y solo si

$$f(-x) = f(x),$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ y f es **impar**, si y solo si

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que $\text{Dom } f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, (intervalo simétrico) tenemos que,

$$f(-x) = \frac{\overbrace{(-x)^3}^{\boxed{\begin{array}{c}(-x)^3 = -x^3\\ \text{Función impar}\end{array}}} - \overbrace{\sqrt[3]{-x}}^{\boxed{\begin{array}{c}\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}\\ \text{Función impar}\end{array}}}}{2 + \underbrace{|-x|}_{\boxed{\begin{array}{c}|-x| = |x|\\ \text{Función par}\end{array}}}} = \frac{-x^3 + \sqrt[3]{x}}{2+|x|} = -\frac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{2+|x|} = -f(x)$$

como se tiene

$$f(-x) = -f(x),$$

concluimos que f es una función impar. ★

Ejemplo 8.39 : *Diga si la función* $f(x) = \dfrac{|x| - x^2 + 7}{\sqrt{9-x^2}}$ *es una función par, impar ó ninguna de las dos.*

Solución : Dominio de f : La función f tiene sentido si y solo si el argumento de la raíz cuadrada es mayor ó igual a cero,

$$\text{Condición } 1 \quad \left(\text{Para } \sqrt{(\cdot)}\right) \quad : \quad 9 - x^2 \geq 0$$

y cuando el denominador del cociente sea diferente de cero, es decir,

$$\text{Condición } 2 \quad \left(\text{Para } \frac{1}{(\cdot)}\right) \quad : \quad \sqrt{9-x^2} \neq 0$$

Observemos que las dos condiciones que dan sentido a la función f se pueden resumir en la condición

$$\text{Condición única :} \quad 9 - x^2 > 0,$$

ya que, $\sqrt{9-x^2} \neq 0$ solo cuando $9 - x^2 \neq 0$.

Resolvemos la condición única. Factorizamos la expresión

$$9 - x^2 = (3-x)(3+x),$$

así, la desigualdad dada por la condición única se transforma en

$$(3-x)(3+x) > 0.$$

Raíces : $x = -3, \quad x = 3.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,\infty)$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$3+x$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$x \in (-3,3) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{Dom } f = (-3,3).$$

Entonces, es conocido que, una función f es **par**, si y solo si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \in \text{Dom } f$ y f es **impar**, si y solo si

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo $x \in \text{Dom } f$, así, puesto que $\text{Dom } f = (-3,3)$, (intervalo simétrico) tenemos que,

$$f(-x) = \frac{\overbrace{|-x|}^{\boxed{\substack{|-x|=|x| \\ \text{Función par}}}} - \overbrace{(-x)^2}^{\boxed{\substack{(-x)^2=x^2 \\ \text{Función par}}}} + 7}{\sqrt{9 - \underbrace{(-x)^2}_{\boxed{\substack{(-x)^2=x^2 \\ \text{Función par}}}}}} = \frac{|x| - x^2 + 7}{\sqrt{9-x^2}} = f(x),$$

como se tiene

$$f(-x) = f(x),$$

concluimos que f es una función par. ★

Ejemplo 8.40 *: Diga si la función* $f(x) = \dfrac{|x| - x^2 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{25-x^2}}$ *es una función par, impar ó ninguna de las dos.*

Solución : Dominio de f : La función f tiene sentido si y solo si el argumento de la función raíz cuarta es mayor o igual que cero

$$\text{Condición } 1 \quad \left(\text{Para } \sqrt[4]{(\cdot)}\right) : \quad x \geq 0,$$

el argumento de la raíz cuadrada sea mayor ó igual a cero,

$$\text{Condición } 2 \quad \left(\text{Para } \sqrt{(\cdot)}\right) : \quad 25 - x^2 \geq 0$$

y cuando el denominador del cociente sea diferente de cero, es decir,

$$\text{Condición } 3 \quad \left(\text{Para } \frac{1}{(\cdot)}\right) : \qquad \sqrt{25-x^2} \neq 0.$$

De la condición 1 se tiene $x \in [0, \infty)$, es decir, $\text{sol}_1 = [0, \infty)$.

Para las condiciones 2 y 3. Observemos que las condiciones 2 y 3 se pueden resumir en la condición

$$\text{Condición } 2^* : \qquad 25 - x^2 > 0,$$

ya que, $\sqrt{25-x^2} \neq 0$ solo cuando $25 - x^2 \neq 0$.

Resolvemos la condición 2^*. Factorizamos la expresión

$$25 - x^2 = (5-x)(5+x),$$

así, la desigualdad dada por la condición 2^* se transforma en

$$(5-x)(5+x) > 0.$$

Raíces : $\quad x = -5, \quad x = 5.$

Estudiamos el signo

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 5)$	$(5, \infty)$
$5-x$	$+$	$+$	$-$
$5+x$	$-$	$+$	$+$
	$-$	$+$	$-$

Luego, la solución de la desigualdad es

$$x \in (-5, 5) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{sol}_{2^*} = (-3, 3).$$

Así, el dominio de f viene dado por

$$\text{Dom } f = \text{sol}_1 \bigcap \text{sol}_{2^*} = [0, \infty) \bigcap (-5, 5) = [0, 5),$$

es decir,

$$\boxed{\text{Dom } f = [0, 5),}$$

por no ser un intervalo simétrico, concluimos que f no es una función par, ni impar. ★

Ejemplo 8.41 *: Demuestre que si f es una función par y g es una función impar, entonces fg es una función impar.*

Demostración : Sean f una función par y g una función impar, es decir, $f(-x) = f(x)$, para todo $x \in \text{Dom } f$ y $g(-x) = -g(x)$, para todo $x \in \text{Dom } g$.

Demostremos que la función fg es un función impar, entonces, para todo $x \in \text{Dom } (fg)$, se tiene

$$(fg)(-x) = f(-x)\, g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)\, g(x) = -(fg)(x),$$

con lo que se tiene

$$(fg)(-x) = -(fg)(x), \qquad \text{para todo } x \in \text{Dom } (fg),$$

por lo tanto, fg es una función impar. ★

Ejemplo 8.42 *: Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $f+g$ es impar.*

Demostración : Sean f y g funciones impares, es decir, $f(-x)=-f(x)$, para todo $x\in \text{Dom } f$ y $g(-x)=-g(x)$, para todo $x\in \text{Dom } g$.

Demostremos que la función $f+g$ es un función impar, entonces, para todo $x\in \text{Dom } (f+g)$, se tiene

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)+(-g(x))=-f(x)-g(x)=-(f(x)+g(x))=-(f+g)(x),$$

con lo que se tiene

$$(f+g)(-x)=-(f+g)(x), \qquad \text{para todo } x\in \text{Dom } (f+g),$$

por lo tanto, $f+g$ es una función impar. ★

Ejemplo 8.43 *: Sea $f(x)=\dfrac{1}{x}$ una función definida en $0<x\leq 3$, periódica, de período 3. Hallar $f\left(\dfrac{19}{3}\right)$.*

Solución : Puesto que, la función f es periódica, de período 3, tenemos que

$$\frac{1}{x}=f(x)=f(x+3)=f(x+6),$$

como

$$\frac{19}{3}=\frac{18+1}{3}=\frac{18}{3}+\frac{1}{3}=6+\frac{1}{3},$$

de aquí,

$$f\left(\frac{19}{3}\right)=f\left(6+\frac{1}{3}\right)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3 \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\frac{19}{3}\right)=3.$$

★

Ejemplo 8.44 *: Sea $f(x)=|x|-1$ una función definida en $-1<x\leq 1$, periódica, de período 2. Hallar $f\left(\dfrac{15}{4}\right)$.*

Solución : Puesto que, la función f es periódica, de período 2, tenemos que

$$|x|-1=f(x)=f(x+2)=f(x+4),$$

como

$$\frac{15}{4}=\frac{16-1}{4}=\frac{16}{4}-\frac{1}{4}=4-\frac{1}{4},$$

de aquí,

$$f\left(\frac{15}{4}\right)=f\left(4-\frac{1}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=\left|-\frac{1}{4}\right|-1=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad f\left(\frac{15}{4}\right)=-\frac{3}{4}.$$

★

Ejemplo 8.45 *: Diga en que intervalo la función $h(x)=\dfrac{2x-5}{x+3}$ es creciente ó decreciente.*

Solución : Una función f es **estrictamente creciente** es un intervalo I si, para todo $x_1,x_2\in I$, tal que $x_1<x_2$ se tiene que $f(x_1)<f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1<x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1)<f(x_2),} \qquad \longleftarrow \quad f \text{ mantiene desigualdades}$$

mientras que, una función f es **estrictamente decreciente** es un intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2)\,,} \qquad \longleftarrow \quad f \text{ cambia desigualdades}$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = \frac{2(x+3-3)-5}{x+3} = \frac{2(x+3)-6-5}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x+3} - \frac{11}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3},$$

es decir,

$$h(x) = 2 - \frac{11}{x+3}$$

y que $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-3\}$, sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $x_1 < x_2$.

Estudiamos dos casos

- **Caso I :** Los valores $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $x_1 < x_2 < -3$.
- **Caso II :** Los valores $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $-3 < x_1 < x_2$,

en ambos casos procedemos de la siguiente manera

$$x_1 < x_2 \quad \overset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad x_1 + 3 < x_2 + 3 \quad \overset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{1}{x_1+3} > \frac{1}{x_2+3}$$

$$\underset{\boxed{\substack{\text{Multiplicamos por } -11 \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \quad \frac{-11}{x_1+3} > \frac{-11}{x_2+3} \quad \underset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 2 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \quad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3}$$

con lo que,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - \frac{11}{x_1+3} < 2 - \frac{11}{x_2+3},$$

es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) < h(x_2)\,,$$

por lo tanto, h es una función estrictamente creciente en todo su dominio. ★

Ejemplo 8.46 *: Sean f, g funciones con $\text{Dom } f$ y $\text{Dom } g$ respectivamente, tal que $f \circ g$ se puede realizar. Demuestre que si f es una función creciente y g es una función decreciente, entonces $f \circ g$ es una función decreciente.*

Solución : Si la función f es **creciente** en $\text{Dom } f$, entonces, para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) \leq f(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) \leq f(x_2)\,,} \qquad \longleftarrow \quad f \text{ mantiene desigualdades}$$

mientras que, si la función g es **decreciente** en $\text{Dom } g$, entonces, para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } g$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $g(x_1) \geq g(x_2)$, es decir,

$$\boxed{x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad g(x_1) \geq g(x_2)\,,} \qquad \longleftarrow \quad g \text{ cambia desigualdades}$$

Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$ y sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tales que $x_1 < x_2$, así,

$$x_1 < x_2 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Aplicamos } g \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}}{\Longrightarrow} g(x_1) \geq g(x_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\substack{\text{Aplicamos } f \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}}{\Longrightarrow} f(g(x_1)) \geq f(g(x_2)) \Longrightarrow (f \circ g)(x_1) \geq (f \circ g)(x_2),$$

es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) \geq h(x_2),$$

por lo tanto, $h = f \circ g$ es una función decreciente en todo su dominio. ★

Ejemplo 8.47 : *Demuestre que la función* $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ *no es una función inyectiva.*

Demostración : Es conocido que una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Observemos que si consideramos $x_1 = -1$ y $x_2 = 1$, tenemos que $x_1 \neq x_2$, pero

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 - (-1)}{(-1)^2 + 1} = \frac{-1+1}{1+1} = 0 \qquad \text{y} \qquad f(1) = \frac{(1)^3 - (1)}{(1)^2 + 1} = \frac{1-1}{1+1} = 0,$$

es decir,

$$-1 = x_1 \neq x_2 = 1, \qquad \text{pero} \qquad f(x_1) = 0 = f(x_2),$$

por lo tanto, f **no** es inyectiva. ★

Ejemplo 8.48 : *Considere la función* $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$. *Diga si la función* h *es una función inyectiva ó no.*

Solución : Es conocido que una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **inyectiva** en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

o equivalentemente,

$$\text{si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2.$$

Observemos que la función h se puede escribir como (ver ejemplo 8.45)

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}.$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$, tal que, $h(x_1) = h(x_2)$, como

$$h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_1+3} \qquad \text{y} \qquad h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_2+3},$$

entonces,

$$h(x_1) = h(x_2) \Longrightarrow 2 - \frac{11}{x_1+3} = 2 - \frac{11}{x_2+3} \overset{\substack{\boxed{\text{Restamos } 2} \\ \downarrow}}{\Longrightarrow} -\frac{11}{x_1+3} = -\frac{11}{x_2+3}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Multiplicamos por } -\frac{1}{11}}}}{\Longrightarrow} \frac{1}{x_1+3} = \frac{1}{x_2+3} \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)}}}}{\Longrightarrow} x_1 + 3 = x_2 + 3 \underset{\substack{\uparrow \\ \boxed{\text{Restamos } 3}}}{\Longrightarrow} x_1 = x_2.$$

Luego,

$$h(x_1) = h(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2,$$

por lo tanto, h es inyectiva. ★

Ejemplo 8.49 *: Demuestre que si la función f es estrictamente creciente en todo su dominio, entonces la función es inyectiva.*

Demostración : Una función $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es **estrictamente creciente** es un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$ si, para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, de aquí, ya que

$$x_1 < x_2, \qquad \text{se tiene} \qquad x_1 \neq x_2,$$

por otra parte, puesto que

$$f(x_1) < f(x_2), \qquad \text{se tiene} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

con lo que concluimos,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{implica que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2),$$

luego, f es inyectiva en todo su dominio. ★

Ejemplo 8.50 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = 2x + 1$.*

Solución : Por el método de igualación, tenemos que

$$3x^2 + 2x - 5 = 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 + 2x - 5 - 2x - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 - 2 = 0$$

por ser una ecuación de segundo grado usamos la resolvente para $a = 1$, $b = 0$ y $c = -2$, para obtener la solución de la misma,

$$x = \frac{-(0) \pm \sqrt{(0)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{2} = \pm\sqrt{2},$$

así, las soluciones de la ecuación $x^2 - 2 = 0$ son $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$.

Se tienen los valores de la variable x, para obtener los valores de la variable y sustituimos estos valores de x en una de las dos funciones, por ejemplo, en la función $y = 2x + 1$, entonces,

- Para $x = -\sqrt{2}$, se tiene que $y = -2\sqrt{2} + 1$.
- Para $x = \sqrt{2}$, se tiene que $y = 2\sqrt{2} + 1$.

Los puntos de intersección de las funciones son los pares ordenados

$$A\left(-\sqrt{2}, -2\sqrt{2} + 1\right) \qquad \text{y} \qquad B\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 1\right).$$

★

Ejemplo 8.51 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = \dfrac{1 - 2x}{2x - 5}$ y $g(x) = \dfrac{3x - 2}{x + 2}$.*

Solución : En primer lugar, observemos que los dominios naturales de las funciones son

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{2}\right\} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = \mathbb{R} - \{-2\},$$

por lo tanto, los valores $x = \dfrac{5}{2}$ y $x = -2$ no pueden ser puntos (coordenada de las abscisas) de los puntos de intersección, en caso de que existan.

Por el método de igualación, tenemos que

$$\frac{1-2x}{2x-5}=\frac{3x-2}{x+2} \quad \Longrightarrow \quad (1-2x)(x+2)=(3x-2)(2x-5)$$

$$\Longrightarrow \quad -2x^2-3x+2=6x^2-19x+10 \quad \Longrightarrow \quad 8x^2-16x+8=0$$

$$\Longrightarrow \quad 8\left(x^2-2x+1\right)=0 \quad \Longrightarrow \quad 8(x-1)^2=0,$$

de aquí,

$$(x-1)^2=0 \quad \Longrightarrow \quad x-1=0 \quad \Longrightarrow \quad x=1,$$

así, la solución de la ecuación $\dfrac{1-2x}{2x-5}=\dfrac{3x-2}{x+2}$ es $x=1$.

Se tienen el valor de la variable x, para obtener el valor de la variable y sustituimos este valor de x en una de las dos funciones, por ejemplo, en la función $g(x)=\dfrac{3x-2}{x+2}$, entonces,

$$y=\frac{3(1)-2}{(1)+2}=\frac{3-2}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

El punto de intersección de las funciones es el par ordenado $A\left(1,\dfrac{1}{3}\right)$. ★

Ejemplo 8.52 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones* $f(x)=3x^2+2x-5$ *y* $g(x)=x^3+2x-1$.

Solución : Por el método de igualación, tenemos que

$$3x^2+2x-5=x^3+2x-1 \quad \Longrightarrow \quad 0=x^3+2x-1-3x^2-2x+5 \quad \Longrightarrow \quad 0=x^3-3x^2+4,$$

debemos encontrar los valores x para los cuales el valor numérico del polinomio $p(x)=x^3-3x^2+4$ sea cero. Por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0=4$, son ± 1, ± 2 y ± 4.

- Para $x=-1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \ \checkmark$$

Por lo tanto, $x=-1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x)=x^3-3x^2+4=(x+1)\underbrace{\left(ax^2+bx+c\right)}_{\uparrow \ \boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & & -1 & 4 & -4 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = x^2 - 4x + 4$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 1$, $b = -4$ y $c = 4$,

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{4 \pm 0}{2} \implies \begin{cases} x = \dfrac{4+0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \\ \\ x = \dfrac{4-0}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene una raíz real, $x = 2$, de multiplicidad 2.

Luego, las soluciones de la ecuación $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ son $x = -1$ y $x = 2$.

Se tienen los valores de la variable x, para obtener los valores de la variable y sustituimos estos valores de x en una de las dos funciones, por ejemplo, en la función $y = 3x^2 + 2x - 5$, entonces,

- Para $x = -1$, se tiene que

$$y = 3(-1)^2 + 2(-1) - 5 \implies y = 3 - 2 - 5 \implies y = -4.$$

- Para $x = 2$, se tiene que

$$y = 3(2)^2 + 2(2) - 5 \implies y = 12 + 4 - 5 \implies y = 11.$$

Los puntos de intersección son los pares ordenados $A(-1,-4)$ y $B(2,11)$. ★

Ejemplo 8.53 *: Hallar los puntos de intersección entre las funciones*

$$f(x) = x^2 + 2x \qquad y \qquad g(x) = \frac{15 + 2x - 2x^2}{2x+3}.$$

Solución : En primer lugar, observemos que los dominios naturales de las funciones son

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \text{Dom } g = \mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\},$$

por lo tanto, el valor $x = -\dfrac{3}{2}$ no puede ser punto (coordenada de las abscisas) de los puntos de intersección, en caso de que existan.

Por el método de igualación, tenemos que

$$x^2 + 2x = \frac{15 + 2x - 2x^2}{2x+3} \implies \left(x^2 + 2x\right)(2x+3) = 15 + 2x - 2x^2$$

$$\implies 2x^3 + 7x^2 + 6x = 15 + 2x - 2x^2 \implies 2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = 0,$$

debemos encontrar los valores x para los cuales el valor numérico del polinomio $p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x - 15$ sea cero. Por ser un polinomio de grado 3 aplicamos el método de Ruffini para hallar las raíces

Los divisores del término independiente, $a_0 = -15$, son ± 1, ± 3, ± 5 y ± 15.

- Para $x = 1$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 9 & 4 & -15 \\ 1 & & 2 & 11 & 15 \\ \hline & 2 & 11 & 15 & 0 \end{array} \longleftarrow \boxed{\text{Igual a cero}} \quad \checkmark$$

Por lo tanto, $x = 1$ **si** es raíz del polinomio.

Así, el polinomio p se puede escribir como

$$p(x) = 2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = (x-1)\underbrace{\left(ax^2 + bx + c\right)}_{\boxed{\text{Polinomio de } 2^{\text{do}} \text{ grado}}},$$

donde, el polinomio de segundo grado tiene como coeficientes los valores obtenidos en el método de Ruffini cuando se halló la raíz, es decir,

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 9 & 4 & -15 \\ 1 & & 2 & 11 & 15 \\ \hline & 2 & 11 & 15 & 0 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ & \boxed{a} & \boxed{b} & \boxed{c} & \end{array}$$

Buscamos las raíces del polinomio $q(x) = 2x^2 + 11x + 15$, por ser un polinomio de grado 2 aplicamos la resolvente para $a = 2$, $b = 11$ y $c = 15$,

$$x = \frac{-(11) \pm \sqrt{(11)^2 - 4(2)(15)}}{2(2)} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 120}}{4} = \frac{-11 \pm \sqrt{1}}{4} \implies \begin{cases} x = \dfrac{-11+1}{4} = \dfrac{-10}{4} = -\dfrac{5}{2} \\[2ex] x = \dfrac{-11-1}{4} = \dfrac{-12}{4} = -3 \end{cases}$$

así, el polinomio q tiene como raíces son $x = -\dfrac{5}{2}$ y $x = -3$.

Luego, las soluciones de la ecuación $2x^3 + 9x^2 + 4x - 15 = 0$ son $x = 1$, $x = -\dfrac{5}{2}$ y $x = -3$.

Se tienen los valores de la variable x, para obtener los valores de la variable y sustituimos estos valores de x en una de las dos funciones, por ejemplo, en la función $f(x) = x^2 + 2x$, entonces,

- Para $x = 1$, se tiene que

$$y = (1)^2 + 2(1) \implies y = 1 + 2 \implies y = 3.$$

- Para $x = -\dfrac{5}{2}$, se tiene que

$$y = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right) \implies y = \frac{25}{4} - 5 \implies y = \frac{25-20}{4} \implies y = \frac{5}{4}.$$

- Para $x = -3$, se tiene que

$$y = (-3)^2 + 2(-3) \implies y = 9 - 6 \implies y = 3.$$

Los puntos de intersección son los pares ordenados $A(1,3)$, $B\left(-\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4}\right)$ y $C(-3,3)$. ★

Ejercicios

1. Sean las funciones $f(x) = 5$ y $g(x) = x$. Determinar

1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

2. Sean las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Determinar

   1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

3. Sean las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^2$. Determinar

   1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

4. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Determinar

   1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

5. Sean las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = x^3$. Determinar

   1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

6. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = 3$.
7. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = 3$ y $g(x) = -5$.
8. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = -2$ y $g(x) = x^2$.
9. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
10. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x}$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$.
11. Determinar $g \circ f$ y $f \circ g$, si es posible para las funciones $f(x) = [\![x]\!]$ y $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$.
12. Sean $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Hallar $f \circ f$, si es posible, y su dominio.
13. Sean $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Hallar $f \circ g$, si es posible, y su dominio.
14. Sean $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \sqrt[4]{x}$. Hallar $g \circ f$, si es posible, y su dominio.
15. Sean $f(x) = \sqrt[3]{x}$ y $g(x) = [\![x]\!]$. Hallar $g \circ f$, si es posible, y su dominio.
16. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2 - 6x + 9$. Hallar $g \circ f$, si es posible, y su dominio.
17. Sean las funciones $f(x) = x + 2$ y $g(x) = x^2 - 4$. Determinar

    1. $f + g$; **2.** fg; **3.** $\dfrac{f}{g}$; **4.** $\dfrac{g}{f}$; **5.** Dominio natural de cada una.

18. Para las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ y $g(x) = x - 3$. Determinar

    a. $f + g$; **b.** fg; **c.** f/g; **d.** g/f; **e.** Dominio natural de cada una.

19. Para las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

    Determinar

    a. $f + g$; **b.** fg; **c.** f/g; **d.** g/f; **e.** Dominio natural de cada una.

20. Para las funciones $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ y $g(x) = 8 - x^3$. Determinar

 a. $f + g$; **b.** fg; **c.** f/g; **d.** g/f; **e.** Dominio natural de cada una.

21. Para las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = 16 - x^4$. Determinar

 a. $f + g$; **b.** fg; **c.** f/g; **d.** g/f; **e.** Dominio natural de cada una.

22. Sea $f(x) = 4 - 5x$. Calcular: **a)** $f(-1)$; **b)** $-f(1)$; **c)** $3 - f(2/5)$; **d)** $\dfrac{1 - f(0)}{f(3/5) - 2}$;

23. Sea $f(x) = 2 - 3x^2$. Calcular: **a)** $f(2)$; **b)** $-f(3)$; **c)** $1 - f(3/5)$; **d)** $\dfrac{1 - f(-2)}{f(4/3)}$;

24. Sea $f(x) = x^2 + 4$. Calcular: **a)** $2f(1/2)$; **b)** $\dfrac{-f(1)}{2}$; **c)** $\dfrac{3 - f(-2)}{f(3/2)}$; **d)** $-5 + \dfrac{f(2)}{f(2/3)}$;

25. Sea $f(x) = x^3$. Calcular: **a)** $f(h+2)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$.

26. Sea $f(x) = x - x^2$. Calcular: **a)** $f(h-1)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

27. Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{3-x}}$. Calcular: **a)** $f(2+h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

28. Sea $f(x) = \dfrac{2-x}{x^2 + 3x - 1}$. Calcular: **a)** $f(3-z)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$.

29. Determinar **a)** $f(2-h)$; **b)** $f(x+h)$; **c)** $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, con $h \neq 0$;

 1. $f(x) = 2 - 3x^2$ 2. $f(x) = \dfrac{x}{2-x}$ 3. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

30. Si $f(x) = x^3$. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

31. Si $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$. Hallar $\dfrac{g(b) - g(a)}{b - a}$.

32. Dada la función $h(x) = x^3 - 2x - 5$. Hallar $\dfrac{h(b) - h(a)}{b - a}$.

33. Dada $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$. Hallar $\dfrac{f(b) - f(a)}{1 + f(a) f(b)}$.

34. Sea $f(t) = at^2 + bt + c$, verificar que $f(t+3) - 3f(t+2) + 3f(t+1) - f(t) = 0$.

35. Determinar el dominio de la función dada

1. $f(x) = \sqrt{x-2}$	2. $g(x) = \sqrt{3-x}$	3. $h(x) = \sqrt{-x}$	4. $f(x) = \sqrt{x^2+9}$
5. $h(x) = \sqrt{x^3-1}$	6. $f(t) = \sqrt[3]{t+4}$	7. $f(t) = \sqrt{2+t^2}$	8. $h(t) = \sqrt[4]{t^2-6t}$
9. $h(t) = \sqrt{t^8+t^2}$	10. $f(x) = \sqrt[4]{x^2+x}$	11. $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$	12. $f(x) = \sqrt{27-x^3}$
13. $f(x) = \dfrac{1}{3-x^2}$	14. $f(x) = \dfrac{2}{x^2+8}$	15. $h(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$	16. $f(x) = \dfrac{x}{x^3-8}$
17. $g(x) = \dfrac{1}{x^3-27}$	18. $h(x) = \dfrac{1}{x^4+27}$	19. $f(x) = \lvert 2x+5 \rvert$	20. $f(x) = \dfrac{1}{\lvert x-1 \rvert}$

21. $f(x)=\sqrt[3]{-x}$ 22. $h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$ 23. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{-x}}$ 24. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}}$

25. $g(t)=\sqrt{t^8-t^2}$ 26. $h(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^8-t^2}}$ 27. $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x}{x+5}}$ 28. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$

29. $f(z)=\sqrt[4]{1-\dfrac{2}{3}z}$ 30. $g(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x}{2+x}}$ 31. $g(x)=\sqrt[6]{x-x^2}$ 32. $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt[6]{x-x^2}}$

33. $h(x)=\sqrt{\dfrac{x^3-x}{16-x^2}}$ 34. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x}{x-1}}$ 35. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-7x}{x^2-5x+6}}$

36. $f(x)=\sqrt[8]{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3x-1}{x-6}}$ 37. $f(x)=\sqrt{\dfrac{|1-x|}{x^2-6x+5}}$ 38. $f(x)=\sqrt{\left|\dfrac{2-3x}{1+2x}\right|-4}$

39. $h(t)=\sqrt[3]{\dfrac{t^2+3t+4}{t^4-16}}$ 40. $g(x)=\sqrt{\dfrac{|9-x^2|+9}{|3x|}-1}$ 41. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{1-|x-1|}{x^2+3x+2}}$

42. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 43. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|3-x|}}$ 44. $y=\sqrt{x-x^3}$ 45. $f(t)=\sqrt{\dfrac{t}{|t^4-t^2|}}$

46. $h(x)=\sqrt{x^3-\dfrac{1}{|x|}}$ 47. $f(x)=\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x^2-9}}$ 48. $h(x)=\sqrt[8]{\dfrac{|x+2|-|x|}{x}}$

49. $f(x)=\sqrt[5]{\dfrac{7+|x^3-1|}{x^2+3x+2}}$ 50. $h(x)=\dfrac{|x|-1}{[\![x]\!]}$ 51. $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{[\![x]\!]}}$ 52. $g(x)=\dfrac{\sqrt{[\![x]\!]}}{x}$

53. $f(x)=\sqrt{1-[\![x]\!]}$ 54. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-[\![x]\!]}}$ 55. $f(x)=\sqrt{1-[\![\,|x|\,]\!]}$

56. $f(x)=\sqrt{|\,[\![2-x]\!]\,|+3}$ 57. $f(x)=\sqrt{3-[\![x^2-x+3]\!]}$ 58. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{[\![x]\!]^2-1}}$

59. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{[\![x^2-x+3]\!]-3}}$ 60. $f(x)=\sqrt{[\![x]\!]^2-2\,[\![x]\!]}$

36. Demuestre que si $m>0$, $b\in\mathbb{R}$, entonces $f(x)=mx+b$ es una función estrictamente creciente en todo su dominio.

37. Demuestre que si $m<0$, $b\in\mathbb{R}$, entonces $f(x)=mx+b$ es una función estrictamente decreciente en todo su dominio.

38. Si $-6\le x\le 3$, demuestre que $-1\le x^2-1\le 35$.

39. Si $1\le x\le 5$, demuestre que $2\le x^2+x\le 30$.

40. Si $0\le x\le 2$, demuestre que $-4\le \dfrac{x+2}{x-3}\le -\dfrac{2}{3}$.

41. Si $-2<x\le 0$, demuestre que $-\dfrac{1}{6}\le \dfrac{x+1}{4-x}\le \dfrac{1}{4}$.

42. Si $1\le x\le 5$, demuestre que $-1\le \dfrac{-2}{x^2+x}\le -\dfrac{1}{15}$.

43. Si $1<x<7$, demuestre que $\sqrt{3}<\sqrt{x+2}<3$.

44. Si $-4\le x<2$, demuestre que $1<\sqrt{3-x}<3$.

45. Si $1 \leq x \leq 5$, demuestre que $-1 \leq \dfrac{-2}{\sqrt{x^2+x}} \leq -\dfrac{\sqrt{30}}{15}$.

46. Si $-2 < x < 0$, demuestre que $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1-2x}{3+x} < 5$.

47. Si $-1 < x \leq 1$, demuestre que $-1 < \sqrt[3]{\dfrac{2x-1}{2-x}} \leq 1$.

48. Determinar el rango de la función $f(x) = mx + b$, donde $m < 0$ y b es cualquier número real.

49. Determinar el rango de la función $f(x) = mx + b$, donde $m > 0$ y b es cualquier número real.

50. Determinar la imagen de la función $h(x) = 5 - 3x$ si $x \in [-4, 2)$.

51. Determinar la imagen de la función $f(x) = \dfrac{x}{2} - 4$ si $x \in [-1, 3]$.

52. Determinar la imagen de la función $f(x) = x^2 - 2$ si $x \in (-1, 4]$.

53. Determinar la imagen de la función $f(x) = 3 - 2x^2$ si $x \in (-2, 1)$.

54. Determinar la imagen de la función $f(x) = x^2 + x$ si $x \in [1, 5]$.

55. Determinar la imagen de la función $g(x) = \sqrt{x^2+1}$ si $x \in (-3, 1)$.

56. Determinar la imagen de la función dada en el intervalo indicado

1. $\begin{cases} f(x) = 2x - 5, \\ -1 \leq x \leq 6 \end{cases}$
2. $\begin{cases} f(x) = \sqrt{4-3x} \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3, \\ -5 \leq x \leq 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} f(t) = \dfrac{-4}{t^3 + \sqrt{t}} \\ 1 < t \leq 4 \end{cases}$
5. $\begin{cases} f(x) = 2x + 7, \\ -1 \leq x \leq 6 \end{cases}$
6. $\begin{cases} f(x) = 3 - 5x, \\ -4 \leq x < 2 \end{cases}$
7. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{x-3}, \\ 4 < x < 9 \end{cases}$
8. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2 - \sqrt{4x}} \\ 0 \leq x < 4, \text{ con } x \neq 1 \end{cases}$
9. $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1, \\ -6 \leq x \leq 3 \end{cases}$
10. $\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - 1, \\ -3 < x \leq 3 \end{cases}$
11. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{5}{4 - x^2}, \\ -4 < x \leq -1, \text{ con } x \neq -2 \end{cases}$
12. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{-2}{x^2 + x}, \\ 1 < x < 5 \end{cases}$
13. $\begin{cases} f(t) = \sqrt[3]{t^2 - t} + t \\ -4 < t < -1 \end{cases}$
14. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{10 - x} \\ -2 \leq x \leq 2 \end{cases}$
15. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x} + x} \\ -27 < x < -8 \end{cases}$
16. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{5 - x^2}} \\ -2 \leq x < -1 \end{cases}$
17. $\begin{cases} f(t) = \left(3 - \sqrt{t-2}\right)^2 \\ 18 \leq t \leq 27 \end{cases}$
18. $\begin{cases} f(x) = \left(1 - \sqrt[3]{4 - x^2}\right)^4 \\ -2 \leq x < 1 \end{cases}$

57. Determinar el dominio y la imagen de la función dada

1. $y = 1 - \sqrt{-x}$
2. $y = \dfrac{-2}{x-3}$
3. $y = 3 - x^2$
4. $y = \sqrt{4 - x^2}$
5. $y = \dfrac{1}{x^2 + 9}$
6. $y = \dfrac{1}{x+4}$
7. $y = 1 - \sqrt{x}$
8. $y = \sqrt{2x - 5}$
9. $y = x^2 - 9$
10. $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

11. $y=\sqrt{6-x}$ 12. $y=\sqrt{9-x^2}$ 13. $y=\dfrac{1}{(x-3)^2}$ 14. $y=\dfrac{1}{3-2x}$ 15. $y=\dfrac{x}{x-9}$

16. $y=2-\sqrt{3x}$ 17. $y=\sqrt{9+4x}$ 18. $y=x^2-3x$ 19. $y=\sqrt{9x^2-4}$

20. $y=(2-\sqrt{x})^3$ 21. $y=\sqrt[4]{5-x^2}$ 22. $y=\dfrac{3-x}{x-1}$

58. Determinar el dominio y la imagen de la función a trozos dada

1. $f(x)=\begin{cases} -3 & \text{si} \quad x<0 \\ 2-x^2 & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases}$ 2. $f(x)=\begin{cases} 3 & \text{si} \quad x\leq -1 \\ 2-\sqrt{x+1} & \text{si} \quad x>-1 \end{cases}$

3. $g(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x\geq 3 \\ x^2-2x+2 & \text{si} \quad x<3. \end{cases}$ 4. $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x<-\dfrac{1}{2} \\ 1 & \text{si} \quad -\dfrac{1}{2}\leq x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x-3} & \text{si} \quad x<-2 \\ 2x-5 & \text{si} \quad -2<x\leq 3 \\ \sqrt{x+1} & \text{si} \quad x>3 \end{cases}$ 6. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+5} & \text{si} \quad x<-2 \\ \sqrt[3]{x-6}+1 & \text{si} \quad |x|<2 \\ -1 & \text{si} \quad x=2 \\ 5+2x & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$

59. Determinar: **a)** $f+g$; **b)** fg; **c)** f/g; **d)** Dominio natural de cada una

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$, $g(x)=\sqrt[4]{7-3x}$ 2. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}$, $g(x)=\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$, $g(x)=\dfrac{1}{2x+1}$ 4. $f(x)=\sqrt{-x}$, $g(x)=\sqrt{x+2}$

5. $f(x)=\sqrt{9-x^2}$, $g(x)=\sqrt{3-|x|}$ 6. $f(x)=\dfrac{1}{|x^2-4|}$, $g(x)=\sqrt{5-x}$

7. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$, $g(x)=\sqrt{4x-x^2}$ 8. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[4]{|x^3+8|}}$, $g(x)=\sqrt{7x-x^2}$

60. Determinar el dominio de la función

1. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}+4$ 2. $f(x)=x^2-|\sqrt{x}-2|$ 3. $f(x)=\sqrt{x-2}-\sqrt[4]{6x-x^2-8}$

4. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-5}}$ 5. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-5}{x}}$ 6. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}}$ 7. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{x}}$

8. $f(x)=\sqrt{x(x-5)}$ 9. $f(x)=\sqrt{x}\,\sqrt{x-5}$ 10. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x-5}$

11. $f(x)=\sqrt{25-|x|}-\sqrt{x}$ 12. $f(x)=\sqrt{\dfrac{25-x^2}{x}}$ 13. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{25-x^2}}$

14. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{25-x^2}}$ 15. $f(x)=\dfrac{\sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x}}$ 16. $h(t)=\sqrt{16-t^2}+\sqrt{t-2}$

17. $h(t)=\sqrt{(16-t^2)(t-2)}$ 18. $h(t)=\sqrt{16-t^2}\,\sqrt{t-2}$ 19. $h(t)=\sqrt{\dfrac{16-t^2}{t-2}}$

20. $h(t)=\dfrac{\sqrt{16-t^2}}{\sqrt{t-2}}$ 21. $f(x)=\dfrac{x-\sqrt{16-x^2}}{\left|\sqrt{x}-2\right|}$ 22. $f(x)=\dfrac{x^3\,\sqrt{2-x}}{2x^2-9x+4}$

23. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{-x}}{1-\sqrt{x}}$ 24. $g(t)=\sqrt{-t}-\sqrt{t^2-1}$ 25. $g(t)=\dfrac{\sqrt{-t}}{\sqrt{t^2-1}}$

26. $g(t)=\dfrac{\sqrt{t^2-1}}{\sqrt{-t}}$ 27. $g(t)=\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t}}$ 28. $f(x)=\sqrt{\dfrac{3x^2+6x+8}{x^2+2x+3}}$

29. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{x^2+2x+3}$ 30. $f(x)=\dfrac{\sqrt{3x^2+6x+8}}{\sqrt{x^2+2x+3}}$ 31. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x}$

32. $h(x)=\sqrt{\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1}}$ 33. $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, donde $f(x)=\sqrt{\dfrac{\left|2x^2-x-3\right|}{5x-1}}$

34. $g(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}}{x^2-2}$ 35. $g(x)=\dfrac{x^2-2}{\sqrt{4-x-\sqrt{3+x}}}$ 36. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x^2-9}}$

37. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-9}}$ 38. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$ 39. $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-2}}{\sqrt{4-x}-\sqrt{3+x}}$

40. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-9}}-\sqrt{\dfrac{2-x}{3-x}}+\dfrac{x}{x^2-16}$ 41. $f(x)=\sqrt{\left|x^2-3x-5\right|-\left|x^2+6\right|}$

42. $g(x)=(x+2)\sqrt{-x}$ 43. $g(t)=\dfrac{\sqrt{t}}{t-1-\sqrt{t-t^3}}$ 44. $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{x^2+1}{x}$

45. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-5}-\dfrac{x}{x+3}}$ 46. $f(x)=\dfrac{27-x^3}{\sqrt{\left|x^2+3x+2\right|}}$ 47. $h(x)=\dfrac{\sqrt[4]{8-x^3}}{\sqrt[3]{x}+2}$

48. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{\sqrt[4]{x}}{3-x}$ 49. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{x-x^3}}{\sqrt{x}}$ 50. $f(t)=\dfrac{8-t^3}{\sqrt{-t}+2}$

51. $f(x)=\dfrac{8-x^3}{\sqrt{-x}-2}$ 52. $h(x)=\sqrt{4-x^2}\,\sqrt{\dfrac{|x|}{3-x}}$ 53. $f(x)=\dfrac{3x^4-1}{\sqrt{1-\sqrt{x+3}}}$

54. $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{x}}{6-x^2}-\dfrac{6-x^2}{x}$ 55. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[4]{\dfrac{x-5}{x^2-x}}$ 56. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-3}}{x^2-\sqrt{x}}$

57. $h(x)=\dfrac{x^2-\sqrt[4]{x-4}+\pi}{\sqrt{16-x}}$ 58. $h(x)=\sqrt[3]{\dfrac{x^3}{x^2-1}}-\sqrt{\dfrac{x^3}{x^2-1}}-\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}\right)^5$

59. $f(x)=\sqrt{\dfrac{8-x^3}{\sqrt{-x}+2}}$ 60. $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$ 61. $f(x)=\dfrac{3-\sqrt[3]{\sqrt{x-2}-2}}{\sqrt{7-2x}}$

62. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$ 63. $f(x)=\sqrt[5]{4-\sqrt{x+1}}$ 64. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x+3}}$

65. $g(x)=\sqrt[5]{\dfrac{x-5}{x^2-x}}$ 66. $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt[4]{x^2-x}}\right)^{1/3}$ 67. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$

68. $h(x)=\sqrt{x^2+5x+6}+\dfrac{\sqrt[5]{x^4-1}}{x^2+x+1}$ 69. $f(x)=\sqrt{\sqrt{-x}+3}+\sqrt[3]{x}-\sqrt[7]{2x}-\dfrac{1}{x^4+4}$

70. $g(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-5x+6}-\sqrt{x^2-2x-3}}{x-\sqrt{x}}$ 71. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-9}{\sqrt[7]{x^3}-1}}-\sqrt{\left|\dfrac{x^2-9}{x^3-1}\right|}$

72. $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x^2-9|}}{\sqrt{|x^3-1|}}$ 73. $f(x)=\dfrac{1-3[\![x]\!]}{\sqrt{3-[\![1-x^2]\!]}}$ 74. $f(x)=\dfrac{[\![x]\!]-\sqrt{-x}}{[\![x^2-x]\!]}$

75. $f(x)=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{[\![x]\!]-1}$ 76. $f(x)=\dfrac{\left|x^2-\sqrt[5]{x+2}\right|}{\sqrt[3]{1-[\![x+3]\!]}}$ 77. $f(x)=\sqrt{|x|^2+|x|-2}$

78. $g(x)=\sqrt[4]{4-|2x+4|+|x-1|}$ 79. $f(x)=\dfrac{\sqrt{|x|^2+|x|-2}}{\operatorname{sgn}(x)-1}+\sqrt{4-\sqrt{4-x^2}}$

80. $g(x)=\dfrac{\sqrt{8-|2x+4|+|x-1|}}{\operatorname{sgn}(x)+1}+\dfrac{\sqrt{4x^2-1}}{[\![x]\!]-1}$

61. Determinar $f\circ g$ y su dominio

1. $\begin{cases} f(x)=x+3, & \text{si} \quad x\in[-1,1] \\ g(x)=x^2-1, & \text{si} \quad x\in[-5,5] \end{cases}$

2. $\begin{cases} f(x)=x^2, & \text{si} \quad x\in(-2,2) \\ g(x)=\sqrt{x^2+1}, & \text{si} \quad x\in(-3,1) \end{cases}$

3. $\begin{cases} f(x)=1/\sqrt{x}, & \text{si} \quad x\in(1,4] \\ g(x)=x^2-4x, & \text{si} \quad x\in[-2,1] \end{cases}$

4. $\begin{cases} f(x)=x^3, & \text{si} \quad x\in\mathbb{R} \\ g(x)=1/x, & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\{0\} \end{cases}$

5. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}, & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\{1\} \\ g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, & \text{si} \quad x\in\mathbb{R}-\{-1\} \end{cases}$

6. $\begin{cases} f(x)=x^2+2x, & \text{si} \quad x\in\mathbb{R} \\ g(x)=\sqrt{x}, & \text{si} \quad x\in[0,\infty) \end{cases}$

62. Determinar $f\circ g$ si $g(x)=(2-\sqrt{x})^3$ y $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-x}$.

63. Encuentre $h(x)=f(g(x))$, si es posible, y determine su dominio, donde

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{x-2} & \text{si} \quad x<-3 \\ \dfrac{3x^2-1}{x^4+5} & \text{si} \quad -3\leq x<1 \\ 2-5x & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x)=\begin{cases} 3-2x & \text{si} \quad x\geq 3 \\ x^2-2x+2 & \text{si} \quad x<3. \end{cases}$$

64. Dadas las funciones

$$F(x)=\sqrt{x-6}, \qquad G(x)=x^2+2 \qquad \text{y} \qquad H(x)=\sqrt{2x+1}.$$

Hallar $F(G(H(x)))$.

65. Si $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$, resolver la ecuación $|f(g(x))|=|g(f(x))|$.

66. Si $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$, $g(x)=\dfrac{x}{1+x}$, $h(x)=\dfrac{x-1}{x}$, $l(x)=3x^4-5x^2$ y $j(x)=x^2$. Hallar

1. $f\left(f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 2. $g\left(h\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$ 3. $l(-j(-x))$ 4. $f(g(l(x)))$ 5. $h(j(f(g(-2x))))$

67. Hallar las funciones que al componerlas se obtenga

1. $f(x)=\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}$ 2. $f(x)=2-\left(\sqrt{x-5}-2\right)^3$ 3. $f(x)=\sqrt{4-\sqrt{x+1}}$

4. $h(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x+3}}$ 5. $f(x) = \sqrt{1-\sqrt[3]{x}}$ 6. $g(x) = \left(x^2-5x+6\right)^6$

7. $f(x) = \sqrt[3]{3x^2+5}+3$ 8. $h(x) = 3 - \dfrac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5}$ 9. $g(x) = \sqrt{1-\sqrt[4]{x^2+3}}+8$

10. $g(x) = -\sqrt{\pi - \left(x^2-2x-3\right)^2}$

68. Sea $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$. Demuestre que $f(f(f(x))) = x$, siempre y cuando $x \neq \pm 1$.

69. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Demuestre que $f(f(x)) = x$.

70. Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$. Hallar: **a)** $f(g(x))$; **b)** $g(f(x))$; **c)** ¿Cuándo $f \circ g = g \circ f$?.

71. Sean $f(x+2) = \dfrac{2}{x-2}$ y $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Resolver $|f(g(x))| \leq x$.

72. Encuentre $h(x) = f(g(x))$, si es posible y determine su dominio, donde $g(x) = x^2 - 3x$ y

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \leq -2 \\ \sqrt{4-x^2} & \text{si} \quad |x| < 2 \\ 3 - x^3 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

73. Sean

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{|x|} & \text{si} \quad 0 < |x| \leq 1 \\ 5x & \text{si} \quad 1 < |x| \end{cases}$$

y $g(x) = |x| - 1$ si $|x| \leq 2$. Encuentre $f \circ g$, si es posible, y determine su dominio.

74. Dadas las funciones $g(x) = \sqrt{x+1}$ y

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ 2x^4 + 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$$

Hallar la expresión de $f(g(x))$.

75. Determinar el dominio de $h(x) = f(g(x))$, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 1 & \text{si} \quad x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & \text{si} \quad 2 < x \leq 3 \\ 2x - 5 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| \leq 1 \\ \sqrt{3-x} & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

76. Hallar $h(x) = f(g(x))$, si es posible, donde

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad \left|x^2-1\right| \leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x-1} & \text{si} \quad |x| < 1 \\ x^3 - 1 & \text{si} \quad |x| > 1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad |x| < 2 \\ 1 - 2x & \text{si} \quad |x| \geq 2 \end{cases}$$

y determinar su dominio.

77. Encuentre $h(x) = g(f(x))$, si es posible y determinar su dominio, donde $f(x) = \sqrt{-x}$ y

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{si} \quad x < -3 \\ \dfrac{x^2}{x-4} & \text{si} \quad -3 \leq x < 0. \end{cases}$$

78. Hallar $h(x) = f(g(x))$, si es posible, donde

$$f(x) = \begin{cases} [\![x]\!] & \text{si} \quad -1 \leq x < 3 \\ \sqrt{x^2 - 9} & \text{si} \quad |x| \geq 3 \\ [\![1-x]\!] & \text{si} \quad -3 < x < -1 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si} \quad -3 \leq x \leq 1 \\ 2x - 5 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y determinar su dominio.

79. Considere las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

80. Considere las funciones $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ y $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

81. Hallar las funciones que al componerlas se obtenga $h(x) = \left(\sqrt[3]{1-2x} + 4\right)^2$.

82. Sean $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2 - x^2$ y $h(x) = 2 - 3x$. Hallar $f \circ h \circ f \circ g$.

83. Considere las funciones $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Hallar $g \circ f \circ f$.

84. Considere las funciones $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Hallar $g \circ f \circ f$.

85. Determinar cuales de las siguientes funciones son pares, impares ó ninguna de ellas

1. $f(x) = 3$
2. $f(x) = 5x$
3. $f(x) = 2x - 1$
4. $f(x) = x^2 - x$
5. $f(x) = x^3 - x$
6. $f(x) = x^4 - x^2$
7. $f(x) = x^4 - x^2 + 3$
8. $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$
9. $g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x + \sqrt{x}}$
10. $f(x) = \sqrt{|3x| + 2x^2}$
11. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{x - x^2}$
12. $f(x) = \sqrt{x} - x\sqrt[4]{x}$
13. $f(x) = x^5 - 6x^9 + \dfrac{\sqrt[6]{|x|}}{(1+x^4)^4}$

86. Sea f una función cuyo dominio contiene a $-x$ siempre que contenga a x. Demuestre que

(a) $f(x) + f(-x)$ es una función par.

(b) $f(x) - f(-x)$ es una función impar.

(c) f puede escribirse como la suma de una función par y una función impar.

87. Sean f y g funciones par. Demuestre que

(a) $f + g$ es una función par. ¿Qué se puede afirmar de $f - g$?

(b) fg es una función par.

(c) $\dfrac{f}{g}$ es una función pares, siempre que $g(x) \neq 0$.

88. Sean f y g funciones impares. Demuestre que

(a) $f + g$ es una función impar. ¿Qué se puede afirmar de $f - g$?

(b) fg es una función par.

(c) $\dfrac{f}{g}$ es una función par, siempre que $g(x) \neq 0$.

89. Sean f una función par y g una función impar. ¿Qué se puede afirmar de $f+g$, $f-g$, fg y $\dfrac{f}{g}$?

90. Diga si la función $f(x) = \dfrac{x^3 - \sqrt[3]{x}}{2+|x|}$ es una función par, impar ó ninguna de las dos.

91. Diga si la función $f(x) = \dfrac{|x| - x^2 + 7}{\sqrt{9-x^2}}$ es una función par, impar ó ninguna de las dos.

92. Diga si la función $f(x) = \dfrac{|x| - x^2 + \sqrt[4]{x}}{\sqrt{25-x^2}}$ es una función par, impar ó ninguna de las dos.

93. Demuestre que si f es una función par y g es una función impar, entonces fg es una función impar.

94. Demuestre que si f y g son funciones impares, entonces $f+g$ es impar.

95. Una función es periódica de período 3 y $f(x) = 2-x$, si $0 \leq x < 3$. Calcule $f(22)$.

96. Sea $f(x) = \dfrac{1}{x}$ una función definida en $0 < x \leq 3$, periódica, de período 3. Hallar $f\left(\dfrac{19}{3}\right)$.

97. Sea $f(x) = |x| - 1$ una función definida en $-1 < x \leq 1$, periódica, de período 2. Hallar $f\left(\dfrac{15}{4}\right)$.

98. Sea $f(x) = \sqrt{x} + 2$ una función definida en $0 < x \leq 2$, periódica, de período 2. Hallar $f\left(\dfrac{11}{2}\right)$.

99. Una función es periódica de período 2 y $f(x) = 2+3x$, si $0 \leq x < 2$. Calcule $f\left(\dfrac{23}{2}\right)$.

100. Demuestre que una función f es inyectiva, si y solo si es estrictamente monótona, es decir, f es siempre creciente ó es siempre decreciente.

101. Diga en que intervalo las siguientes funciones son crecientes ó decrecientes

1. $f(x) = mx + b$ 2. $f(x) = x^2$ 3. $f(x) = x^3$ 4. $f(x) = x^4$ 5. $f(x) = \dfrac{1}{x}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ 7. $f(x) = \sqrt{x}$ 8. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ 9. $f(x) = \sqrt{x^3 - 2}$ 10. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+1}$

11. $g(x) = x^2 - 4x$ 12. $g(x) = \dfrac{8-3x}{x-2}$ 13. $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$ 14. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$

102. Demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2+1}$ no es una función inyectiva.

103. Usando el ejercicio 100, diga cuales de las funciones del ejercicio 101 es inyectiva.

104. Demuestre que si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ es una función creciente.

105. Demuestre que si f y g son funciones decrecientes, entonces $f \circ g$ es una función creciente.

106. Sean f, g funciones con $\operatorname{Dom} f$ y $\operatorname{Dom} g$ respectivamente. Demuestre que si f es una función creciente y g es una función decreciente, entonces $f \circ g$ es una función decreciente.

107. Sea $f : \operatorname{Dom} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función creciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente positiva.

108. Sea $f : \text{Dom } f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que la recta que pasa por dos puntos cualesquiera pertenecientes a la función tiene pendiente negativa.

109. Demuestre que si la función f es estrictamente creciente en todo su dominio, entonces la función es inyectiva.

110. Demuestre que si la función f es estrictamente decreciente en todo su dominio, entonces la función es inyectiva.

111. ¿Es la función $f(x) = x|x|$ inyectiva?

112. ¿Es la función $f(x) = x^2|x|$ inyectiva?

113. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = 2x + 1$.

114. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = \left|x - x^2\right|$ y $g(x) = 2x - 6$.

115. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = \dfrac{1-2x}{2x-5}$ y $g(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$.

116. Hallar los puntos de intersección entre las funciones $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$ y $g(x) = x^3 + 2x - 1$.

117. Hallar los puntos de intersección entre las funciones

$$f(x) = x^2 + 2x \qquad \text{y} \qquad g(x) = \frac{15 + 2x - 2x^2}{2x+3}.$$

Respuestas: Ejercicios

1.1. $(f+g)(x) = 5 + x$, $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R}$; 1.2. $(fg)(x) = 5x$, $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R}$; 1.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{5}{x}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$;

1.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x}{5}$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R}$; 2.1. $(f+g)(x) = x + \sqrt{x}$, $\text{Dom}(f+g) : [0, \infty)$;

2.2. $(fg)(x) = x^{3/2}$, $\text{Dom}(fg) : [0, \infty)$; 2.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{x}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : (0, \infty)$;

2.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : (0, \infty)$; 3.1. $(f+g)(x) = x + x^2$, $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R}$;

3.2. $(fg)(x) = x^3$, $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R}$; 3.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$; 3.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$;

4.1. $(f+g)(x) = \frac{1}{x} + \sqrt[3]{x}$, $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R} - \{0\}$; 4.2. $(fg)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R} - \{0\}$;

4.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x^{4/3}}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$; 4.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x^{4/3}$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$;

5.1. $(f+g)(x) = \frac{1}{x^2} + x^3$, $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R} - \{0\}$; 5.2. $(fg)(x) = x$, $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R} - \{0\}$;

5.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x^5}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$; 5.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x^5$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R} - \{0\}$; 6. $(g \circ f)(x) = 3$, $(f \circ g)(x) = 3$;

7. $(g \circ f)(x) = -5$, $(f \circ g)(x) = 3$; 8. $(g \circ f)(x) = 4$, $(f \circ g)(x) = -2$; 9. $(g \circ f)(x) = |x|$, $(f \circ g)(x) = x$;

10. $(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; 11. $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$, $(f \circ g)(x) = [\![\text{sgn}(x)]\!]$;

12. $(f \circ f)(x) = x$, $\text{Dom}(f \circ f) : \mathbb{R} - \{0\}$; 13. $(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$, $\text{Dom}(g \circ f) : [0, \infty)$;

14. No se puede realizar; 15. $(f \circ g)(x) = \sqrt[3]{[\![x]\!]}$, $\text{Dom}(f \circ g) : \mathbb{R}$; 16. $(g \circ f)(x) = x - 6\sqrt{x} + 9$, $\text{Dom}(g \circ f) : [0, \infty)$;

17.1. $(f+g)(x) = x^2 + x - 2$, $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R}$; 17.2. $(fg)(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$, $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R}$;

17.3. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{1}{x-2}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{\pm 2\}$; 17.4. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = x - 2$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R} - \{-2\}$;

18.*a*. $(f+g)(x) = \begin{cases} 2x - 6 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ 0 & \text{si} \quad x < 3, \end{cases}$ $\text{Dom}(f+g) : \mathbb{R}$; 18.*b*. $(fg)(x) = \begin{cases} (x-3)^2 & \text{si} \quad x \geq 3 \\ -(x-3)^2 & \text{si} \quad x < 3, \end{cases}$ $\text{Dom}(fg) : \mathbb{R}$;

18.*c*. $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ -1 & \text{si} \quad x < 3, \end{cases}$ $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} - \{3\}$; 18.*d*. $\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 3 \\ -1 & \text{si} \quad x < 3, \end{cases}$ $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right) : \mathbb{R} - \{3\}$;

19.a. $(f+g)(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ x^2+5 & \text{si} \quad 0<x\leq 2, \\ x+1 & \text{si} \quad x<2 \end{cases}$ $\text{Dom}\,(f+g):\mathbb{R}$; 19.$b$. $(fg)(x)=\begin{cases} x^4+3x^2 & \text{si} \quad x\leq 0 \\ 2x^2+6 & \text{si} \quad 0<x\leq 2, \\ 2x-2 & \text{si} \quad x<2 \end{cases}$ $\text{Dom}\,(fg):\mathbb{R}$;

19.c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\begin{cases} \frac{x^2+3}{x^2} & \text{si} \quad x<0 \\ \frac{x^2+3}{2} & \text{si} \quad 0<x\leq 2, \\ \frac{x-1}{2} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right):\mathbb{R}-\{0\}$; 19.$d$. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{x^2+3} & \text{si} \quad x\leq 0 \\ \frac{2}{x^2+3} & \text{si} \quad 0<x\leq 2, \\ \frac{2}{x-1} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$ $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right):\mathbb{R}$;

20.a. $(f+g)(x)=\sqrt{x^2-2x-3}+8-x^3$, $\text{Dom}\,(f+g):(-\infty,-1]\bigcup[3,\infty)$; 20.$b$. $(fg)(x)=\left(8-x^3\right)\sqrt{x^2-2x-3}$, $\text{Dom}\,(fg):(-\infty,-1]\bigcup[3,\infty)$; 20.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x-3}}{8-x^3}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right):(-\infty,-1]\bigcup[3,\infty)$; 20.$d$. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=\frac{8-x^3}{\sqrt{x^2-2x-3}}$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right):(-\infty,-1)\bigcup(3,\infty)$; 21.$a$. $(f+g)(x)=x^2-2x+16-x^4$, $\text{Dom}\,(f+g):\mathbb{R}$;

21.b. $(fg)(x)=16x^2-x^6-32x+2x^5$, $\text{Dom}\,(fg):\mathbb{R}$; 21.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{-x}{(2+x)\left(4+x^2\right)}$, $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right):\mathbb{R}-\{\pm 2\}$;

21.d. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)=-\frac{(2+x)\left(4+x^2\right)}{x}$, $\text{Dom}\left(\frac{g}{f}\right):\mathbb{R}-\{0,2\}$; 22.$a$. 9; 22.$b$. 1; 22.$c$. 1; 22.$d$. 3; 23.$a$. -10;

23.b. 25; 23.c. $\frac{2}{25}$; 23.d. $-\frac{33}{10}$; 24.a. $\frac{17}{2}$; 24.b. $-\frac{5}{2}$; 24.c. $-\frac{4}{5}$; 24.d. $-\frac{16}{5}$; 25.a. $(h+2)^3$;

25.b. $(x+h)^3$; 25.c. $3x^2+3hx+h^2$; 26.a. $(h-1)(h-2)$; 26.b. $(x+h)(x+h-1)$; 26.c. $1-2x-h$;

27.a. $\frac{2+h}{\sqrt{1-h}}$; 27.b. $\frac{x+h}{\sqrt{3-x-h}}$; 27.c. $\frac{1}{\sqrt{3-x-h}}+\frac{x}{\left(\sqrt{3-x}+\sqrt{3-x-h}\right)\sqrt{3-x-h}\sqrt{3-x}}$; 28.$a$. $\frac{z-1}{z^2-9z+17}$;

28.b. $\frac{2-x-h}{(x+h)^2+3(x+h)-1}$; 28.$c$. $\frac{x^2+hx-4x-5-2h}{\left((x+h)^2+3(x+h)-1\right)\left(x^2+3x-1\right)}$; 29.1.$a$. $-3h^2+12h-10$; 29.1.b. $2-3h^2-3x^2-6hx$;

29.1.c. $-3(h+2x)$; 29.2.a. $\frac{2-h}{h}$; 29.2.b. $\frac{x-h}{2-x+h}$; 29.2.c. $\frac{-2}{(2-x+h)(2-x)}$; 29.3.a. $\frac{2-h}{\sqrt{5-4h+h^2}}$;

29.3.b. $\frac{x+h}{\sqrt{1+(x+h)^2}}$; 29.3.$c$. $\frac{1}{\sqrt{1+(x+h)^2}}-\frac{(2x+h)x}{\left(\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1+(x+h)^2}\right)\sqrt{1+(x+h)^2}\sqrt{1+x^2}}$; 29.4.$a$. $\frac{1}{\sqrt{1-2h}}$; 29.4.b. $\frac{1}{\sqrt{2x+2h-3}}$;

29.4.c. $\frac{-2}{\sqrt{2x+2h-3}\sqrt{2x-3}\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{2x+2h-3}\right)}$; 30. b^2+ab+a^2; 31. $1-\frac{1}{ab}$; 32. a^2+ab+b^2-2;

33. $\frac{b-a}{ab+1}$; 35.1. $\text{Dom}\ f:[2,\infty)$; 35.2. $\text{Dom}\ g:(-\infty,3]$; 35.3. $\text{Dom}\ h:(-\infty,0]$; 35.4. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$;

35.5. $\text{Dom}\ h:[1,\infty)$; 35.6. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.7. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.8. $\text{Dom}\ h:(-\infty,0]\bigcup[6,\infty)$; 35.9. $\text{Dom}\ h:\mathbb{R}$;

35.10. $\text{Dom}\ f:(-\infty,-1]\bigcup[0,\infty)$; 35.11. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.12. $\text{Dom}\ f:(-\infty,3]$; 35.13. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{3}\right\}$;

35.14. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.15. $\text{Dom}\ h:\mathbb{R}$; 35.16. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{2\}$; 35.17. $\text{Dom}\ g:\mathbb{R}-\{3\}$; 35.18. $\text{Dom}\ h:\mathbb{R}$;

35.19. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.20. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{1\}$; 35.21. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$; 35.22. $\text{Dom}\ h:(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$;

35.23. $\text{Dom}\ g:(-\infty,0)$; 35.24. $\text{Dom}\ g:(-1,1)$; 35.25. $\text{Dom}\ g:(-\infty,-1]\bigcup[1,\infty)\bigcup\{0\}$;

35.26. $\text{Dom}\ h:(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$; 35.27. $\text{Dom}\ f:(-\infty,-5)\bigcup[0,\infty)$; 35.28. $\text{Dom}\ f:(-\infty,-2]\bigcup(3,\infty)$;

35.29. $\text{Dom}\ f:\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$; 35.30. $\text{Dom}\ g:(-\infty,-2)\bigcup[0,\infty)$; 35.31. $\text{Dom}\ g:[0,1]$; 35.32. $\text{Dom}\ h:(0,1)$;

35.33. $\text{Dom}\ h:(-\infty,-4)\bigcup[-1,0]\bigcup[1,4)$; 35.34. $\text{Dom}\ f:[0,1)\bigcup[2,\infty)$; 35.35. $\text{Dom}\ f:(-\infty,0]\bigcup(2,3)\bigcup[7,\infty)$;

35.36. $\text{Dom}\ f:\left[-\frac{4}{5},6\right)$; 35.37. $\text{Dom}\ f:(-\infty,1)\bigcup(5,\infty)$; 35.38. $\text{Dom}\ f:\left[-\frac{6}{5},-\frac{2}{11}\right]-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; 35.39. $\text{Dom}\ h:\mathbb{R}-\{\pm 2\}$;

35.40. $\text{Dom}\ g:\mathbb{R}-\{0\}$; 35.41. $\text{Dom}\ f:(-2,-1)\bigcup[0,2]$; 35.42. $\text{Dom}\ g:\mathbb{R}-\{0\}$; 35.43. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{3\}$;

35.44. $\text{Dom}\ g:(-\infty,-1]\bigcup[0,1]$; 35.45. $\text{Dom}\ f:(0,\infty)-\{1\}$; 35.46. $\text{Dom}\ h:[1,\infty)$; 35.47. $\text{Dom}\ f:(-3,-1]\bigcup(3,\infty)$;

35.48. $\text{Dom}\ h:(-\infty,-1]\bigcup(0,\infty)$; 35.49. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{-2,-1\}$; 35.50. $\text{Dom}\ h:\mathbb{R}-[0,1)$; 35.51. $\text{Dom}\ f:[1,\infty)$;

35.52. $\text{Dom}\ g:(0,\infty)$; 35.53. $\text{Dom}\ f:(-\infty,2)$; 35.54. $\text{Dom}\ f:(-\infty,1)$; 35.55. $\text{Dom}\ f:(-2,2)$; 35.56. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$;

35.57. $\text{Dom}\ f:\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right]\bigcup\left[1,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$; 35.58. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-[0,1)$; 35.59. $\text{Dom}\ f:\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\bigcup(0,1)\bigcup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$;

35.60. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-[1,2)$; 48. $\text{Rgo}\ f:\mathbb{R}$; 49. $\text{Rgo}\ f:\mathbb{R}$; 50. $\text{Rgo}\ h:(-1,17]$; 51. $\text{Rgo}\ f:\left[-\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right]$;

52. $\text{Rgo}\ f:[-2,14]$; 53. $\text{Rgo}\ f:(-5,3]$; 54. $\text{Rgo}\ f:[2,30]$; 55. $\text{Rgo}\ g:\left[1,\sqrt{10}\right)$; 56.1. $\text{Rgo}\ f:[-7,7]$;

56.2. $\text{Rgo}\ f:\left(1,\sqrt{10}\right]$; 56.3. $\text{Rgo}\ f:[-3,47]$; 56.4. $\text{Rgo}\ f:\left(-2,-\frac{2}{33}\right]$; 56.5. $\text{Rgo}\ f:[5,19]$; 56.6. $\text{Rgo}\ f:(-7,23]$;

56.7. $\text{Rgo}\ f:\left(\frac{1}{3},2\right)$; 56.8. $\text{Rgo}\ f:\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\bigcup\left[\frac{1}{2},\infty\right)$; 56.9. $\text{Rgo}\ f:[-1,35]$; 56.10. $\text{Rgo}\ f:\left(-\frac{13}{4},17\right]$;

56.11. $\text{Rgo}\ f:\left(-\infty,-\frac{5}{12}\right)\bigcup\left[\frac{5}{3},\infty\right)$; 56.12. $\text{Rgo}\ f:\left(-1,-\frac{1}{25}\right)$; 56.13. $\text{Rgo}\ f:\left(\sqrt[3]{2}-4,\sqrt[3]{20}-1\right)$; 56.14. $\text{Rgo}\ f:\left[\frac{1}{6},\frac{1}{4}\right]$;

56.15. $\text{Rgo}\ f:\left(\frac{3}{10},\frac{14}{5}\right)$; 56.16. $\text{Rgo}\ f:\left(\frac{3}{2},3\right]$; 56.17. $\text{Rgo}\ f:[1,4]$; 56.18. $\text{Rgo}\ f:[0,1]$;

57.1. $\text{Dom}\ f:(-\infty,0]$, $\text{Rgo}\ f:(-\infty,1]$; 57.2. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{3\}$, $\text{Rgo}\ f:\mathbb{R}-\{0\}$; 57.3. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$, $\text{Rgo}\ f:(-\infty,3]$;

57.4. $\text{Dom}\ f:[-2,2]$, $\text{Rgo}\ f:[0,2]$; 57.5. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$, $\text{Rgo}\ f:\left(0,\frac{1}{9}\right]$; 57.6. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}-\{-4\}$, $\text{Rgo}\ f:\mathbb{R}-\{0\}$;

57.7. $\text{Dom}\ f:[0,\infty)$, $\text{Rgo}\ f:(-\infty,1]$; 57.8. $\text{Dom}\ f:\left[\frac{5}{2},\infty\right)$, $\text{Rgo}\ f:[0,\infty)$; 57.9. $\text{Dom}\ f:\mathbb{R}$, $\text{Rgo}\ f:[-9,\infty)$;

57.10. Dom $f:\mathbb{R}-\{\pm3\}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{0\}$; 57.11. Dom $f:(-\infty,6]$, Rgo $f:[0,\infty)$; 57.12. Dom $f:[-3,3]$, Rgo $f:[0,3]$; 57.13. Dom $f:\mathbb{R}-\{3\}$, Rgo $f:(0,\infty)$; 57.14. Dom $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{3}{2}\right\}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{0\}$; 57.15. Dom $f:\mathbb{R}-\{9\}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{1\}$; 57.16. Dom $f:[0,\infty)$, Rgo $f:(-\infty,2]$; 57.17. Dom $f:\left[-\frac{9}{4},\infty\right)$, Rgo $f:[0,\infty)$; 57.18. Dom $f:\mathbb{R}$, Rgo $f:\left[-\frac{9}{4},\infty\right)$; 57.19. Dom $f:\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right]\bigcup\left[\frac{2}{3},\infty\right)$, Rgo $f:[0,\infty)$; 57.20. Dom $f:[0,\infty)$, Rgo $f:(-\infty,8]$; 57.21. Dom $f:\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$, Rgo $f:\left[0,\sqrt[4]{5}\right]$; 57.22. Dom $f:\mathbb{R}-\{1\}$, Rgo $f:\mathbb{R}-\{-1\}$; 58.1. Dom $f:\mathbb{R}$, Rgo $f:(-\infty,2]$; 58.2. Dom $f:\mathbb{R}$, Rgo $f:(-\infty,2]\bigcup\{3\}$; 58.3. Dom $f:\mathbb{R}$, Rgo $f:(-\infty,-3]\bigcup[1,\infty)$; 58.4. Dom $f:\mathbb{R}$, Rgo $f:\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right)\bigcup(0,1]$; 58.5. Dom $f:\mathbb{R}-\{-2\}$, Rgo $f:(-9,1]\bigcup\left(\frac{3}{5},\infty\right)$; 58.6. Dom $f:\mathbb{R}-\{-2\}$, Rgo $f:\left[-1,1-\sqrt[3]{4}\right)\bigcup(9,\infty)$;

59.1.a. $(f+g)(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}+\sqrt[4]{7-3x}$, Dom $(f+g):(-\infty,-3)\bigcup\left[2,\frac{7}{2}\right]$; 59.1.$b$. $(fg)(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}\sqrt[4]{7-3x}$, Dom $(fg):(-\infty,-3)\bigcup\left[2,\frac{7}{2}\right]$; 59.1.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{7-3x}}\sqrt{\frac{x-2}{x+3}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(-\infty,-3)\bigcup\left[2,\frac{7}{2}\right)$;

59.2.a. $(f+g)(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}+\sqrt{\frac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$, Dom $(f+g):(-\infty,-2]\bigcup[0,\infty)-\{2,\pm4\}$; 59.2.$b$. $(fg)(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}\sqrt{\frac{x^2+2x}{|x^3-8|}}$, Dom $(fg):(-\infty,-2]\bigcup[0,\infty)-\{2,\pm4\}$; 59.2.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{16-x^2}}\sqrt{\frac{|x^3-8|}{x^2+2x}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(-\infty,-2)\bigcup(0,\infty)-\{2,\pm4\}$;

59.3.a. $(f+g)(x)=\frac{3x}{2x^2-x-1}$, Dom $(f+g):\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; 59.3.$b$. $(fg)(x)=\frac{1}{2x^2-x-1}$, Dom $(fg):\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; 59.3.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{2x+1}{x-1}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$; 59.4.$a$. $(f+g)(x)=\sqrt{-x}+\sqrt{x+2}$, Dom $(f+g):[-2,0]$; 59.4.b. $(fg)(x)=\sqrt{-x^2-2x}$, Dom $(fg):[-2,0]$; 59.4.c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{\frac{-x}{x+2}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(-2,0]$;

59.5.a. $(f+g)(x)=\sqrt{9-x^2}+\sqrt{3-|x|}$, Dom $(f+g):[-3,3]$; 59.5.b. $(fg)(x)=\sqrt{(9-x^2)(3-|x|)}$, Dom $(fg):[-3,3]$; 59.5.c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\sqrt{\frac{9-x^2}{3-|x|}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(-3,3)$; 59.6.$a$. $(f+g)(x)=\frac{1}{|x^2-4|}+\sqrt{5-x}$, Dom $(f+g):(-\infty,5]-\{\pm2\}$; 59.6.$b$. $(fg)(x)=\frac{\sqrt{5-x}}{|x^2-4|}$, Dom $(fg):(-\infty,5]-\{\pm2\}$; 59.6.$c$. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{|x^2-4|\sqrt{5-x}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(-\infty,5)-\{\pm2\}$;

59.7.a. $(f+g)(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|}}+\sqrt{4x-x^2}$, Dom $(f+g):(0,4]$; 59.7.b. $(fg)(x)=\sqrt{\frac{4x-x^2}{|x|}}$, Dom $(fg):(0,4]$; 59.7.c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt{(4x-x^2)|x|}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(0,4)$; 59.8.$a$. $(f+g)(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{|x^3+8|}}+\sqrt{7x-x^2}$, Dom $(f+g):[0,7]-\{-2\}$; 59.8.b. $(fg)(x)=\frac{\sqrt{7x-x^2}}{\sqrt[4]{|x^3+8|}}$, Dom $(fg):[0,7]-\{-2\}$; 59.8.c. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{|x^3+8|}\sqrt{7x-x^2}}$, Dom $\left(\frac{f}{g}\right):(0,7)-\{-2\}$;

60.1. Dom $f:(0,\infty)$; 60.2. Dom $f:[0,\infty)$; 60.3. Dom $f:[2,4]$; 60.4. Dom $f:(-\infty,0]\bigcup(5,\infty)$; 60.5. Dom $f:(-\infty,0)\bigcup[5,\infty)$; 60.6. Dom $f:(5,\infty)$; 60.7. Dom $f:[5,\infty)$; 60.8. Dom $f:(-\infty,0]\bigcup[5,\infty)$; 60.9. Dom $f:[5,\infty)$; 60.10. Dom $f:[5,\infty)$; 60.11. Dom $f:[0,25]$; 60.12. Dom $f:(-\infty,-5]\bigcup(0,5]$; 60.13. Dom $f:(-\infty,-5)\bigcup[0,5)$; 60.14. Dom $f:[0,5)$; 60.15. Dom $f:(0,5]$; 60.16. Dom $h:[2,4]$; 60.17. Dom $h:(-\infty,-4]\bigcup[2,4]$; 60.18. Dom $h:[2,4]$; 60.19. Dom $h:(-\infty,-4]\bigcup(2,4]$; 60.20. Dom $h:(2,4]$; 60.21. Dom $f:[0,4)$; 60.22. Dom $f:(-\infty,2]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 60.23. Dom $f:[0,\infty)-\{1\}$; 60.24. Dom $g:(-\infty,-1]$; 60.25. Dom $g:(-\infty,-1)$; 60.26. Dom $g:(-\infty,-1]$; 60.27. Dom $g:(-\infty,-1]\bigcup(0,1]$; 60.28. Dom $f:\mathbb{R}$; 60.29. Dom $f:\mathbb{R}$; 60.30. Dom $f:\mathbb{R}$; 60.31. Dom $g:(-\infty,-1]\bigcup(0,\infty)$; 60.32. Dom $h:\left(\frac{1}{5},\infty\right)\bigcup\{-1\}$; 60.33. Dom $g:\left(\frac{1}{5},\infty\right)-\left\{\frac{3}{2}\right\}$; 60.34. Dom $g:[-3,4]-\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$; 60.35. Dom $g:[-3,4]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 60.36. Dom $f:(-3,1]\bigcup(3,\infty)$; 60.37. Dom $f:[3,\infty)$; 60.38. Dom $f:[-3,4]-\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$; 60.39. Dom $g:[-3,4]-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 60.40. Dom $f:(3,\infty)-\{4\}$; 60.41. Dom $f:\left(-\infty,-\frac{11}{3}\right]\bigcup\left[\frac{1}{2},1\right]$; 60.42. Dom $g:(-\infty,0]$; 60.43. Dom $g:[0,1)$; 60.44. Dom $f:\mathbb{R}-\{0\}$; 60.45. Dom $f:\left(-3,-\frac{3}{5}\right]\bigcup(5,\infty)$; 60.46. Dom $f:\mathbb{R}-\{-2,-1\}$; 60.47. Dom $h:(-\infty,2]-\{-8\}$; 60.48. Dom $f:[0,\infty)-\{1,3\}$; 60.49. Dom $f:(0,1]$; 60.50. Dom $f:(-\infty,0]$; 60.51. Dom $f:(-\infty,0]-\{-4\}$; 60.52. Dom $h:[-2,2]$; 60.53. Dom $f:[-3,-2)$; 60.54. Dom $f:(0,\infty)-\left\{\sqrt{6}\right\}$; 60.55. Dom $f:(0,1)\bigcup[5,\infty)$; 60.56. Dom $f:(0,\infty)-\{1\}$; 60.57. Dom $h:[4,16)$; 60.58. Dom $h:(-1,0]\bigcup(1,\infty)$; 60.59. Dom $f:(-\infty,0]\bigcup\{2\}$; 60.60. Dom $f:[0,\infty)$; 60.61. Dom $f:\left[2,\frac{7}{2}\right)$; 60.62. Dom $f:[-1,15]$; 60.63. Dom $f:[-1,\infty)$; 60.64. Dom $f:[-3,-2]$; 60.65. Dom $g:\mathbb{R}-\{0,1\}$; 60.66. Dom $f:(-\infty,0)\bigcup(1,2]$; 60.67. Dom $f:[-1,1]$; 60.68. Dom $h:(-\infty,-3]\bigcup[-2,\infty)$; 60.69. Dom $f:(-\infty,0]$; 60.70. Dom $g:[3,\infty)$; 60.71. Dom $f:[-3,1)\bigcup[3,\infty)$; 60.72. Dom $f:\mathbb{R}-\{1\}$; 60.73. Dom $f:\mathbb{R}$; 60.74. Dom $f:\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]$; 60.75. Dom $f:[2,\infty)$; 60.76. Dom $f:\mathbb{R}-[-2,-1)$; 60.77. Dom $f:(-\infty,-1]\bigcup[1,\infty)$; 60.78. Dom $g:\left[-9,\frac{1}{3}\right]$; 60.79. Dom $f:[-2,-1]$;

60.80. Dom $g : [2,3]$; 61.1. $f(g(x)) = x^2 + 2$, Dom $f \circ g : \left[0, \sqrt{2}\right]$; 61.2. $f(g(x)) = x^2 + 1$, Dom $f \circ g : \left[0, \sqrt{3}\right]$;

61.3. $f(g(x)) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$, Dom $f \circ g : (-\infty, 0) \bigcup (4, \infty)$; 61.4. $f(g(x)) = \frac{1}{x^3}$, Dom $f \circ g : \mathbb{R} - \{0\}$;

61.5. $f(g(x)) = -\frac{x+1}{2}$, Dom $f \circ g : \mathbb{R} - \{-1\}$; 61.6. $f(g(x)) = x + 2\sqrt{x}$, Dom $f \circ g : (0, \infty)$;

62. $f(g(x)) = \frac{3\left(2-\sqrt{x}\right)^3 - 1}{2 - \left(2-\sqrt{x}\right)^3}$; 63. $h(x) = \begin{cases} \frac{3-2x}{1-2x} & \text{si } x > 3 \\ \frac{13}{43} & \text{si } x = 3, \\ -5x^2 + 10x - 8 & \text{si } x < 3 \end{cases}$ Dom $h : \mathbb{R}$; 64. $F(G(H(x))) = \sqrt{2x-3}$;

65. $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; 66.1. $f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{x}$; 66.2. $g\left(h\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x-1}{x-2}$;

66.3. $l(-j(-x)) = 3x^8 - 5x^4$; 66.4. $f(g(l(x))) = \frac{1}{6x^4 - 10x^2 + 1}$; 66.5. $h(j(f(g(-2x)))) = -8x(2x-1)$;

67.1. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.2. $f_1(x) = x - 5$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = x - 2$, $f_4(x) = x^3$, $f_5(x) = 2 - x$, $f(x) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.3. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = 4 - x$, $f_4(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.4. $f_1(x) = x + 3$, $f_2(x) = \sqrt{x}$, $f_3(x) = 1 - x$, , $f_4(x) = \frac{1}{x}$ $h(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.5. $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_2(x) = 1 - x$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = (f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

67.6. $f_1(x) = x - \frac{5}{2}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x - \frac{1}{4}$, $f_4(x) = x^6$, $g(x) = (f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.7. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = 3x$, $f_3(x) = x + 5$, $f_4(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_5(x) = x + 3$, $f(x) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.8. $f_1(x) = \sqrt{x}$, $f_2(x) = x + 5$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = 8x$, $f_5(x) = 4 - x$, $h(x) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.9. $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 3$, $f_3(x) = \sqrt[4]{x}$, $f_4(x) = 1 - x$, $f_5(x) = \sqrt{x}$, $f_6(x) = x + 8$, $g(x) = (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$; 67.10. $f_1(x) = x - 1$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x - 4$, $f_4(x) = \pi - x$, $f_5(x) = \sqrt{x}$, $f_6(x) = -x$, $g(x) = (f_6 \circ f_5 \circ f_4 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

70.a. $f(g(x)) = |x|$; 70.b. $g(f(x)) = x$; 70.c. $x \in [0, \infty)$; 71. $\left[\frac{\sqrt{33}-3}{6}, \infty\right)$;

72. $h(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ \sqrt{4 - (x^2-3x)^2} & \text{si } \frac{3-\sqrt{17}}{2} < x < 1 \text{ ó } 2 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}, \\ 3 - \left(x^2 - 3x\right)^3 & \text{si } x < \frac{3-\sqrt{17}}{2} \text{ ó } x > \frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$ Dom $h = \mathbb{R} - \left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$;

73. $(f \circ g)(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si } x = \pm 1 \\ \frac{\sqrt{2|x| - x^2}}{||x|-1|} & \text{si } x \in [-2,2] - \{\pm 1\}, \\ 5|x| - 5 & \text{si } (-\infty, -2) \bigcup (2, \infty) \end{cases}$ Dom $f \circ g = \mathbb{R}$; 74. $f(g(x)) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 2\sqrt{x+1} + 1 & \text{si } x \in (0, \infty); \end{cases}$

75. $h(x) = \begin{cases} 2x^6 + 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 2\left(\sqrt{3-x}\right)^3 + 1 & \text{si } x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{3-x}-2} & \text{si } -6 \leq x < -1, \\ 2\sqrt{3-x} - 5 & \text{si } x < -6 \end{cases}$ Dom $h = \mathbb{R}$; 76. $h(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{x^4+1}{x^2-1} & \text{si } |x| < 1 \\ x^6 - 1 & \text{si } x \in (-2,-1) \bigcup (1, 2), \\ (1-2x)^3 - 1 & \text{si } |x| \geq 2 \end{cases}$

Dom $h = \mathbb{R} - \{-1\}$; 77. **NO** se puede realizar; 78. $h(x) = \begin{cases} \llbracket 3 - x \rrbracket & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } x = -3 \\ \sqrt{(3-x)^2 - 9} & \text{si } -3 \leq x \leq 0 \\ \sqrt{(2x-5)^2 - 9} & \text{si } x \in (-\infty, -3) \bigcup (1, \infty), \end{cases}$

Dom $h = \mathbb{R}$; 79. $(f \circ g)(x) = x$ y $(g \circ f)(x) = x$; 80. $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x}$ y $(g \circ f)(x) = \frac{1}{|x|}$;

81. $f_1(x) = 2x$, $f_2(x) = 1 - x$, $f_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_4(x) = x + 4$, $f_5(x) = x^2$, $h(x) = (f_5 \circ f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1)(x)$;

82. $(f \circ h \circ f \circ g)(x) = \sqrt{2 - 3\sqrt{2 - x^2}}$; 83. $(g \circ f \circ f)(x) = \frac{4x + 2x^2 - 4x^3 + x^4}{4x + 2x^2 - 4x^3 + x^4 - 1}$;

84. $(g \circ f \circ f)(x) = \frac{x^4 - 4x^2 + 2}{20x^4 - 16x^2 - 8x^6 + x^8 + 3}$; 85.1. Par; 85.2. Impar; 85.3. Ninguna; 85.4. Ninguna;

85.5. Impar; 85.6. Par; 85.7. Par; 85.8. Impar; 85.9. Ninguna; 85.10. Par; 85.11. Ninguna;

85.12. Ninguna; 85.13. Ninguna; 90. Impar; 91. Par; 92. Ninguna; 95. 1; 96. 3;

97. $-\frac{3}{4}$; 98. $\sqrt{\frac{3}{2}} + 2$; 99. $\frac{13}{2}$; 101.1. Creciente : $\mathbb{R}$ si $m > 0$, Decreciente : $\mathbb{R}$ si $m < 0$;

101.2. Creciente : $(0, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 0)$; 101.3. Creciente : $\mathbb{R}$; 101.4. Creciente : $(0, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 0)$;

101.5. Decreciente : $\mathbb{R} - \{0\}$; 101.6. Creciente : $(-\infty, 0)$, Decreciente : $(0, \infty)$; 101.7. Creciente : $(0, \infty)$;

101.8. Creciente : $\mathbb{R}$; 101.9. Creciente : $\mathbb{R}$; 101.10. Creciente : $(-\infty, 0)$, Decreciente : $(0, \infty)$;

101.11. Creciente : $(2, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 2)$; 101.12. Decreciente : $\mathbb{R} - \{2\}$; 101.13. Creciente : $\mathbb{R} - \{-3\}$;

101.14. Creciente : $(1, \infty)$, Decreciente : $(-\infty, 1)$; 103.1. Inyectiva; 103.2. No inyectiva; 103.3. Inyectiva; 103.4. No inyectiva; 103.5. Inyectiva; 103.6. No inyectiva; 103.7. Inyectiva; 103.8. Inyectiva; 103.9. Inyectiva; 103.10. No inyectiva; 103.11. No inyectiva; 103.12. Inyectiva; 103.13. Inyectiva; 103.14. No inyectiva; 111. Si; 112. No; 113. $\left(-\sqrt{2}, 1-2\sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}+1\right)$; 114. $(-3, -12)$ y $(2, -2)$; 115. $\left(1, \frac{1}{3}\right)$; 116. $(-1, -4)$ y $(2, 11)$; 117. $(1, 3)$, $(-3, 3)$ y $\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{4}\right)$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Razones y funciones trigonométricas.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.09

- Funciones trigonométricas. Definición. Propiedades.
- Identidades trigonométricas.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 9.1 *: Convertir las siguientes medidas de grados a radianes*

1. $30°$ 2. $150°$ 3. $-80°$ 4. $320°$

Solución : 1. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes},$$

por lo que

$$30° = 30 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad \Longrightarrow \qquad 30° = \frac{\pi}{6} \text{ rad}.$$

2. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes},$$

por lo que

$$150° = 150 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad \Longrightarrow \qquad 150° = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}.$$

3. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes},$$

por lo que

$$-80° = -80 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad \Longrightarrow \qquad -80° = -\frac{4\pi}{9} \text{ rad}.$$

4. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radianes},$$

por lo que

$$320° = 320 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} \qquad \Longrightarrow \qquad 320° = \frac{16\pi}{9} \text{ rad}.$$

★

Ejemplo 9.2 *: Convertir las siguientes medidas de radianes a grados*

1. $\frac{\pi}{4}$ rad 2. $\frac{2\pi}{3}$ rad 3. $-\frac{\pi}{2}$ rad 4. $\frac{9\pi}{4}$ rad

Solución : 1. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados},$$

por lo que

$$\frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{4} \text{ rad} = \frac{180\pi}{4\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi}{4} \text{ rad} = 45°.$$

Farith J. Briceño N. farith.math@gmail.com

2. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados},$$

por lo que

$$\frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = \frac{360\pi}{3\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ.$$

3. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados},$$

por lo que

$$-\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -\frac{180\pi}{3\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ.$$

4. Es conocido que,

$$\pi \text{ radianes} = 180 \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ grados},$$

por lo que

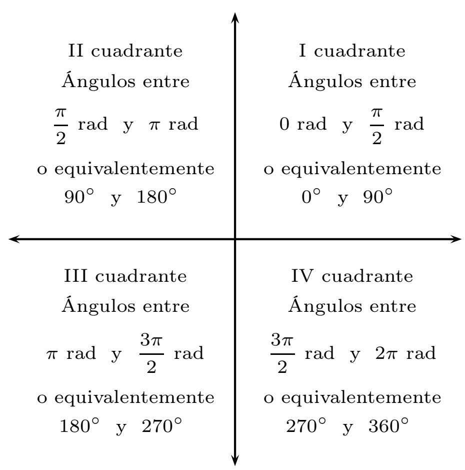
$$\frac{9\pi}{4} \text{ rad} = \frac{9\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{9\pi}{4} \text{ rad} = -\frac{1620\pi}{4\pi} \text{ grados} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{9\pi}{4} \text{ rad} = 405^\circ.$$

★

Ejemplo 9.3 *: Ubicar el cuadrante donde se encuentran los siguientes ángulos*

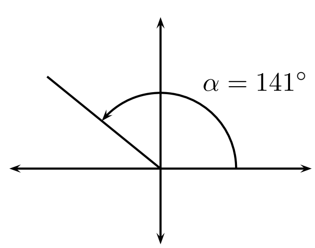
1. 141° 2. 410° 3. $\dfrac{5\pi}{4}$ rad 4. $-\dfrac{5\pi}{3}$ rad

Solución : Es conocido que, el plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes, a saber

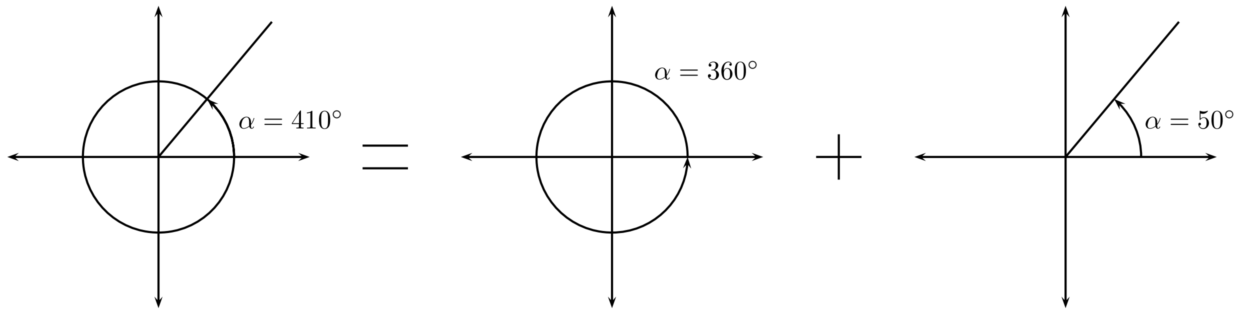


Por lo tanto

1. El ángulo $141^\circ = \dfrac{47\pi}{60}$ rad se encuentra en el segundo cuadrante.

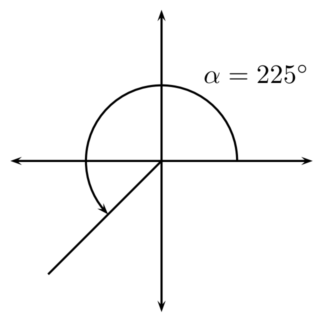


2. Observemos que el ángulo $410° = 360° + 50°$,

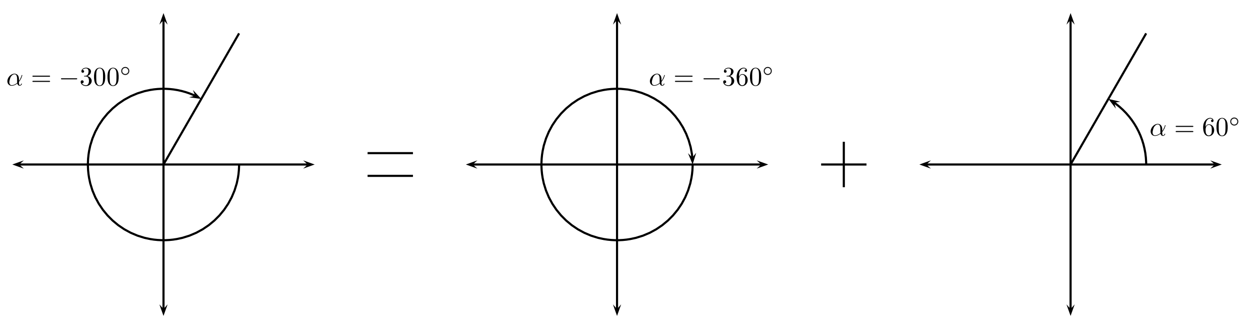


así, $410° = \dfrac{41\pi}{18}$ rad se encuentra en el primer cuadrante y es equivalente al ángulo $50°$.

3. El ángulo $\dfrac{5\pi}{4}$ rad $= 225°$ se encuentra en el tercer cuadrante.



4. Observemos que el ángulo $-\dfrac{5\pi}{3}$ rad $= -300° = 60° - 360°$,



así, $-\dfrac{5\pi}{3}$ rad $= 300°$ se encuentra en el primer cuadrante y es equivalente al ángulo $60°$. ★

Ejemplo 9.4 *: Hallar el valor de las razones trigonométricas para el ángulo notable* $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

Solución : Para obtener las razones trigonométricas para el ángulo notable $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, utilizamos la siguiente propiedad de los triángulos rectángulos isósceles

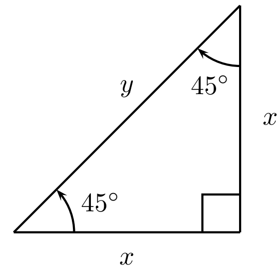
> **Propiedad :** Un triángulo rectángulo isósceles tiene un ángulo recto y sus catetos iguales, luego los ángulos agudos son iguales, e iguales a $45°$.

Sean

x : La longitud de los catetos.

y : La longitud de la hipotenusa.

Entonces, el triángulo rectángulo isósceles se representa como



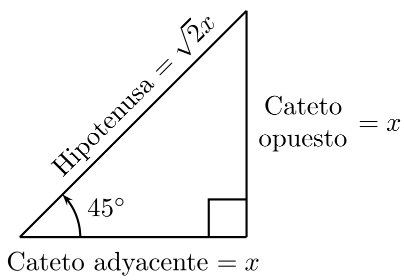
Observemos que, por el Teorema de Pitágoras, el cual establece

Teorema 1 (Teorema de Pitágoras) *: En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

se tiene

$$y^2 = x^2 + x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = 2x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \sqrt{2}x.$$

Calculamos las razones trigonométricas para el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.



Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(45°) = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

similarmente

$$\cos(45°) = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{x}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Luego,

$$\boxed{\operatorname{sen}(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\cos(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2},}$$

de aquí,

$$\tan(45°) = \frac{\operatorname{sen}(45°)}{\cos(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1, \qquad \cot(45°) = \frac{\cos(45°)}{\operatorname{sen}(45°)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1,$$

$$\sec(45°) = \frac{1}{\cos(45°)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}, \qquad \csc(45°) = \frac{1}{\operatorname{sen}(45°)} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

★

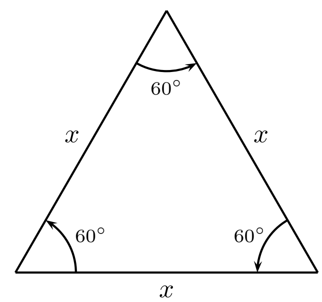
Ejemplo 9.5 *: Hallar el valor de las razones trigonométricas para el ángulo notable* $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Solución : Para obtener las razones trigonométricas para el ángulo notable $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, utilizamos un triángulo equilátero con sus propiedades

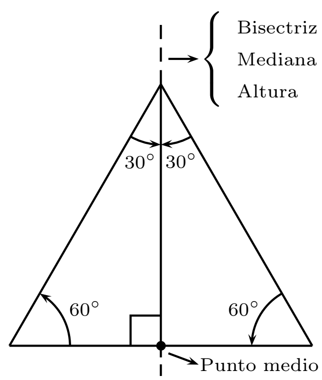
Propiedad 1 **:** Un triángulo equilátero tiene los tres lados iguales.

Propiedad 2 **:** El triángulo equilátero, es también equiángulo, es decir, los tres ángulos son iguales, y por lo tanto, de $60°$ cada uno.

Sea x la longitud de cada lado

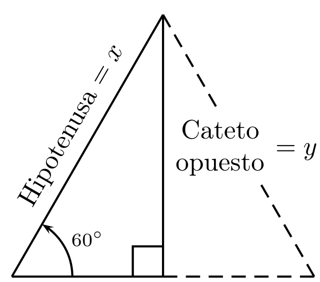


Consideremos la bisectriz de cualquier ángulo del triángulo



Propiedad 3 **:** En un triángulo equilátero la **mediana** (recta que pasa por un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto a ese vértice), la **bisectriz** (recta que divide a un ángulo en dos ángulos iguales) del ángulo de dicho vértice y la **altura** (recta perpendicular al lado opuesto del vértice en cuestión) **coinciden**

Sea y la longitud de la altura del triángulo equilátero,



por el Teorema de Pitágoras, ver Teorema 1, se tiene

$$x^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2=\frac{x^2}{4}+y^2 \quad\Longrightarrow\quad y^2=x^2-\frac{x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad y^2=\frac{3x^2}{4} \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Calculamos las razones trigonométricas para el ángulo $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$. Se tiene

$$\operatorname{sen}(60°)=\frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{\frac{\sqrt{3}x}{2}}{x}=\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos(60°)=\frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}}=\frac{\frac{x}{2}}{x}=\frac{1}{2}.$$

Luego,

$$\boxed{\operatorname{sen}(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}} \qquad \text{y} \qquad \boxed{\cos(60°)=\frac{1}{2},}$$

de aquí,

$$\tan(60^\circ)=\frac{\operatorname{sen}(60^\circ)}{\cos(60^\circ)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{3},\qquad \cot(60^\circ)=\frac{\cos(60^\circ)}{\operatorname{sen}(60^\circ)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sec(60^\circ)=\frac{1}{\cos(60^\circ)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2,\qquad \csc(60^\circ)=\frac{1}{\operatorname{sen}(60^\circ)}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

★

Ejemplo 9.6 *: Calcular el valor de la siguiente expresión* $5\operatorname{sen}^2(45^\circ)+8\cos^2(30^\circ)$.

Solución : Puesto que,

$$\operatorname{sen}(45^\circ)=\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \text{y}\qquad \cos(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

entonces

$$5\operatorname{sen}^2(45^\circ)+8\cos^2(30^\circ)=5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=5\left(\frac{2}{4}\right)+8\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{5}{2}+6=\frac{17}{2}.$$

Luego,

$$5\operatorname{sen}^2 45^\circ+8\cos^2 30^\circ=\frac{17}{2}.$$

★

Ejemplo 9.7 *: Calcular el valor de la siguiente expresión* $\dfrac{\tan^2(30^\circ)+\operatorname{sen}^2(30^\circ)}{\csc^2(45^\circ)+\csc^2(30^\circ)}$.

Solución : Puesto que,

$$\tan(30^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \operatorname{sen}(30^\circ)=\frac{1}{2},\qquad \csc(45^\circ)=\sqrt{2}\qquad \text{y}\qquad \csc(30^\circ)=2,$$

entonces

$$\frac{\tan^2(30^\circ)+\operatorname{sen}^2(30^\circ)}{\csc^2(45^\circ)+\csc^2(30^\circ)}=\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2+(2)^2}=\frac{\frac{3}{9}+\frac{1}{4}}{2+4}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{6}=\frac{\frac{7}{12}}{6}=\frac{7}{72}.$$

Luego,

$$\frac{\tan^2(30^\circ)+\operatorname{sen}^2(30^\circ)}{\csc^2(45^\circ)+\csc^2(30^\circ)}=\frac{7}{72}.$$

★

Ejemplo 9.8 *: Demostrar la identidad*

$$\cot^2 x+1=\csc^2 x.$$

Demostración : Es conocida la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1,$$

dividimos entre $\operatorname{sen}^2 x$ a dicha ecuación y se obtiene

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}+\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\qquad\Longrightarrow\qquad 1+\left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2=\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2,$$

como,

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

concluimos que

$$1 + \left(\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^2 \qquad \text{es equivalente a} \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x.$$

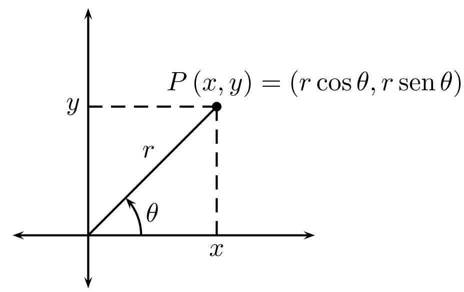
★

Ejemplo 9.9 *: Demostrar la identidad*

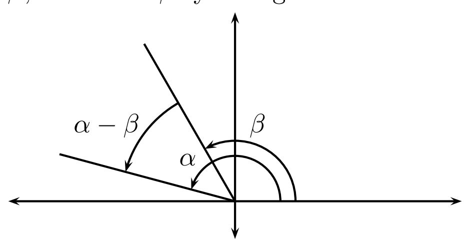
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta.$$

Demostración : Vamos a utilizar como herramienta para la demostración de la identidad la geometría del círculo trigonométrico, pero en primer lugar, recordemos lo siguiente

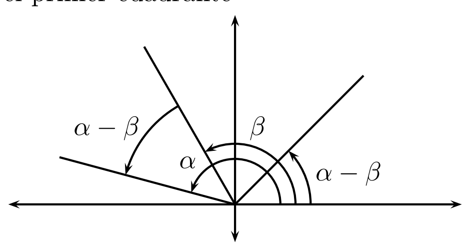
Es conocido que, si $P(x, y)$ es cualquier punto del plano cartesiano, $\overline{OP}$ representa el segmento de recta dirigido desde el origen de coordenada $(0, 0)$ al punto $P(x, y)$ y θ es el ángulo que forma dicho segmento de recta dirigido con respecto al eje de la abscisa, eje x, entonces el punto P se puede expresar como un par coordenado de la forma $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$, donde r es la longitud del segmento $\overline{OP}$.



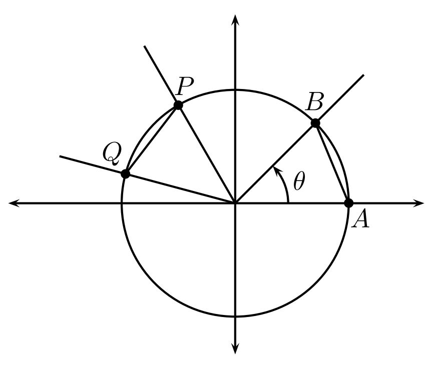
Consideremos los ángulos α y β, con $\alpha > \beta$ y el ángulo diferencia $\alpha - \beta$,



representamos el ángulo $\alpha - \beta$ en el primer cuadrante



Consideremos el círculo trigonométrico y denotamos por θ al ángulo $\alpha - \beta$



Las coordenadas de cada punto son

$$A(1,0), \quad B(\cos(\alpha-\beta), \operatorname{sen}(\alpha-\beta)), \quad P(x_1,y_1)=(\cos\beta, \operatorname{sen}\beta), \quad Q(x_2,y_2)=(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

Observemos que la distancia de $\overline{AB}$ es igual a la distancia de $\overline{PQ}$, es decir

$$d(AB)=d(PQ),$$

así, por la fórmula de distancia, se tiene

$$\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^2}=\sqrt{(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2},$$

elevamos al cuadrado ambos términos de la ecuación,

$$(\cos(\alpha-\beta)-1)^2+(\operatorname{sen}(\alpha-\beta))^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)^2.$$

Desarrollando los cuadrados

$$\begin{aligned}&\cos^2(\alpha-\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\\&\qquad=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\ \cos\beta+\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta+\operatorname{sen}^2\beta,\end{aligned}$$

agrupamos términos convenientemente

$$\begin{aligned}&\underbrace{\left(\cos^2(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)\right)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Identidad trigonométrica básica}\\ \cos^2\gamma+\operatorname{sen}^2\gamma=1}}}}-2\cos(\alpha-\beta)+1\\&\qquad=\overbrace{\left(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha\right)}^{\substack{\boxed{\substack{\text{Identidad trigonométrica básica}\\ \cos^2\gamma+\operatorname{sen}^2\gamma=1}}\\ \downarrow}}+\overbrace{\left(\cos^2\beta+\operatorname{sen}^2\beta\right)}^{\downarrow}-2\cos\alpha\ \cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta,\end{aligned}$$

entonces

$$1-2\cos(\alpha-\beta)+1=1+1-2\cos\alpha\cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta,$$

de aquí,

$$2-2\cos(\alpha-\beta)=2-2\cos\alpha\ \cos\beta-2\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta,$$

simplificando y dividiendo entre -2, obtenemos

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\ \cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta.$$

★

Ejemplo 9.10 *: Demostrar la identidad*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\operatorname{sen}\gamma.$$

Solución : Por el ejemplo 9.9, tenemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Por el ejercicio 4}\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}}}}\cos\gamma+\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{\substack{\uparrow\\ \boxed{\substack{\text{Por el ejercicio 4}\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1}}}}\operatorname{sen}\gamma=(0)\ \cos\gamma+(1)\ \operatorname{sen}\gamma=\operatorname{sen}\gamma.$$

Luego

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)=\operatorname{sen}\gamma.$$

★

Ejemplo 9.11 : *Demostrar la identidad*

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta.$$

Solución : Es conocido que $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\gamma\right)=\operatorname{sen}\gamma$, ver ejemplo 9.10, entonces

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right),$$

por el ejemplo 9.9,

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ \cos\beta+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\ \operatorname{sen}\beta,$$

por otra parte,

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta\right)=\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\uparrow\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Por el ejemplo 9.10}\\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{sen}\alpha\end{array}}}\ \cos\beta+\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}_{\uparrow\ \boxed{\begin{array}{c}\text{Por el ejercicio 8}\\ \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha\end{array}}}\ \operatorname{sen}\beta=\operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta.$$

Luego,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta.$$

★

Ejemplo 9.12 : *Demostrar la identidad*

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}.$$

Demostración : Es conocido que

$$\tan x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x},$$

así,

$$\tan(x+y)=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)},$$

por otra parte,

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y \qquad \text{y} \qquad \cos(x+y)=\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y,$$

por lo tanto,

$$\tan(x+y)=\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y},$$

dividimos y multiplicamos por $\cos x\cos y$, y obtenemos

$$\tan(x+y)=\frac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}\,\frac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}x\cos y+\cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}x\cos y}{\cos x\cos y}+\dfrac{\cos x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}{\dfrac{\cos x\cos y}{\cos x\cos y}-\dfrac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y}}=\frac{\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen}y}{\cos y}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}x}{\cos x}\dfrac{\operatorname{sen}y}{\cos y}}=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y},$$

es decir,

$$\tan(x+y)=\frac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}.$$

★

Ejemplo 9.13 *: Demostrar la identidad*

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Demostración : Es conocido que

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

en el caso partícular, cuando $y = x$, se tiene

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x,$$

es decir,

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x. \tag{1}$$

Por otro lado,

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

sustituyendo esta última igualdad en la ecuación (1), se obtiene

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) \quad \Longrightarrow \quad \cos(2x) = \cos^2 x - 1 + \cos^2 x \quad \Longrightarrow \quad \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1,$$

despejamos $\cos^2 x$

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \cos(2x) + 1 = 2\cos^2 x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\cos(2x)+1}{2} = \cos^2 x,$$

quedando demostrado que

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

★

Ejemplo 9.14 *: Demostrar la identidad*

$$\csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

Demostración : Es conocido que

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

así,

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1+\cos x - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \Longrightarrow \qquad \csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

aplicando la conjugada trigonométrica al segundo sumando de la última igualdad, tenemos

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{(1-\cos x)}{\operatorname{sen} x}\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)},$$

De la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1,$$

se tiene que,

$$\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x,$$

luego,

$$\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{1-\cos^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x\,(1+\cos x)} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x},$$

por lo tanto,

$$\csc x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}.$$

★

Ejemplo 9.15 *: Demostrar la identidad*

$$\operatorname{sen}(nx)\ \operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)\right].$$

Demostración : Es conocido que

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y \qquad \text{y} \qquad \cos(x-y) = \cos x\cos y + \operatorname{sen} x\operatorname{sen} y,$$

entonces,

$$\cos(nx+mx) = \cos(nx)\cos(mx) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx)$$

y

$$\cos(nx-mx) = \cos(nx)\cos(mx) + \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx),$$

restamos estas identidades y obtenemos

$$\begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} \cos(nx-mx) = \cos(nx)\cos(mx) + \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) \\ \cos(nx+mx) = \cos(nx)\cos(mx) - \operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) \end{array}\right. \\ \hline \cos(nx-mx) - \cos(nx+mx) = 2\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx), \end{array}$$

de aquí,

$$2\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) = \cos(nx-mx) - \cos(nx+mx),$$

por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(nx)\operatorname{sen}(mx) = \frac{1}{2}\left[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x\right].$$

★

Ejemplo 9.16 *: Hallar los valores de las otras razones trigonométricas, si* $\tan x = \frac{4}{3}$, *con* $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Solución : Es conocido que

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad \Longrightarrow \qquad \cot x = \frac{1}{\frac{4}{3}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\cot x = \frac{3}{4}.}$$

Por otra parte,

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \Longrightarrow \quad \sec^2 x = 1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad \sec^2 x = 1 + \frac{16}{9} \quad \Longrightarrow \quad \sec^2 x = \frac{25}{9},$$

de aquí,

$$\sec x = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sec x = \pm\frac{5}{3},$$

como $x \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, entonces, $\boxed{\sec x = -\frac{5}{3}.}$ Puesto que

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{\sec x} \quad \Longrightarrow \quad \cos x = \frac{1}{-\frac{5}{3}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\cos x = -\frac{3}{5},}$$

de la identidad trigonométrica básica

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x + (\cos x)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{9}{25} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{16}{25} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \pm\frac{4}{5}$$

como $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, entonces, $\boxed{\operatorname{sen} x = -\dfrac{4}{5}.}$

Finalmente, como

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \Longrightarrow \qquad \csc x = \frac{1}{-\dfrac{4}{5}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\csc x = -\frac{5}{4}.}$$

★

Ejemplo 9.17 : *Hallar los valores de las otras razones trigonométricas, si* $\sec x = -\dfrac{25}{14}$, *con* $x < 180°$.

Solución : Puesto que, la razón trigonométrica secante es negativa y el ángulo es menor que $180°$, concluimos que el ángulo está en el segundo cuadrante.

Así, es conocido que $\sec \gamma = \dfrac{1}{\cos \gamma}$, así, $\cos \gamma = \dfrac{1}{\sec x}$, por lo tanto,

$$\cos x = \frac{1}{\sec x} \qquad \Longrightarrow \qquad \cos x = \frac{1}{-\dfrac{25}{14}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\cos x = -\frac{14}{25}.}$$

De la identidad trigonométrica básica $\cos^2 \gamma + \operatorname{sen}^2 \gamma = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad &\Longrightarrow \quad (\cos x)^2 + \operatorname{sen}^2 x = 1 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \left(-\frac{14}{25}\right)^2 \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = 1 - \frac{(14)^2}{(25)^2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{(25)^2 - (14)^2}{(25)^2} \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{(25-14)(25+14)}{(25)^2} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{(11)(39)}{(25)^2} \\
&\Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \pm\sqrt{\frac{429}{(25)^2}} \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{429}}{25},
\end{aligned}$$

como $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$, entonces, $\boxed{\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{429}}{25}.}$ Puesto que

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \Longrightarrow \qquad \csc x = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{429}}{25}} \qquad \Longrightarrow \qquad \csc x = \frac{25}{\sqrt{429}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\csc x = \frac{25\sqrt{429}}{429},}$$

Por otra parte

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \Longrightarrow \qquad \tan x = \frac{\dfrac{\sqrt{429}}{25}}{-\dfrac{14}{25}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\tan x = -\frac{\sqrt{429}}{14},}$$

Finalmente, como

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad \Longrightarrow \qquad \cot x = \frac{1}{-\dfrac{\sqrt{429}}{14}} \qquad \Longrightarrow \qquad \cot x = -\frac{14}{\sqrt{429}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\cot x = -\frac{14\sqrt{429}}{429}.}$$

★

Ejemplo 9.18 : *Calcular, sin usar calculadora,* $4\,\mathrm{sen}\,(240^\circ) + \cos^2(135^\circ)$.

Solución : Observemos que

$$240^\circ = 180^\circ + 60^\circ, \qquad \text{mientras que} \qquad 135^\circ = 90^\circ + 45^\circ,$$

entonces

$$\mathrm{sen}\,(240^\circ) = \mathrm{sen}\,(180^\circ + 60^\circ) = \mathrm{sen}\,(180^\circ)\;\cos(60^\circ) + \cos(180^\circ)\;\mathrm{sen}\,(60^\circ)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Por otra parte

$$\cos(135^\circ) = \cos(90^\circ + 45^\circ) = \cos(90^\circ)\;\cos(45^\circ) - \mathrm{sen}\,(90^\circ)\;\mathrm{sen}\,(45^\circ)$$

$$= (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

De aquí,

$$4\,\mathrm{sen}\,(240^\circ) + \cos^2(135^\circ) = 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -\frac{4\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{4} = -2\sqrt{3} + \frac{1}{2} = \frac{1-4\sqrt{3}}{2}.$$

Luego,

$$4\,\mathrm{sen}\,(240^\circ) + \cos^2(135^\circ) = \frac{1-4\sqrt{3}}{2}.$$

★

Ejemplo 9.19 : *Calcular, sin usar calculadora,* $\dfrac{\tan(15^\circ) + 2\cos(105^\circ)}{\sec(300^\circ) - 3\csc(225^\circ)}$.

Solución : Observemos que

$$15^\circ = 45^\circ - 30^\circ, \qquad 105^\circ = 60^\circ + 45^\circ, \qquad 300^\circ = 270^\circ + 30^\circ, \qquad 225^\circ = 180^\circ + 45^\circ,$$

así,

$$\tan(15^\circ) = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan(45^\circ) - \tan(30^\circ)}{1 + \tan(45^\circ)\;\tan(30^\circ)} = \frac{1 - \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + (1)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \frac{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3+\sqrt{3}\right)}\;\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)}{\left(3-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(3-\sqrt{3}\right)^2}{(3)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{9 - 2\sqrt{3} + 3}{9-3} = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{6-\sqrt{3}}{3}.$$

Por otra parte,

$$\cos(105^\circ) = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos(60^\circ)\;\cos(45^\circ) - \mathrm{sen}\,(60^\circ)\;\mathrm{sen}\,(45^\circ)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right),$$

mientras que,

$$\sec(300^\circ) = \frac{1}{\cos(300^\circ)} = \frac{1}{\cos(270^\circ + 30^\circ)} = \frac{1}{\cos(270^\circ)\;\cos(30^\circ) - \mathrm{sen}\,(270^\circ)\;\mathrm{sen}\,(30^\circ)}$$

$$= \frac{1}{(0)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) - (-1)\left(\dfrac{1}{2}\right)} = \frac{1}{0 + \dfrac{1}{2}} = \frac{1}{\dfrac{1}{2}} = 2,$$

por último

$$\csc(225^\circ) = \frac{1}{\operatorname{sen}(225^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(180^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(180^\circ)\ \cos(45^\circ) + \cos(180^\circ)\ \operatorname{sen}(45^\circ)}$$

$$= \frac{1}{(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

Entonces,

$$\frac{\tan(15^\circ) + 2\cos(105^\circ)}{\sec(300^\circ) - 3\csc(225^\circ)} = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{3}\right)\right)}{2 - 3\left(-\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{6-\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}\left(1-\sqrt{3}\right)}{2}}{2+3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\frac{12 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{6}}{2+3\sqrt{2}} = \frac{1}{6}\ \frac{12 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2+3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{\left(12 - 2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}\right)}{\left(2+3\sqrt{2}\right)}\frac{\left(2-3\sqrt{2}\right)}{\left(2-3\sqrt{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{24 - 36\sqrt{2} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{6} + 6\sqrt{2} - 18 - 6\sqrt{6} + 18\sqrt{3}}{(2)^2 - \left(3\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{6}\ \frac{6 - 30\sqrt{2} + 14\sqrt{3}}{4 - 18} = -\frac{1}{6}\ \frac{6 - 30\sqrt{2} + 14\sqrt{3}}{14}$$

$$= -\frac{1}{6}\ \frac{3 - 15\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{7} = -\frac{3 - 15\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{42}.$$

Luego

$$\frac{\tan(15^\circ) + 2\cos(105^\circ)}{\sec(300^\circ) - 3\csc(225^\circ)} = -\frac{3 - 15\sqrt{2} + 7\sqrt{3}}{42}.$$

★

Ejemplo 9.20 *: Demostrar que si* $\cos(x+y) = 0$, *entonces* $\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen} x$.

Solución : Es conocida que,

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta,$$

así,

$$\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}(x+y+y) = \operatorname{sen}((x+y)+y) = \operatorname{sen}(x+y)\ \cos y - \cos(x+y)\ \operatorname{sen} y,$$

puesto que, $\cos(x+y) = 0$, se tiene

$$\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}(x+y)\ \cos y - (0)\ \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x+y)\ \cos y.$$

Por otro lado, es conocido que

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x\ \cos y + \cos x\ \operatorname{sen} y$$

y como

$0 = \cos(x+y) = \cos x\ \cos y - \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y,$ se concluye que $\cos x\ \cos y = \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y,$

así,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}(x+y)\ \cos y = (\operatorname{sen} x\ \cos y + \cos x\ \operatorname{sen} y)\cos y = \operatorname{sen} x\ \cos^2 y + \cos x\ \operatorname{sen} y\ \cos y \\ = \operatorname{sen} x\ \cos^2 y + \operatorname{sen} y\ \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} x\ \cos^2 y + \operatorname{sen} x\ \operatorname{sen}^2 y \\ = \left(\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y\right)\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.\end{aligned}$$

Luego, si $\cos(x+y) = 0$, entonces

$$\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen} x.$$

★

Ejemplo 9.21 *: Hallar las funciones que al componerlas se obtenga* $h(x) = \cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$.

Solución : Observe que el orden en que aparecen las funciones en dicha composición es:

$$\begin{array}{ccccccccccc} (x) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(x) & \longrightarrow & (\operatorname{sen}(x))^2 & \longrightarrow & \cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) & \longrightarrow & \left(\cos\left(\operatorname{sen}^2(x)\right)\right)^4 & = & \cos^4\left(\operatorname{sen}^2(x)\right) \\ (\cdot) & \longrightarrow & \operatorname{sen}(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^2 & \longrightarrow & \cos(\cdot) & \longrightarrow & (\cdot)^4 & & \end{array}$$

luego, las funciones son

$$f(x) = \operatorname{sen} x, \qquad g(x) = x^2, \qquad w(x) = \cos x, \qquad r(x) = x^4$$

y el orden de composición es

$$h(x) = r(w(g(f(x))))$$

★

Ejemplo 9.22 *: Diga si la función* $f(x) = \dfrac{|x| - x^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ *es una función par, impar ó ninguna de las dos.*

Solución : Es conocido que una función f es par, si y solo si

$$f(-x) = f(x)$$

para todo $x \in \operatorname{Dom} f$ y f es impar, si y solo si

$$f(-x) = -f(x)$$

para todo $x \in \operatorname{Dom} f$, así,

$$f(-x) = \frac{|-x| - (-x)^2}{\operatorname{sen}(-x) + \cos(-x)} = \frac{|x| - x^2}{-\operatorname{sen} x + \cos x},$$

puesto que $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ (función impar) y $\cos(-x) = \cos x$ (función par). Observemos que

$$f(-x) \neq f(x) \qquad \text{y} \qquad f(-x) \neq -f(x),$$

por lo que concluimos que f no es una función par, ni impar. ★

Ejemplo 9.23 *: Diga si la función* $f(x) = \cos(2\pi x)$ *es una función periódica y en caso afirmativo halle su período.*

Solución : Es conocido que una función es periódica, con período p, si

$$f(x+p) = f(x).$$

Puesto que la función $g(x) = \cos x$ es periódica, de período $p = 2\pi$, es decir, se cumple que

$$\cos(\cdot + 2\pi) = \cos(\cdot),$$

tenemos que

$$f(x) = \cos(2\pi x) = \cos(2\pi x + 2\pi) = \cos(2\pi(x+1)) = f(x+1),$$

de aquí,

$$f(x) = f(x+1),$$

luego, la función f es periódica con período $p = 1$. ★

Ejemplo 9.24 *: Estudie la inyectividad de la función* $f(x) = \tan x$ *si* $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Solución : Es conocido que una función f es **inyectiva** si para todo $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

o equivalentemente,

$$\text{Si} \qquad f(x_1) = f(x_2) \qquad \text{entonces} \qquad x_1 = x_2$$

Sean $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, tal que $f(x_1) = f(x_2)$, entonces

$$\tan x_1 = \tan x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\operatorname{sen} x_1}{\cos x_1} = \frac{\operatorname{sen} x_2}{\cos x_2} \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 = \cos x_1 \operatorname{sen} x_2,$$

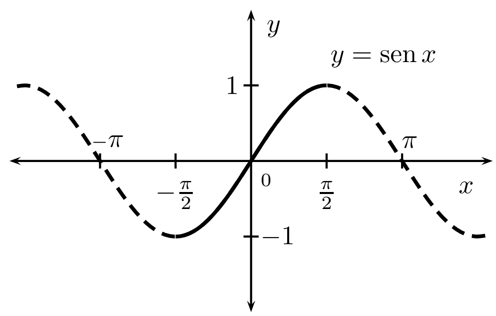
$$\Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} x_1 \cos x_2 - \cos x_1 \operatorname{sen} x_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen}(x_1 - x_2) = 0.$$

Es conocido que, $f(\cdot) = \operatorname{sen}(\cdot)$ es igual a cero en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ si y solo si $(\cdot) = 0$, es decir

$$\operatorname{sen}(x_1 - x_2) = 0 \qquad \text{si y solo si} \qquad x_1 - x_2 = 0,$$

puesto que, $x_1 - x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, concluimos que

$$x_1 = x_2.$$



Por lo tanto, $f(x) = \tan x$ es inyectiva en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. ★

Ejemplo 9.25 *: Determine el dominio de la función*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} + \cos x}{\operatorname{sen} x + 1}.$$

Solución : Observemos que f involucra dos funciones que proporcionan condiciones para su definición, a saber

$$\sqrt{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \geq 0$$

$$\frac{1}{(\cdot)} \qquad \text{tiene sentido si y solo si} \qquad (\cdot) \neq 0$$

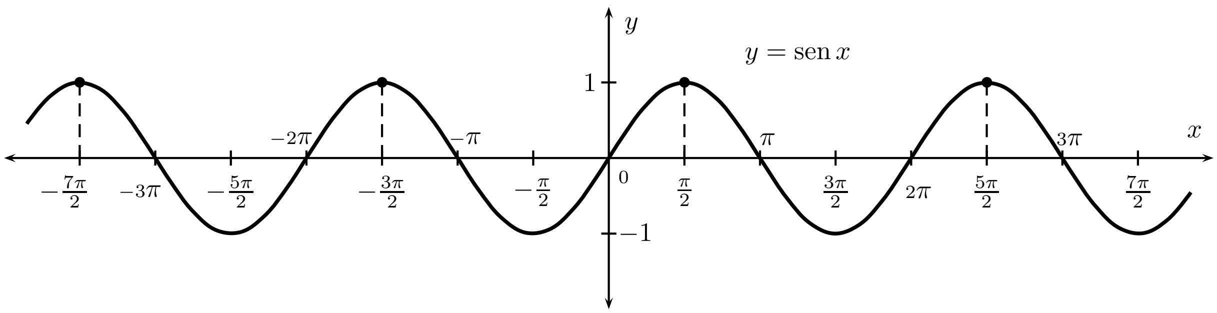
así, para obtener el dominio de f debemos tener en cuenta que

1. la función $g(x) = \sqrt{x}$ tiene sentido si y solo si $x \geq 0$
2. la función $h(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - 1}$ tiene sentido si y solo si $\operatorname{sen} x - 1 \neq 0$

de esto se obtiene que

1. La función $g(x) = \sqrt{x}$ tiene sentido si $x \in [0, \infty) \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } g = [0, \infty)$
2. Para obtener los valores de x para los cuales h tiene sentido, es equivalente resolver la igualdad $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ y la(s) solución(es) de esta ecuación excluirla(s) de $\mathbb{R}$, así,

$$\operatorname{sen} x - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \operatorname{sen} x = 1 \qquad \text{si y solo si} \qquad x = (4k+1)\frac{\pi}{2}, \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$



Luego, la función $h(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x - 1}$ tiene sentido si $x \in \mathbb{R} - \left\{k \in \mathbb{Z} \; / \; (4k+1)\dfrac{\pi}{2}\right\}$, es decir,

$$\text{Dom } h = \mathbb{R} - \left\{k \in \mathbb{Z} \; / \; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$$

Por lo que,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h = [0, \infty) \bigcap \left(\mathbb{R} - \left\{k \in \mathbb{Z} \; / \; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right\}\right),$$

es decir,

$$\boxed{\text{Dom } f = [0, \infty) - \left\{k \in \mathbb{N}^* \; / \; (4k+1)\frac{\pi}{2}\right\}}$$

donde, $\mathbb{N}^* = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$. ★

Ejercicios

1. Convertir las siguientes medidas de grados a radianes

1. $30°$	2. $45°$	3. $60°$	4. $90°$	5. $15°$	6. $20°$
7. $180°$	8. $270°$	9. $130°$	10. $720°$	11. $315°$	12. $-30°$
13. $210°$	14. $100°$	15. $-50°$	16. $150°$	17. $50°$	18. $120°$
19. $280°$	20. $-80°$	21. $-25°$	22. $230°$	23. $320°$	24. $-45°$
25. $360°$	26. $340°$	27. $550°$	28. $405°$	29. $295°$	30. $350°$

2. Convertir las siguientes medidas de radianes a grados

1. π rad	2. $\frac{\pi}{2}$ rad	3. $\frac{\pi}{3}$ rad	4. $\frac{\pi}{4}$ rad	5. $\frac{\pi}{5}$ rad	6. $\frac{\pi}{6}$ rad
7. 3π rad	8. $\frac{2\pi}{3}$ rad	9. $\frac{\pi}{10}$ rad	10. $\frac{3\pi}{4}$ rad	11. $\frac{3\pi}{2}$ rad	12. 2π rad
13. $\frac{2\pi}{5}$ rad	14. 4π rad	15. 7π rad	16. $-\frac{\pi}{2}$ rad	17. $\frac{7\pi}{10}$ rad	18. $\frac{\pi}{9}$ rad
19. $\frac{3\pi}{5}$ rad	20. $\frac{5\pi}{2}$ rad	21. $\frac{5\pi}{4}$ rad	22. $-\frac{3\pi}{4}$ rad	23. $\frac{7\pi}{11}$ rad	24. $\frac{4\pi}{9}$ rad
25. $\frac{3\pi}{10}$ rad	26. $\frac{4\pi}{5}$ rad	27. $\frac{5\pi}{3}$ rad	28. $-\frac{4\pi}{3}$ rad	29. $\frac{9\pi}{4}$ rad	30. 200π rad

3. Ubicar el cuadrante donde se encuentran los siguientes ángulos

1. $36°$	2. $141°$	3. $90°$	4. $180°$	5. $-15°$	6. $226°$
7. $-93°$	8. $270°$	9. $130°$	10. $720°$	11. $315°$	12. $-30°$
13. $410°$	14. $459°$	15. $-650°$	16. 3π rad	17. $\frac{3\pi}{2}$ rad	18. $-\frac{3\pi}{4}$ rad
19. $\frac{7\pi}{10}$ rad	20. $\frac{7\pi}{11}$ rad	21. $\frac{9\pi}{4}$ rad	22. $\frac{5\pi}{4}$ rad	23. $\frac{3\pi}{10}$ rad	24. $-\frac{4\pi}{3}$ rad
25. $\frac{7\pi}{5}$ rad	26. $\frac{5\pi}{2}$ rad	27. $\frac{4\pi}{9}$ rad	28. $-\frac{5\pi}{3}$ rad	29. $\frac{8\pi}{5}$ rad	30. $-\frac{\pi}{9}$ rad

4. Hallar el valor de las razones trigonométricas en los ángulos notables

a. $\alpha = 0$, *b.* $\alpha = \frac{\pi}{6}$, *c.* $\alpha = \frac{\pi}{4}$, *d.* $\alpha = \frac{\pi}{3}$, *e.* $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

5. Con los resultados obtenidos en el ejercicio 4, completar la siguiente tabla

	$0\pi = 0°$	$\frac{\pi}{6} = 30°$	$\frac{\pi}{4} = 45°$	$\frac{\pi}{3} = 60°$	$\frac{\pi}{2} = 90°$
$\operatorname{sen}\alpha$					
$\cos\alpha$					
$\tan\alpha$					
$\csc\alpha$					
$\sec\alpha$					
$\cot\alpha$					

6. Calcular los valores de las siguientes expresiones

1. $\cos^2(60°) + \operatorname{sen}^2(45°)$
2. $6\tan(30°) + 2\csc(45°)$
3. $5\tan^2(45°) + 2\sec^2(45°)$
4. $4\cos(60°) + 5\csc(30°)$
5. $4\cos(30°) + 6\operatorname{sen}(45°)$
6. $3\operatorname{sen}(30°) + 6\cos^2(45°)$
7. $\operatorname{sen}^2(30°) + \sec^2(45°)$
8. $\csc^2(45°) + \cos^2(30°)$
9. $5\operatorname{sen}^2(45°) + 8\cos^2(30°)$
10. $\csc^2(30°) + \tan^2(45°)$
11. $\dfrac{\operatorname{sen}(30°) + \csc(30°)}{\operatorname{sen}^2(30°) + \cos^2(60°)}$
12. $\dfrac{\operatorname{sen}^2(45°) + \operatorname{sen}^2(30°)}{\cos^2(45°) + \sec^2(45°)}$
13. $\dfrac{\cos^2(30°) + \tan^2(30°)}{\operatorname{sen}^2(45°) + \cos^2(60°)}$
14. $\dfrac{\tan^2(30°) + \operatorname{sen}^2(30°)}{\csc^2(45°) + \csc^2(30°)}$
15. $\dfrac{\cos(60°) + \cos(30°)}{\csc^2(30°) + \operatorname{sen}^2(45°)}$

7. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas básicas

1. $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$
3. $1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$
4. $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$
5. $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$
6. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$
7. $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\ \cos\beta - \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$
8. $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\ \tan\beta}$
9. $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\ \tan\beta}$

8. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas, denominadas cofunción

   1. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ 2. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\operatorname{sen} x$ 3. $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cot x$
   4. $\cot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\tan x$ 5. $\sec\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\csc x$ 6. $\csc\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sec x$

9. A partir de las razones trigonométricas de los ángulos $\frac{\pi}{6}=30°$, $\frac{\pi}{4}=45°$ y $\frac{\pi}{3}=60°$, calcular

   1. $\operatorname{sen}(15°)$ 2. $\operatorname{sen}(150°)$ 3. $\cot(105°)$ 4. $\cos(165°)$ 5. $\sec(75°)$
   6. $\csc(135°)$ 7. $\cot(75°)$ 8. $\sec(135°)$ 9. $\tan(15°)$ 10. $\csc(105°)$

10. Calcular los valores de las siguientes expresiones

   1. $\operatorname{sen}(15°)-2\cos(75°)$ 2. $\cos(105°)+\operatorname{sen}(75°)$ 3. $\tan(150°)-3\cot(105°)$
   4. $5\csc(105°)-5\cot(150°)$ 5. $4\operatorname{sen}(105°)+2\tan(105°)$ 6. $-7\cos(210°)+3\csc(75°)$
   7. $2\cos(150°)-\operatorname{sen}(315°)$ 8. $4\operatorname{sen}(240°)+\cos^2(135°)$ 9. $\frac{\sqrt{3}}{3}\tan(510°)+2\csc(675°)$
   10. $\frac{1}{2}\tan(225°)+6\sec^2(225°)$ 11. $\frac{\sqrt{2}}{2}\tan(210°)-\frac{\sqrt{3}}{3}\cot(105°)+\frac{1}{3}\operatorname{sen}(135°)$
   12. $3\operatorname{sen}(900°)-\cos(300°)$ 13. $\operatorname{sen}^2(870°)+\sec^2(585°)$ 14. $\frac{3}{5}\cos^2(960°)+\operatorname{sen}^2(960°)$
   15. $\csc^2(1395°)+\sqrt{3}\cos^2(1200°)$ 16. $\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2040°)+\sqrt{2}\operatorname{sen}(1215°)$
   17. $\csc^2(585°)+\tan^2(1665°)$ 18. $\dfrac{\operatorname{sen}(15°)+\sec(210°)}{\cos^2(135°)+\tan(75°)}$ 19. $\dfrac{\operatorname{sen}(135°)+\csc(240°)}{\operatorname{sen}^2(225°)+\cos^2(315°)}$
   20. $\dfrac{\csc(75°)-\sec(105°)}{\cos(75°)-\operatorname{sen}(105°)}$ 21. $\dfrac{\cos(300°)+\cos(390°)}{\csc^2(390°)+\operatorname{sen}^2(420°)}$ 22. $\dfrac{\cos^2(945°)+\tan^2(945°)}{\operatorname{sen}^2(945°)+\cos^2(420°)}$
   23. $\dfrac{\tan^2(750°)+\operatorname{sen}^2(1110°)}{\csc^2(135°)+\csc^2(300°)}$ 24. $\dfrac{\operatorname{sen}^2(2400°)+\operatorname{sen}^2(2025°)}{\cos^2(405°)+\sec^2(405°)}$

11. Encuentre el cuadrante que contiene a x, suponiendo que

   1. $\sec x<0$ y $\operatorname{sen} x>0$ 2. $\cot x>0$ y $\csc x<0$ 3. $\cos x>0$ y $\tan x<0$

12. Transformar a radianes los siguientes ángulos y reducirlos al intervalo $[0,2\pi]$

   1. $120°$ 2. $300°$ 3. $285°$ 4. $-150°$ 5. $420°$ 6. $500°$

13. Calcular en radianes el valor α en cada uno de los siguientes casos

   (a) α es igual a su complemento. (b) α es igual a $4/5$ de su suplemento.
   (c) α es igual a $1/3$ de su suplemento menos dos veces su complemento.

14. Hallar en grados la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es 50 m en un círculo de 25 m de radio.

15. Hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4 radianes en un círculo cuyo radio es 25 m.

16. Demostrar las siguientes identidades trigonométricas

1. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\csc x} + \dfrac{\cos x}{\sec x} = 1$ 2. $\left(1 + \tan^2 \theta\right) \operatorname{sen}^2 \theta = \tan^2 \theta$ 3. $\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \dfrac{\sec x}{1 + \cos x}$

4. $\sec x + \csc x = \sec x \ \csc x \ (\operatorname{sen} x + \cos x)$ 5. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \dfrac{2 \operatorname{sen} x}{\sec x}$

6. $\operatorname{sen} x + \cos x = (1 + \tan x) \ \cos x$ 7. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \tan^2 x$

8. $\dfrac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{sen} x} = 1 - \dfrac{1}{\csc x}$ 9. $\dfrac{\sec x}{\tan x + \cot x} = \operatorname{sen} x$ 10. $\dfrac{\tan^2 x}{\sec x + 1} + 1 = \sec x$

11. $\dfrac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ 12. $\dfrac{1}{\sec x - \tan x} = \sec x + \tan x$ 13. $\dfrac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

14. $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$ 15. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ 16. $\cos(2x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x$

17. $\cos(2x) = 2 \cos^2 x - 1$ 18. $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$ 19. $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$

20. $\dfrac{\csc x}{\tan x + \cot x} = \cos x$ 21. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \cot x = \csc x$ 22. $\dfrac{2}{\tan \alpha + \cot \alpha} = \operatorname{sen}(2\alpha)$

23. $\dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x} = \sec(2x)$ 24. $\cot(2\alpha) = \dfrac{1}{2}(\cot \alpha - \tan \alpha)$ 25. $\dfrac{\cot \theta \sec^2 \theta}{1 + \cot^2 \theta} = \tan \theta$

26. $\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ 27. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{sen} x$ 28. $\csc\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \sec x$

30. $\sec\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\csc x$ 31. $\sec x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ 32. $\csc x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

33. $\dfrac{1}{\cot^2 x} + \dfrac{1}{\sec x \ \csc x} = \sec^2 x$ 34. $\dfrac{1}{\csc x - \cot x} = \csc x + \dfrac{1}{\tan x}$

35. $\tan x + \cot x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x \ \cos x}$ 36. $\left(1 - \operatorname{sen}^2 x\right)\left(1 + \tan^2 x\right) = 1$

37. $\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x = -\cos(2x)$ 38. $\cot^2 x + \dfrac{1}{\cos x \ \sec x} = \csc^2 x$

39. $\sec x + \cos^2 x = \dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{1}{\sec^2 x}$ 40. $\cot^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \csc^2 x - \cos^2 x$

41. $\dfrac{1}{1 + \operatorname{sen} x} + \dfrac{1}{1 - \operatorname{sen} x} = 2 \sec^2 x$ 42. $\dfrac{\tan x - \cot x}{1 - 2\cos^2 x} = \tan x + \cot x$

43. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\sec x + \tan x} = \sec x - \tan x$ 44. $\tan^2 x + \dfrac{1}{\sec x \ \csc x} = \sec^2 x$

45. $\dfrac{1 + \cos(3x)}{\operatorname{sen}(3x)} + \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{1 + \cos(3x)} = 2 \csc(3x)$ 46. $\dfrac{\cot x - \tan x}{\operatorname{sen} x + \cos x} = \csc x - \sec x$

47. $\dfrac{\cot x - \cos x}{\cos^3 x} = \dfrac{\csc x}{1 + \operatorname{sen} x}$ 48. $\dfrac{\tan x - \cos(x - \pi)}{\operatorname{sen}(2x)} = \dfrac{1}{2}\left(\sec^2 x + \csc x\right)$

49. $\dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1} - \dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1} - 4 \cot^2 x = \dfrac{4}{1 + \sec x}$ 50. $\dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)}{1 - \operatorname{sen} x} - \sec x = \tan x$

51. $\dfrac{1+\tan^2 x}{1+\cot^2 x} = \left(\dfrac{1-\tan x}{1-\cot x}\right)^2$

52. $\dfrac{\csc\alpha}{1+\csc\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha - 1} = 2\sec^2\alpha$

53. $\dfrac{1}{1+\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{1}{1+\csc^2 x} = \csc^4 x - \left(2+\cot^2 x\right)\cot^2 x$

54. $\dfrac{\operatorname{sen}^4 x - \cos^4 x}{1-2\cos^2 x} = 1$

55. $\dfrac{1-\operatorname{sen} x \ \cos x}{(\sec x - \csc x)\cos x} \cdot \dfrac{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x} = \operatorname{sen} x$

56. $\tan(x+45°) = \dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$

57. $2\sec^2 x - \sec^4 x - 2\csc^2 x + \csc^4 x = \cot^4 x - \tan^4 x$

58. $\operatorname{sen}(x+180°) = -\operatorname{sen} x$

59. $\dfrac{\tan^3 x}{1+\tan^2 x} + \dfrac{\cot^3 x}{1+\cot^2 x} = \sec x \ \csc x - \operatorname{sen}(2x)$

60. $\dfrac{\cos(7x)+\cos x}{\operatorname{sen}(7x)+\operatorname{sen} x} = \cot(4x)$

61. $(\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 + (\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha)^2 = 2$

62. $\dfrac{\operatorname{sen}^6 x - \cos^6 x}{\operatorname{sen}^2 - \cos^2 x} + \operatorname{sen}^2 x \ \cos^2 x = 1$

63. $\dfrac{\cot^2 x}{\csc x - 1} = \csc x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

64. $\cos\left(t - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\operatorname{sen} t + \cos t)$

65. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

66. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$

67. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = -\dfrac{1}{2}(\cos(x+y) - \cos(x-y))$

68. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

69. $\operatorname{sen} x \cos y = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y))$

70. $\operatorname{sen} y \cos x = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y))$

71. $\operatorname{sen}(mx) \ \cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\operatorname{sen}((m+n)x) + \operatorname{sen}((m-n)x)]$

72. $\operatorname{sen}(mx) \ \operatorname{sen}(nx) = \dfrac{1}{2}[\cos((m+n)x) - \cos((m-n)x)]$

73. $\cos(mx) \ \cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)]$

74. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \tan x$

75. $\operatorname{sen} x = \dfrac{2\tan\left(\dfrac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}$

76. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

77. $\dfrac{\tan(x-y)}{\tan(x+y)} = \dfrac{\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}(2y)}{\operatorname{sen}(2x) + \operatorname{sen}(2y)}$

78. $\dfrac{1-\operatorname{sen}(2x)}{1+\operatorname{sen}(2x)} = \dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right)}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}$

17. Hallar todas las funciones trigonométricas de α, si se sabe que $\operatorname{sen}\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{13}}$ y α pertenece al III cuadrante.

18. Hallar todas las funciones trigonométricas de β, si se sabe que $\sec\beta = -5/4$ y β pertenece al II cuadrante.

19. Hallar $\operatorname{sen}\beta$, si se sabe que $\cos\beta = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ y β pertenece al III cuadrante.

20. Hallar $\operatorname{sen}\alpha$, si se sabe que $\cot\alpha = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$ y α pertenece al II cuadrante.

21. Hallar los valores de las otras razones trigonométricas, si $\tan x = \dfrac{4}{3}$, con $x \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

22. Hallar los valores de las otras razones trigonométricas, si $\sec x = -\dfrac{25}{14}$, con $x < 180°$.

23. Hallar las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que $\cot \alpha = \dfrac{1}{3}$.

24. Sabiendo que $\operatorname{sen}(20°) = 0.34$ y $\cos(20°) = 0.94$. Calcular el seno, coseno y tangente de los ángulos

    a. $70°$ *b.* $110°$ *c,* $160°$ *d.* $200°$ *e.* $340°$

25. Calcular las razones trigonométricas del ángulo 2β, sabiendo que $\sec \beta = \dfrac{5}{4}$.

26. Sabiendo que $\tan x = \dfrac{1}{3}$, hallar

    1. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ 2. $\tan(\pi - x)$ 3. $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)$ 4. $\tan(\pi + x)$

    5. $\tan(-x)$ 6. $\tan\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$

27. Si $\tan \alpha = 2$ y $\tan \beta = \dfrac{1}{3}$, calcular: **a.** $\tan(\alpha + 2\beta)$, **b.** $\cot(2\alpha + \beta)$ **c.** $\cot(\alpha - \beta)$.

28. Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$ y $\cos y = \dfrac{5}{13}$. Hallar

    1. $\operatorname{sen}(x + y)$ 2. $\cos(x - y)$ 3. $\tan(2x)$ 4. $\cot(2y)$ 5. $\operatorname{sen}(3x)$

29. Sabiendo que $\cos x = -\dfrac{12}{13}$ y $\cot y = \dfrac{24}{7}$, con x un ángulo del 2^{do} cuadrante, mientras que el ángulo y en el 1^{er} cuadrante. Calcular

    1. $\operatorname{sen}(x + y)$ 2. $\cos(x - y)$

30. Las razones trigonométricas de un ángulo α del 2^{do} cuadrante son tales que $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{4}$. Calcular dichas razones.

31. Sabiendo que $\tan \alpha = \dfrac{3}{8}$ y $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Hallar: **a.** $\operatorname{sen}(2\alpha)$. **b.** $\cos(2\alpha)$ **c.** $\tan(2\alpha)$.

32. Sean α y β dos ángulos, tales que $\tan \alpha = \dfrac{4}{5}$ y $\cos \beta = -\dfrac{3}{7}$, con $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Calcular

    1. $\operatorname{sen}(2\alpha)$ 2. $\operatorname{sen}(2\beta)$ 3. $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ 4. $\cos(\alpha - \beta)$ 5. $\cos(2\alpha)$

    6. $\cos(2\beta)$ 7. $\cos(\alpha + 2\beta)$ 8. $\tan(\alpha - \beta)$ 9. $\tan(2\alpha)$ 10. $\cot(\alpha + \beta)$

33. Hallar las razones trigonométricas del ángulo β, sabiendo que $\tan \beta > 0$ y $\cos \beta = -\dfrac{5}{12}$.

34. Hallar las razones trigonométricas del ángulo α, si $\cot \alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

35. Si $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$, expresar sólo en función de $\operatorname{sen}(2\beta)$, la siguiente fracción

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \left(1 - \cos^2 \beta\right)}{\tan^2 \alpha \cdot \left(1 + \cot^2 \alpha\right) \cdot \csc^2 \alpha}.$$

36. Escribir las siguientes expresiones sólo en función $\cot\alpha$

1. $\tan^2\alpha + 2\,\mathrm{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha$
2. $\sec^2\alpha\cdot\left(\sec^2\alpha - 1\right) - \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\,\alpha} - 1}$

37. Demostrar que si $\cos(x+y)=0$, entonces $\mathrm{sen}\,(x+2y) = \mathrm{sen}\,x$.

38. Desarrollar los siguientes productos

1. $(1-\cos(x+\pi))^2$
2. $(\mathrm{sen}\,x - \cos x)^2$
3. $(\tan x + \cot x)^2$
4. $(1-\cos x)(1+\cos x)$
5. $(1-\sec\alpha)(1+\sec\alpha)$
6. $\left(1-\cot^2 x\right)\left(1-\cos^2 x\right)$
7. $\left(\cos x - \mathrm{sen}^2\,x\right)(\cos x - \cos(2x))$
8. $\left[\tan(2\alpha) - \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]\left[\tan(2\alpha) + \tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right]$
9. $(\mathrm{sen}\,x - 3)(\mathrm{sen}\,x - 2)$
10. $(\mathrm{sen}\,x + 2)\;(\mathrm{sen}\,x - 1)\;\cos^2 x$

39. Factorizar las siguientes expresiones trigonométricas en productos de factores irreducibles

1. $\cos^2 x + 3\cos x + 2$
2. $\tan^2 x + \tan x - 2$
3. $2\cos^2 x + \cos x - 1$
4. $2\tan^2 x - 3\tan x + 1$
5. $1 + \mathrm{sen}\,(2x) + \mathrm{sen}^2\,x$
6. $1-\cos^3 x$
7. $\mathrm{sen}^3\,x + 8$
8. $\mathrm{sen}^4\,x + \mathrm{sen}\,x$
9. $8\sec^2 x - 14\sec x + 3$
10. $\tan^3 x - \mathrm{sen}^3\,x$
11. $\sec^4 x - \tan^4 x$
12. $\csc^2(2x) - 2\cos^2 x$
13. $\tan^2(2x) - \tan^2(-x+\pi/2)$
14. $1 + \mathrm{sen}\,(2ax) - \cos(2ax)$
15. $\mathrm{sen}\,(a+x) + \mathrm{sen}\,(a-x) - 2\,\mathrm{sen}\,a$
16. $\mathrm{sen}\,(4x) + 2\,\mathrm{sen}^2\,(2x) - 2\,\mathrm{sen}\,(2x)$
17. $2 - 4\,\mathrm{sen}\,x + \cos(2x) - 2\,\mathrm{sen}\,x\cos(2x)$
18. $\mathrm{sen}^4\,x - 2\,\mathrm{sen}^2\,x\cos^2 x + \cos^4 x$

40. Racionalizar los siguientes numeradores y simplificar, si es posible

1. $\dfrac{\sqrt{1+\mathrm{sen}\,x} - \sqrt{1-\mathrm{sen}\,x}}{\tan x}$
2. $\dfrac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1-\tan x}}{\mathrm{sen}\,x}$
3. $\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{sen}\,x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\mathrm{sen}\,x - \cos x}$
4. $\dfrac{\sqrt[3]{\cos x} - \sqrt[3]{\mathrm{sen}\,(2x)}}{\cos x}$
5. $\dfrac{\sqrt[3]{\mathrm{sen}^2\,x} - \sqrt[3]{\cos^2 x}}{1-\tan x}$

41. Simplificar las siguientes expresiones

1. $\dfrac{2\cos^2 x + \cos x - 1}{2\cos^2 x - 3\cos x + 1}$
2. $\dfrac{\cos^2 x - 3\cos x + 2}{2 - 2\cos x - \mathrm{sen}^2\,x}$
3. $\dfrac{\cos x - \sqrt[3]{\cos x}}{\mathrm{sen}^2\,x}$
4. $\dfrac{1}{\mathrm{sen}^3\,x}\cdot\dfrac{\tan x - \mathrm{sen}\,x}{1+\mathrm{sen}\,x}$
5. $\dfrac{1-\tan(x+\pi/4)}{\mathrm{sen}\,x}$
6. $\dfrac{\tan^3 x - \mathrm{sen}^3\,x}{(1-\cos x)^2}$
7. $\dfrac{1-\cot^3 x}{2-\cot x - \cot^2 x}$
8. $\dfrac{\tan(2x)\cot(x+\pi/4)}{(1-\tan x)\sec(2x)}$
9. $\dfrac{\mathrm{sen}\,(4x) + \mathrm{sen}^2\,(2x) - 2\,\mathrm{sen}\,(2x)}{\cos(2x) - \cos^2(2x)}$
10. $\dfrac{\tan x - \mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}^3\,x} + \dfrac{\cos(2x) - \cos x}{\mathrm{sen}^2\,x}$
11. $\mathrm{sen}\,(\pi+x)\cdot\csc(\pi-x)\cdot\mathrm{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$
12. $2\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{5\pi}{2}\right) + 4\cos\pi - 2\tan(3\pi+\alpha) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) + 4\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{7\pi}{2}\right)$
13. $\dfrac{\cos(2x)}{\mathrm{sen}^2\,x} - \dfrac{\cot x}{\mathrm{sen}\,x}$
14. $\tan(-x)\cdot\cot\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) - \cot\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) - \tan(\pi-x)$
15. $(\tan x - \tan a)\cdot\cot(x-a)$

16. $\dfrac{\frac{1}{x}\tan\left(\pi + x^2\right)}{\operatorname{sen}(\pi x)}$ 17. $a^2\cos(\pi + x) + b^2\cos(\pi - x) - 2ab\operatorname{sen}(-x)\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

18. $\dfrac{a^2\cot(\pi + x) + b^2\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{(a-b)\cot(\pi - x)} + \dfrac{(a+b)\tan\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)}{\tan\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)}$ 19. $\dfrac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \dfrac{1}{1 - \cos x}$

20. $-2\cos x \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos\left(\cos^2 x\right) \cdot \cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right) - 2\operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2 x\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\cos^2 x\right)$

21. $\dfrac{2\cos^2 x - \cos x - 3}{1 - \cos^2 x} + \dfrac{2\cot x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}$ 22. $\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + x}{x^2 - 1}\right)\left(\dfrac{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2}{1 - \operatorname{sen}^2(2x)}\right)$

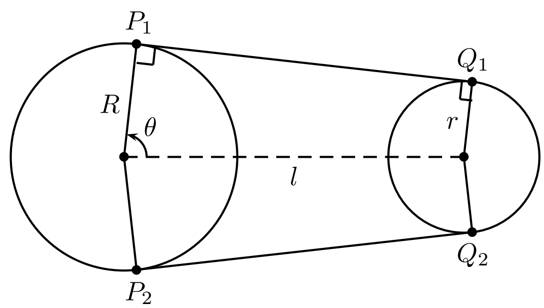
23. $\dfrac{\tan(2x)\cot(x + \pi/4)}{(1 - \tan x)\sec(2x)} \cdot \left\{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{sen}(x + \pi)\right\}$

42. Si $3\tan\alpha = \sec\alpha$, con $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Hallar los valores de

a. $\cot\alpha$ *b.* $\cos\alpha$ *c.* $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ *d.* $(\tan\alpha + \sec\alpha)^2 - 2$

43. Si $p\cos\alpha = q\operatorname{sen}\alpha$, con $p, q > 0$, $0 < \alpha < 90°$. Calcule el valor de $p^2\operatorname{sen}^2\alpha - q^2\cos^2\alpha$.

44. Dos poleas están separadas a una distancia l, desde sus centros. ¿Cuál es la longitud de una correa inextensible teórica que debe transmitir el movimiento de una a la otra en el mismo sentido, si los radios de las poleas son $R = \dfrac{3}{5}l$ y $r = \dfrac{1}{10}l$?



45. Demostrar que si $a\cos^2\alpha + b\operatorname{sen}^2\alpha = c$, entonces $\tan^2\alpha = \dfrac{c-a}{b-c}$.

46. El seno de un ángulo es a su tangente como 3 es a 5. Hallar el seno y la cotangente del ángulo.

47. Un hombre está de pie en un punto A de la ribera de un río de orillas paralelas y observa que la recta que une A con un punto B de la ribera opuesta forma un ángulo de $30°$ con la orilla en la que él se encuentra. El hombre camina por la orilla hacia un punto D, que se encuentra al frente de B. Cuando ha caminado 200 metros el ángulo que vio anteriormente ha aumentado a $60°$. Determine el ancho del río.

48. Demuestre que si $2\left(\cot^2\beta - \cot^2\alpha\right) = \cot^2\beta\ \csc^2\alpha$, entonces $\operatorname{sen}^2\alpha = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta$.

49. Demuestre que si $\cot\alpha = \dfrac{1 - a\cos\beta}{a\operatorname{sen}\beta}$ y $\cot\beta = \dfrac{1 - b\cos\alpha}{b\operatorname{sen}\alpha}$, entonces $a\operatorname{sen}\beta = b\operatorname{sen}\alpha$.

50. Demuestre que si $A = \dfrac{\sec^4\alpha + 2\tan^4\alpha - 2\tan^2\alpha - 1}{5\tan^4\alpha}$, entonces A es independiente de α, es decir, A es una constante. Hallar el valor de esa constante.

51. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para $0 \leq x \leq 2\pi$

1. $-2\operatorname{sen}(2x)\cdot \sec x = 0$ 2. $2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$ 3. $2\cos x - 2\cos(2x) = 0$

4. $\dfrac{1}{\sec^2 x - 3} = 1$ 5. $r^2\cos x + r^2\cos(2x) = 0$ 6. $2\operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$

7. $4\operatorname{sen}^2 x\cdot\tan x - \tan x = 0$ 8. $\dfrac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)} = \dfrac{\tan x}{2\cos x}$ 9. $\cot x - \tan x = \dfrac{2\cos(2x)}{1-\cos(2x)}$

52. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas para x en $\mathbb{R}$.

1. $\operatorname{sen} x = 0$ 2. $\cos x = 0$ 3. $\tan x = 0$ 4. $\sec x = 0$ 5. $\csc x = 0$

6. $\cot x = 0$ 7. $\operatorname{sen} x = 1$ 8. $\cos x = 1$ 9. $\tan x = 1$ 10. $\sec x = 1$

11. $\csc x = 1$ 12. $\cot x = 1$ 13. $\operatorname{sen} x = -1$ 14. $\cos x = -1$ 15. $\tan x = -1$

16. $\sec x = -1$ 17. $\csc x = -1$ 18. $\cot x = -1$ 19. $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ 20. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$

21. $\sec x = \operatorname{sen} x$ 22. $\tan x = 2\operatorname{sen} x$ 23. $\cos x - \cot x = 0$ 24. $\operatorname{sen} x + \csc x = 0$

25. $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 26. $\operatorname{sen} x - \cos x = 0$ 27. $\sec x - \dfrac{2\sqrt{3}}{3} = 0$ 28. $\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$

29. $\sec x - \tan x = \cos x$ 30. $2\operatorname{sen} x + 2\cos x = \sqrt{2}$ 31. $\tan x - \cot x = \csc x$

32. $\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x = 0$ 33. $2\operatorname{sen}\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ 34. $\cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) = 0$

35. $\tan^2 x + \tan x = 0$ 36. $\sqrt{3}\operatorname{sen}(2x) + \cos(2x) = 2$ 37. $6\operatorname{sen}^2 x - 3\operatorname{sen}(2x) = 0$

38. $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$ 39. $\operatorname{sen}(2x) = -\sqrt{3}\cos x$ 40. $2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x = 0$

41. $2\cos^3 x + \operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$ 42. $2\cos^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ 43. $6\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + \cos x - 1 = 0$

44. $4\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{x}{2}\right) + 2\cos x = 3$ 45. $1 + \cos x + \cos(2x) = 0$ 46. $\cos(2x) = 5 - 6\cos^2 x$

47. $\cos(2x) - 3\operatorname{sen} x + 1 = 0$ 48. $(1+\cot x)(\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 1 - \cot x$

49. $\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 1 + \cos(2x)$ 50. $2\operatorname{sen}\left(\dfrac{3x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}\right) = \operatorname{sen} x$

51. $4\cos^4 x - \cos^2 x = \dfrac{3}{2}$ 52. $\cos(2x) = 1 + 4\operatorname{sen} x$ 53. $\cos x = \dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}$

54. $\cos(4x) = \operatorname{sen}(2x)$ 55. $2\operatorname{sen} x = \tan(2x)$ 56. $\cos x\ \cos(2x) + \cos^2 x = 0$

57. $\operatorname{sen}(3x) + \operatorname{sen}(5x) = 0$ 58. $\tan^5 x - 9\tan x = 0$ 59. $\tan(2x) + 2\cos x = 0$

60. $2\operatorname{sen} x + 3\sqrt{\operatorname{sen} x} = 0$ 61. $\operatorname{sen}^4 x + \cos^4 x = \dfrac{1}{2}$ 62. $\sqrt{\dfrac{1+2\cos x}{2}} = 1$

53. Demuestre la identidad trigonométrica

$$\frac{\tan x + \sec x - 1}{\tan x - \sec x + 1} = \frac{\operatorname{sen} x + 1}{\cos x}$$

y use esta identidad para resolver la ecuación

$$\tan x + \sec x - 1 = 2(\operatorname{sen} x + \cos x - 1).$$

54. Resolver, considerando x un ángulo ágsince

$$a. \quad \frac{2\tan^2 x}{\tan^2 x + 1} - \frac{4-\sqrt{3}}{\sec x} = 2\left(1-\sqrt{3}\right) \qquad\qquad b. \quad \cot x - \sqrt{3}\tan x + 1 = \sqrt{3}$$

55. Resolver los siguientes sistemas

$$1. \begin{cases} \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = \dfrac{3}{4} \\ \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad 2. \begin{cases} \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \\ \operatorname{sen}(x-y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad 3. \begin{cases} \cos x \ \cos y = \dfrac{1}{2} \\ \tan x + \tan y = 2 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1 \\ 2x + 2y = \pi \end{cases} \qquad 5. \begin{cases} \operatorname{sen} x \ \cos y = \dfrac{3}{4} \\ \cos x \ \operatorname{sen} y = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad 6. \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = 2 \\ x - y = \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

56. ¿Qué ángulo forman las agujas del reloj a la una y media?

57. Calcular el valor de A, si

$$A = \cos(0^\circ) - 3\operatorname{sen}(90^\circ) + 2\tan(135^\circ) - \cos(120^\circ) - 4\cos(270^\circ).$$

58. Si $\operatorname{sen}(12^\circ) = \dfrac{1}{5}$ y $\cos(28^\circ) = \dfrac{2}{5}\sqrt{5}$. Calcular

1. $\operatorname{sen}(40^\circ)$ 2. $\tan(14^\circ)$ 3. $\cot(16^\circ)$ 4. $\sec(24^\circ)$ 5. $\cos(62^\circ)$

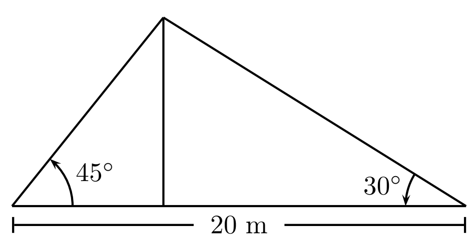
59. Uno de los lados de un triángulo es el doble del otro y el ángulo comprendido entre ellos es 60°. Resolver el triángulo.

60. Una escalera de bomberos de 10m de longitud se ha fijado en un punto de la calzada. Si se apoya sobre una de las fachadas forma un ángulo, con el suelo, de 45° y si se apoya sobre la otra fachada forma un ángulo de 30°. Hallar la anchura de la calle. ¿Qué altura se alcanza con dicha escalera sobre cada una de las fachadas?

61. Conocidos los lados $a = \sqrt{6}$m y $b = \sqrt{3}$m de un triángulo ABC y sabiendo que el ángulo $\angle BAC$ es el doble del ángulo $\angle ABC$. Calcular el lado c y los ángulos del triángulo.

62. Desde la parte superior de un faro de 50m de altura sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión del barco es 30° y el ángulo de depresión de la playa es 60°. Hallar la distancia del barco a la playa.

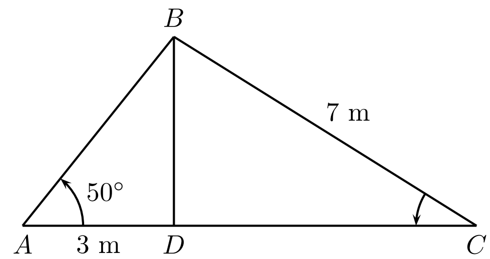
63. Se coloca un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto mide el mástil y el cable?



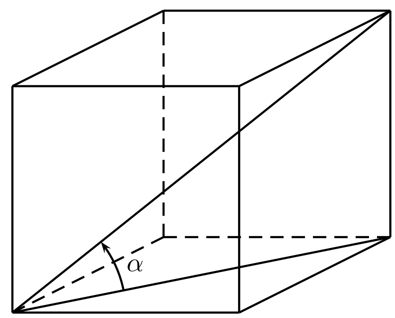
64. Una estatua de 2.5m está colocada sobre un pedestal. Desde el´punto del suelo se ve el pedestal bajo un ángulo de 15° y la estatua bajo un ángulo de 40°. Calcular la altura del pedestal.

65. Un avión vuela entre dos ciudades A y B que distan 80km. Las visuales desde el avión a la ciudad A y a la ciudad B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?

66. Calcular los lados y los ángulos del triángulo ABC.



67. Hallar el ángulo que forma la diagonal de la cara de un cubo con la diagonal del cubo



68. Calcular el área de un decágono regular de lado 8 cm.

69. Se $\cot\alpha$ es negativa. ¿Qué signo tendrá el producto $\sec\alpha\ \csc\alpha$?

70. Si la medida de un ángulo aumenta de $0°$ a $90°$, su coseno ¿aumenta o disminuye?

71. Si $\tan\alpha = 3$, ¿cuánto vale $\tan(180° - \alpha)$?

72. Sabemos que $\operatorname{sen}\beta = 0.2$ y está en el primer cuadrante. ¿Cuánto vale $\cos(90° + \beta)$ y $\operatorname{sen}(180° + \beta)$?

73. ¿Puede un triángulo tener lados de 12, 7 y 3 cm, respectivamente? Razona la respuesta.

74. ¿Cuántas soluciones tiene una ecuación de la forma $\cos\alpha = k$, con $k > 1$?. ¿Y si $-1 \leq k \leq 1$?

75. Expresa la forma general de todos los ángulos cuyas razones trigonométricas coinciden con

a. $1111°$ *b.* $6200°$ *c.* $\dfrac{10\pi}{3}$rad.

76. ¿Existe algún ángulo cuyo seno coincida con su secante?

77. Si $\operatorname{sen}\alpha = 1.2$, ¿cuánto vale, sin realizar ningún cálculo, $\tan(2\alpha)$?

78. En un triángulo $a = 2b$ y $C = 60°$. ¿Cuánto miden los ángulos B y A?

79. Demuestre que si A, B y C son los ángulos de un triángulo, se verifica:

$$\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}C = 0.$$

80. Si $\operatorname{sen}\alpha = m$ y $\cos\alpha < 0$, entonces $\operatorname{sen}(2\alpha)$ es

a. $-2m\sqrt{1-m^2}$ *b.* $2m\sqrt{1-m^2}$ *c.* $-2\sqrt{1-m^2}$ *d.* $2m$

81. El valor de $\cos(48°)\ \cos(18°) + \operatorname{sen}(48°)\ \operatorname{sen}(18°)$ es

a. $\dfrac{1}{2}$ *b.* $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *c.* $-\dfrac{1}{2}$ *d.* mayor que 1

82. En un triángulo PQR se conocen los lados $\overline{PR}$, $\overline{PQ}$ y el ángulo $\angle RPQ$. La fórmula que permite conocer directamente $\overline{QR}$ es

(a) $\overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2 - 2\left(\overline{PR}\right)\left(\overline{PQ}\right)\cos\left(\angle RPQ\right)$.

(b) $\overline{QR}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{PQ}^2 + 2\left(\overline{PR}\right)\left(\overline{PQ}\right)\cos\left(\angle RPQ\right)$.

(c) $\overline{QR} = \overline{PR}\,\dfrac{\operatorname{sen}\left(\angle RPQ\right)}{\operatorname{sen}\left(\angle PQR\right)}$.

(d) $\overline{QR} = \overline{PR}\ \operatorname{sen}\left(\angle RPQ\right)$.

83. En un triángulo ABC se conocen $a = 2$, $b = 3$ y $c = 6$. Entonces puede asegurarse que

a. $\cos\left(\angle BAC\right) = \dfrac{36}{41}$ *b.* $\cos\left(\angle BAC\right) = \dfrac{41}{36}$ *c.* ABC no tiene solución

d. ABC es un triángulo rectángulo

84. Si en el triángulo PQR, $p = q = 45$, se puede afirmar que

a. $\angle RPQ = \angle QRP$ *b.* $\angle RPQ = \angle PQR$ *c.* $r > p$

d. Nada de lo anterior, porque no hay suficientes datos

85. Si en el triángulo MNP, $m = 45$, $n = 36$, $\angle NPM = 179^\circ$, se puede asegurar que

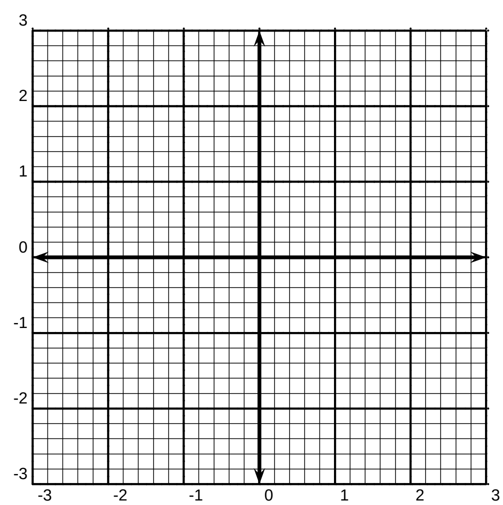
a. No hay solución. *b.* Hay dos soluciones. *c.* MNP es isósceles.

d. Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

86. Considere la **Función trigonométrica Seno :** $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Seno $f(x) = \operatorname{sen}(x)$; $P(x,y) = (x, \operatorname{sen}(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

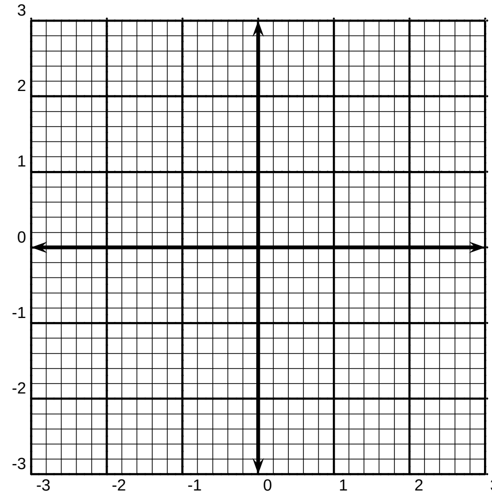
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

87. Considere la **Función trigonométrica Coseno :** $f(x) = \cos(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Coseno $f(x) = \cos(x)$; $P(x, y) = (x, \cos(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

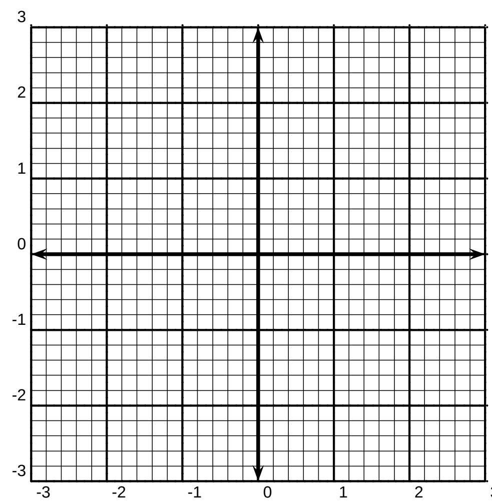
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

88. Considere la **Función trigonométrica Tangente :** $f(x) = \tan(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Tangente $f(x) = \tan(x)$; $P(x, y) = (x, \tan(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

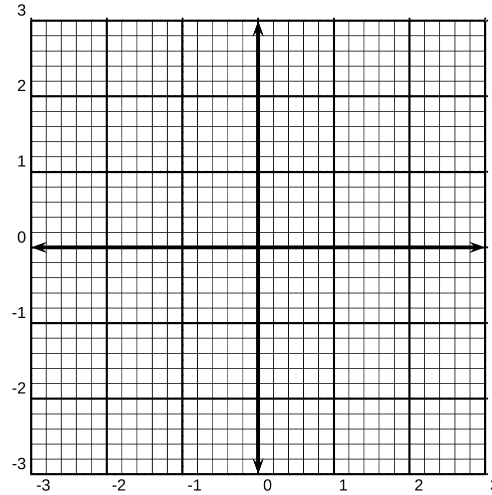
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

89. Considere la **Función trigonométrica Cosecante :** $f(x) = \csc(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Cosecante $f(x) = \csc(x)$; $P(x, y) = (x, \csc(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

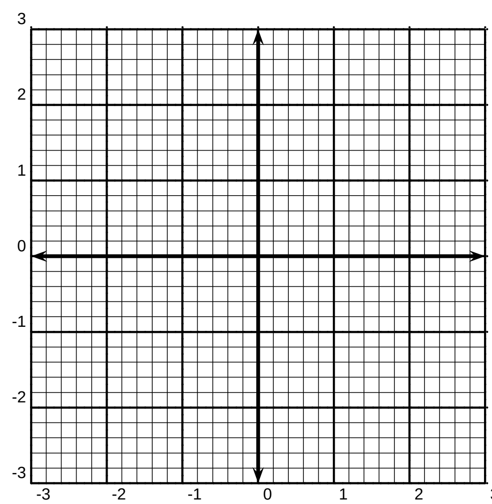
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

90. Considere la **Función trigonométrica Secante :** $f(x) = \sec(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Secante $f(x) = \sec(x)$; $P(x, y) = (x, \sec(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

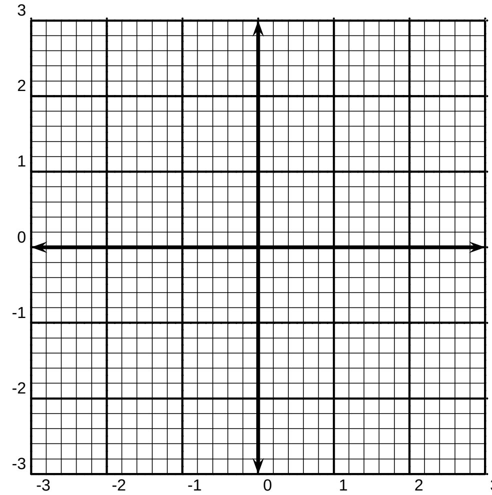
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

91. Considere la **Función trigonométrica Cotangente :** $f(x) = \cot(x)$.

x	$f(x)$
$-\dfrac{3\pi}{2}$	
$-\pi$	
$-\dfrac{\pi}{2}$	
0	

x	$f(x)$
$\dfrac{\pi}{4}$	
$\dfrac{\pi}{2}$	
π	
$\dfrac{3\pi}{2}$	



Función trigonométrica Cotangente $f(x) = \cot(x)$; $P(x, y) = (x, \cot(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

92. Sea $f(x) = \cos x$. Calcular: **a)** $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$; **b)** $3 - f(\pi)$; **c)** $3 + f\left(\dfrac{11\pi}{2}\right)$; **d)** $\dfrac{f(\pi - x) - f(\pi)}{x}$.

93. Sea $f(x) = \operatorname{sen}^2(\pi x)$. Calcular: **a)** $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$; **b)** $-f(3)$; **c)** $1 - f\left(\dfrac{33}{2}\right)$; **d)** $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

94. Determine cuales de las siguientes funciones son pares, impares ó ninguna de ellas

1. $f(x) = \tan x$
2. $f(x) = \sec x$
3. $f(x) = \csc x$
4. $f(x) = \cot x$
5. $g(x) = \dfrac{x^3 + x}{x + \operatorname{sen} x}$
6. $f(x) = \operatorname{sen}(3x) + 2x^2$
7. $f(x) = \dfrac{|x| - x^2}{\operatorname{sen} x + \cos x}$
8. $f(x) = \sqrt{x} - x\cos x$
9. $f(x) = x^5 - 6x^9 + \dfrac{\operatorname{sen} x}{(1 + x^4)^4}$
10. $f(x) = \dfrac{\tan x}{\sec x - x^2}$

95. Determine cuáles de las siguientes funciones son periódicas y su correspondiente período.

1. $f(x) = \cos(2\pi x)$
2. $f(x) = 3\cos\left(\dfrac{4x}{L}\right)$
3. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$
4. $f(x) = \cos(5x) - \operatorname{sen}(4x)$
5. $f(x) = 5 + \operatorname{sen}\left(x^2\right)$
6. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$

96. Hallar las funciones que al componerlas se obtenga

1. $f(x) = \cos^2(\operatorname{sen} x)$
2. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$
3. $f(x) = \cos\left(\operatorname{sen} x^2\right)$
4. $f(x) = \operatorname{sen}(1 - \tan x)$
5. $h(x) = \cos\left(1 - \sqrt{x+3}\right)$
6. $g(x) = -\operatorname{sen}\left(\sqrt{x-5} - 2\right)$

7. $g(x) = \sec^6\left(x^2 - 5x + 6\right)$ 8. $h(x) = 3 - \dfrac{3 - \cos x}{\cos x + 5}$ 9. $f(x) = \operatorname{sen}\left(\sqrt[3]{3x^2 + 5}\right)$

10. $g(x) = -\sqrt{1 - \cot^2\left(x^2 - 2x - 3\right)}$ 11. $f(x) = \sqrt[3]{\cos\sqrt{\cos(2 - \cos x)}}$

12. $h(x) = \cos^4\left(\operatorname{sen}^2 x\right)$ 13. $g(x) = \operatorname{sen}\left(\operatorname{sen}^2\left(x^2\right)\right)$ 14. $g(x) = \csc\sqrt{\tan\left(x^2 + 3\right)} + 8$

97. Determine el dominio de las siguientes funciones

1. $f(x) = \tan x$ 2. $f(x) = \sec x$ 3. $f(x) = \csc x$ 4. $f(x) = \cot x$

5. $g(x) = \cos\left(\dfrac{x - 5}{x^2 - x}\right)$ 6. $f(x) = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x + 1}$ 7. $f(x) = \dfrac{3 - \operatorname{sen}\left(\sqrt{x + 5} - 2\right)}{\sqrt{7 - 2x}}$

8. $f(x) = \sqrt[4]{\operatorname{sen} x} - \sec x$ 9. $f(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen} x}$ 10. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen} x}}$

11. $h(x) = \cos\left(\sqrt{x^2 + 5x + 6}\right) - \tan(2x)$ 12. $f(x) = \sqrt{\sqrt{-x} + 3} + \sqrt[3]{x} - \sec(2x)$

13. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} + \cos x}{\operatorname{sen} x + 1}$

98. Sean

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{|x|} & \text{si} \quad 0 < |x| \leq 1 \\ 5x & \text{si} \quad 1 < |x| \end{cases}$$

y $g(x) = \cos x$ si $|x| \leq \dfrac{\pi}{2}$. Encuentre $f \circ g$, si es posible, y determine su dominio.

99. Encuentre $h(x) = g(f(x))$, si es posible y determinar su dominio, donde $f(x) = \sqrt{-x}$ y

$$g(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{si} \quad x < -\pi \\ \cos x & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0. \end{cases}$$

100. Estudie la inyectividad de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ si $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

101. Estudie la inyectividad de la función $f(x) = \cos x$ si $x \in [0, \pi]$.

102. Estudie la inyectividad de la función $f(x) = \tan x$ si $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

103. Hallar los valores de las otras funciones trigonométricas, si $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{7}$. con $x \geq 0$.

104. Señala la afirmación correcta

a. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$ *b.* $\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ *c.* $\operatorname{sen}(\pi + \alpha) = \cos\alpha$

d. nada de lo anterior es correcto

Respuestas: Ejercicios

1.1. $\frac{1}{6}\pi$ rad; 1.2. $\frac{1}{4}\pi$ rad; 1.3. $\frac{1}{3}\pi$ rad; 1.4. $\frac{1}{2}\pi$ rad; 1.5. $\frac{1}{12}\pi$ rad; 1.6. $\frac{1}{9}\pi$ rad; 1.7. π rad;
1.8. $\frac{3}{2}\pi$ rad; 1.9. $\frac{13}{18}\pi$ rad; 1.10. 4π rad; 1.11. $\frac{7}{4}\pi$ rad; 1.12. $-\frac{1}{6}\pi$ rad; 1.13. $\frac{7}{6}\pi$ rad; 1.14. $\frac{5}{9}\pi$ rad;
1.15. $-\frac{5}{18}\pi$ rad; 1.16. $\frac{5}{6}\pi$ rad; 1.17. $\frac{5}{18}\pi$ rad; 1.18. $\frac{2}{3}\pi$ rad; 1.19. $\frac{14}{9}\pi$ rad; 1.20. $-\frac{4}{9}\pi$ rad;
1.21. $-\frac{5}{36}\pi$ rad; 1.22. $\frac{23}{18}\pi$ rad; 1.23. $\frac{16}{9}\pi$ rad; 1.24. $-\frac{1}{4}\pi$ rad; 1.25. 2π rad; 1.26. $\frac{17}{9}\pi$ rad;

1.27. $\frac{55}{18}\pi$ rad; 1.28. $\frac{9}{4}\pi$ rad; 1.29. $\frac{59}{36}\pi$ rad; 1.30. $\frac{35}{18}\pi$ rad; 2.1. 180°; 2.2. 90°; 2.3. 60°;
2.4. 45°; 2.5. 36°; 2.6. 30°; 2.7. 540°; 2.8. 120°; 2.9. 18°; 2.10. 135°; 2.11. 270°;
2.12. 360°; 2.13. 72°; 2.14. 720°; 2.15. 1260°; 2.16. -90°; 2.17. 126°; 2.18. 20°; 2.19. 108°;
2.20. 450°; 2.21. 225°; 2.22. -135°; 2.23. $\left(\frac{1260}{11}\right)^{\circ}$; 2.24. 80°; 2.25. 54°; 2.26. 144°; 2.27. 300°;
2.28. -240°; 2.29. 405°; 2.30. $36\,000^{\circ}$; 3.1. 1^{er} cuadrante; 3.2. 2^{do} cuadrante; 3.3. Ningún cuadrante;
3.4. Ningún cuadrante; 3.5. 4^{to} cuadrante; 3.6. 3^{er} cuadrante; 3.7. 4^{to} cuadrante; 3.8. Ningún cuadrante;
3.9. 2^{do} cuadrante; 3.10. Ningún cuadrante; 3.11. 4^{to} cuadrante; 3.12. 4^{to} cuadrante; 3.13. 1^{er} cuadrante;
3.14. 2^{do} cuadrante; 3.15. 1^{er} cuadrante; 3.16. Ningún cuadrante; 3.17. Ningún cuadrante; 3.18. 3^{er} cuadrante;
3.19. 2^{do} cuadrante; 3.20. 2^{do} cuadrante; 3.21. 1^{er} cuadrante; 3.22. 2^{do} cuadrante; 3.23. 1^{er} cuadrante;
3.24. 2^{do} cuadrante; 3.25. 3^{er} cuadrante; 3.26. Ningún cuadrante; 3.27. 1^{er} cuadrante; 3.28. 1^{er} cuadrante;
3.29. 4^{to} cuadrante; 3.30. 4^{to} cuadrante; 4.a. $\operatorname{sen}(0)=0$, $\cos(0)=1$, $\tan(0)=0$, $\sec(0)=1$, $\csc(0)$ No definido, $\cot(0)$ No definido; 4.b. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sec\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$, $\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$;
4.c. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $\csc\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$, $\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$;
4.d. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$, $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$, $\csc\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\cot\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$;
4.e. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ No definido, $\sec\left(\frac{\pi}{2}\right)$ No definido, $\csc\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$;
6.1. $\frac{3}{4}$; 6.2. $2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$; 6.3. 9; 6.4. 12; 6.5. $3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$; 6.6. $\frac{9}{2}$; 6.7. $\frac{9}{4}$; 6.8. $\frac{11}{4}$; 6.9. $\frac{17}{2}$;
6.10. 5; 6.11. 5; 6.12. $\frac{3}{10}$; 6.13. $\frac{13}{9}$; 6.14. $\frac{7}{72}$; 6.15. $\frac{1}{9}\left(\sqrt{3}+1\right)$; 9.1. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$; 9.2. $\frac{1}{2}$;
9.3. $\sqrt{3}-2$; 9.4. $-\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$; 9.5. $\sqrt{2}+\sqrt{6}$; 9.6. $\sqrt{2}$; 9.7. $2-\sqrt{3}$; 9.8. $-\sqrt{2}$; 9.9. $2-\sqrt{3}$;
9.10. $\sqrt{6}-\sqrt{2}$; 10.1. $\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$; 10.2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10.3. $6-\frac{10}{3}\sqrt{3}$; 10.4. $5\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$;
10.5. $\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}-4$; 10.6. $\frac{7}{2}\sqrt{3}+3\sqrt{6}-3\sqrt{2}$; 10.7. $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\sqrt{3}$; 10.8. $\frac{1}{2}-2\sqrt{3}$; 10.9. $-2\sqrt{2}-\frac{1}{3}$;
10.10. $\frac{25}{2}$; 10.11. $\frac{1}{6}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{6}\sqrt{6}-1$; 10.12. $-\frac{1}{2}$; 10.13. $\frac{9}{4}$; 10.14. $\frac{9}{10}$; 10.15. $\frac{1}{4}\sqrt{3}+2$;
10.16. $1-\frac{1}{4}\sqrt{2}$; 10.17. 3; 10.18. $\frac{7}{26}\sqrt{6}-\frac{20}{39}\sqrt{3}-\frac{11}{78}\sqrt{18}+\frac{8}{13}$; 10.19. $\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{2}{3}\sqrt{3}$; 10.20. $-4\sqrt{3}$;
10.21. $\frac{2}{19}\left(\sqrt{3}+1\right)$; 10.22. 2; 10.23. $\frac{7}{40}$; 10.24. $\frac{1}{2}$; 11.1. 2^{do} cuadrante; 11.2. 3^{er} cuadrante;
11.3. 4^{to} cuadrante; 12.1. $\frac{2}{3}\pi$ rad; 12.2. $\frac{5}{3}\pi$ rad; 12.3. $\frac{19}{12}\pi$ rad; 12.4. $-\frac{5}{6}\pi$ rad; 12.5. $\frac{1}{3}\pi$ rad;
12.6. $\frac{7}{9}\pi$ rad; 13.a. $\alpha=\frac{\pi}{4}$ rad; 13.b. $\alpha=\frac{4}{9}\pi$ rad; 13.c. $\alpha=\pi$ rad; 14. $\theta=\frac{360^{\circ}}{\pi}=114.59^{\circ}$; 15. 100;
17. $\cos\alpha=-\frac{3}{13}\sqrt{13}$, $\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\csc\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\sec\alpha=-\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\cot\alpha=\frac{3}{2}$; 18. $\cos\beta=-\frac{4}{5}$, $\operatorname{sen}\beta=\frac{3}{5}$, $\tan\beta=-\frac{3}{4}$, $\csc\beta=\frac{5}{3}$, $\cot\beta=-\frac{4}{3}$; 19. $\operatorname{sen}\beta=-\frac{2xy}{x^2+y^2}$; 20. $\operatorname{sen}\alpha=\frac{2xy}{x^2+y^2}$; 21. $\cot x=\frac{3}{4}$, $\sec x=-\frac{5}{3}$, $\cos x=-\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen} x=-\frac{4}{5}$, $\csc x=-\frac{5}{4}$; 22. $\cos x=-\frac{14}{25}$, $\operatorname{sen} x=\frac{\sqrt{429}}{25}$, $\csc x=\frac{25}{429}\sqrt{429}$, $\cot x=-\frac{14}{429}\sqrt{429}$, $\tan x=-\frac{\sqrt{429}}{14}$; 23. $\tan\alpha=3$, $\sec\alpha=\sqrt{10}$, $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{sen}\alpha=\frac{3}{10}\sqrt{10}$, $\csc\alpha=\frac{\sqrt{10}}{3}$; 24.$a$. $\operatorname{sen}(70^{\circ})=0.94$, $\cos(70^{\circ})=0.34$, $\tan(70^{\circ})=2.764\,7$; 24.$b$. $\operatorname{sen}(110^{\circ})=0.94$, $\cos(110^{\circ})=-0.34$, $\tan(110^{\circ})=-2.764\,7$;
24.c. $\operatorname{sen}(160^{\circ})=0.34$, $\cos(160^{\circ})=-0.94$, $\tan(160^{\circ})=-0.361\,7$; 24.$d$. $\operatorname{sen}(200^{\circ})=-0.34$, $\cos(200^{\circ})=-0.94$, $\tan(200^{\circ})=0.361\,7$; 24.$e$. $\operatorname{sen}(340^{\circ})=-0.34$, $\cos(340^{\circ})=0.94$, $\tan(340^{\circ})=-0.361\,7$; 25. $\operatorname{sen}(2\beta)=\pm\frac{24}{25}$, $\cos(2\beta)=\frac{7}{25}$, $\tan(2\beta)=\pm\frac{24}{7}$, $\sec(2\beta)=\frac{25}{7}$, $\csc(2\beta)=\pm\frac{25}{24}$, $\cot(2\beta)=\pm\frac{7}{24}$; 26.1. 3; 26.2. $-\frac{1}{3}$; 26.3. -3;
26.4. $\frac{1}{3}$; 26.5. $-\frac{1}{3}$; 26.6. 3; 27.a. $\tan(\alpha+2\beta)=-\frac{11}{2}$; 27.$b$. $\cot(2\alpha+\beta)=-\frac{13}{9}$; 27.$c$. $\cot(\alpha-\beta)=1$;
28.1. $\begin{cases}\frac{63}{65} & \text{si} \quad \cos x\operatorname{sen} y>0\\ -\frac{33}{65} & \text{si} \quad \cos x\operatorname{sen} y<0\end{cases}$; 28.2. $\begin{cases}\pm\frac{56}{65} & \text{si} \quad \cos x\operatorname{sen} y>0\\ \pm\frac{16}{65} & \text{si} \quad \cos x\operatorname{sen} y<0\end{cases}$; 28.3. $\pm\frac{24}{7}$; 28.4. $\pm\frac{119}{120}$; 28.5. $\frac{117}{125}$;
29.1. $\operatorname{sen}(x+y)=\frac{36}{325}$; 29.2. $\cos(x-y)=-\frac{253}{325}$; 30. $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\sec\alpha=-\frac{4}{7}\sqrt{7}$, $\csc\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\alpha=-\frac{3}{7}\sqrt{7}$, $\cot\alpha=-\frac{1}{3}\sqrt{7}$; 31.$a$. $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{48}{73}$; 31.$b$. $\cos(2\alpha)=\frac{55}{73}$; 31.$c$. $\tan(2\alpha)=\frac{48}{55}$; 32.1. $\operatorname{sen}(2\alpha)=\frac{40}{41}$;
32.2. $\operatorname{sen}(2\beta)=-\frac{12}{49}\sqrt{10}$; 32.3. $\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\frac{2\sqrt{41}}{287}\left(5\sqrt{10}-6\right)$; 32.4. $\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{41}}{287}\left(8\sqrt{10}-15\right)$;
32.5. $\cos(2\alpha)=\frac{9}{41}$; 32.6. $\cos(2\beta)=-\frac{31}{49}$; 32.7. $\cos(\alpha+2\beta)=\frac{\sqrt{41}}{2009}\left(48\sqrt{10}-155\right)$;
32.8. $\tan(\alpha-\beta)=-\frac{2}{415}\left(123\sqrt{10}+490\right)$; 32.9. $\tan(2\alpha)=\frac{40}{9}$; 32.10. $\cot(\alpha+\beta)=-\frac{1}{428}\left(123\sqrt{10}-490\right)$;
33. $\operatorname{sen}\beta=-\frac{1}{12}\sqrt{119}$, $\sec\beta=-\frac{12}{5}$, $\csc\beta=-\frac{12}{119}\sqrt{119}$, $\tan\beta=\frac{1}{5}\sqrt{119}$, $\cot\beta=\frac{5}{119}\sqrt{119}$; 34. $\tan\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sec\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{3}$, $\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{15}}{5}$, $\csc\alpha=\pm\frac{1}{2}\sqrt{10}$, $\operatorname{sen}\alpha=\pm\frac{\sqrt{10}}{5}$; 35. $\frac{\operatorname{sen}^4(2\beta)}{16}$; 36.1. $\frac{3\cot^2\alpha-\cot^4\alpha+1}{\left(\cot^2\alpha+1\right)\cot^2\alpha}$;

36.2. $\frac{\cot^2\alpha-\cot^6\alpha+1}{\cot^4\alpha}$; 38.1. $\cos^2 x+2\cos x+1$; 38.2. $1-\operatorname{sen}(2x)$; 38.3. $\sec^2 x+\csc^2 x$; 38.4. $\operatorname{sen}^2 x$;

38.5. $-\tan^2\alpha$; 38.6. $-\cos(2x)$; 38.7. $4\cos^2 x-2\cos^4 x-\cos^3 x-1$; 38.8. $\tan^2(2\alpha)-\tan^2(\alpha/2)$;

38.9. $\operatorname{sen}^2 x-5\operatorname{sen} x+6$; 38.10. $-\operatorname{sen}^4 x-\operatorname{sen}^3 x+3\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x-2$; 39.1. $(\cos x+2)(\cos x+1)$;

39.2. $(\tan x+2)(\tan x-1)$; 39.3. $2(\cos x+1)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)$; 39.4. $2\left(\tan x-\frac{1}{2}\right)(\tan x-1)$; 39.5. $(\operatorname{sen} x+1)^2$;

39.6. $(1-\cos x)\left(\cos^2 x+\cos x+1\right)$; 39.7. $(\operatorname{sen} x+2)\left(\operatorname{sen}^2 x-2\operatorname{sen} x+4\right)$; 39.8. $\left(\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen} x+1\right)(\operatorname{sen} x+1)\operatorname{sen} x$;

39.9. $(4\sec x-1)(2\sec x-3)$; 39.10. $(\tan x-\operatorname{sen} x)\left(\tan^2 x+\tan x\operatorname{sen} x+\operatorname{sen}^2 x\right)$; 39.11. $\sec^2 x+\tan^2 x$;

39.12. $\left(\csc(2x)-\sqrt{2}\cos x\right)\left(\csc(2x)+\sqrt{2}\cos x\right)$; 39.13. $(\tan(2x)-\tan x)(\tan(2x)+\tan x)$;

39.14. $2(\cos(ax)+\operatorname{sen}(ax))\operatorname{sen}(ax)$; 39.15. $2(\cos x-1)\operatorname{sen} a$; 39.16. $2\left(\operatorname{sen}(2x)-2\operatorname{sen}^2 x\right)\operatorname{sen}(2x)$;

39.17. $(1-2\operatorname{sen} x)(\cos(2x)+2)$; 39.18. $\left(\operatorname{sen}^2 x-\cos^2 x\right)^2$; 40.1. $\frac{2\cos x}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}+\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}$; 40.2. $\frac{2\sec x}{\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)}$;

40.3. $\frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen} x\ \cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}$; 40.4. $\frac{1-2\operatorname{sen} x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}(2x)\ \cos x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2(2x)}}$; 40.5. $-\frac{(\operatorname{sen} x+\cos x)\ \cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x}+\sqrt[3]{\operatorname{sen}^4 x\ \cos^4 x}+\sqrt[3]{\cos^4 x}}$;

41.1. $\frac{\cos x+1}{\cos x-1}$; 41.2. $\frac{\cos x-2}{\cos x-1}$; 41.3. $-\frac{1}{\cos x+\cos^{1/3} x+\cos^{-1/3} x}$; 41.4. $\frac{1}{(1+\cos x)\cos x}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{sen} x}$; 41.5. $\frac{2}{\operatorname{sen} x-\cos x}$;

41.6. $\frac{\left(1+\cos x+\cos^2 x\right)\tan^3 x}{1-\cos x}$; 41.7. $\frac{1+\cot x+\cot^2 x}{\cot x+2}$; 41.8. $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\tan x+1}$; 41.9. $\frac{2\cos x}{\cos x+\operatorname{sen} x}$; 41.10. $\frac{2\cos^2 x+\cos x+1}{(1+\cos x)\ \cos x}$;

41.11. $\cos x\ \operatorname{sen} x$; 41.12. $-2\tan\alpha-6$; 41.13. $-\frac{2\cos x+1}{1+\cos x}$; 41.14. $-\tan^2 x$; 41.15. $1+\tan x\ \tan a$;

41.16. $\frac{\tan\left(x^2\right)}{x\operatorname{sen}(\pi x)}$; 41.17. $-(b-a)^2\cos x$; 41.18. $-2(a+b)$; 41.19. $\frac{1}{1+\cos x}$; 41.20. $-\operatorname{sen}(2x)\ \cos(2(\cos(2x)))$;

41.21. $-\frac{3\cos x+4}{1+\cos x}$; 41.22. $\frac{1}{(x-1)(1-\operatorname{sen}(2x))}$; 41.23. $\operatorname{sen}(2x)\ \cos x$; 42.$a$. $\cot\alpha=2\sqrt{2}$; 42.b. $\cos\alpha=\frac{2}{3}\sqrt{2}$;

42.c. $\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2\sqrt{2}$; 42.$d$. $(\tan\alpha+\sec\alpha)^2-2=0$; 43. p^2-q^2; 44. $\left(\sqrt{3}+\frac{13}{15}\pi\right)l$; 46. $\operatorname{sen} x=\frac{4}{5}$, $\cot x=\frac{3}{4}$; 47. x : Ancho del rio. $x=100\sqrt{3}$; 50. $\frac{3}{5}$; 51.1. $x\in\{0,\pi,2\pi\}$; 51.2. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi,\frac{2}{3}\pi\right\}$;

51.3. $x\in\left\{\frac{3}{2}\pi,\frac{\pi}{6}\right\}$; 51.4. $x\in\left\{\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi\right\}$; 51.5. $x\in\left\{\frac{3}{2}\pi,\frac{7}{6}\pi\right\}$; 51.6. $x\in\left\{\frac{\pi}{2},\frac{7}{6}\pi,\frac{3}{2}\pi\right\}$; 51.7. $x\in\left\{0,\pi,\frac{\pi}{6},\frac{7}{6}\pi,2\pi\right\}$;

51.8. $x\in\left\{0,\pi,\frac{\pi}{6},2\pi\right\}$; 51.9. $x\in\left\{\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right\}$; 52.1. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.2. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.3. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.4. No tiene solución; 52.5. No tiene solución; 52.6. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\setminus\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$;

52.7. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.8. $x\in\{2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.9. $x\in\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.10. $x\in\{2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$;

52.11. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.12. $x\in\left\{-\frac{3}{4}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.13. $x\in\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.14. $x\in\{(2n+1)\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.15. $x\in\left\{n\pi-\frac{1}{4}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.16. $x\in\{(2n+1)\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$;

52.17. $x\in\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.18. $x\in\left\{-\frac{1}{4}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.19. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.20. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.21. No tiene solución; 52.22. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.23. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.24. $x\in\mathbb{R}\setminus\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.25. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.26. $x\in\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.27. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.28. $x\in\left\{-\frac{1}{2}\pi-\pi n\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.29. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\setminus\left\{\frac{1}{2}\pi\right\}$; 52.30. $x\in\left\{n\pi-\frac{1}{12}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{7}{12}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.31. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.32. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.33. $x\in\{2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{\frac{4}{3}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.34. $x\in\left\{\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.35. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{n\pi-\frac{1}{4}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.36. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.37. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{\frac{1}{4}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.38. $x\in\left\{2n\pi-\frac{1}{2}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.39. $x\in\left\{2n\pi-\frac{\pi}{3}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{4}{3}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.40. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{\pi}{6}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.41. $x\in\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{\pi}{3}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.42. $x\in\left\{2n\pi-\frac{\pi}{2}\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{\pi}{6}+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.43. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.44. No tiene solución; 52.45. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.46. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{5}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.47. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.48. $x\in\left\{-\frac{3}{4}\pi-n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.49. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.50. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.51. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{5}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.52. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.53. $x\in\left\{\frac{1}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.54. $x\in\left\{n\pi-\frac{1}{4}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{12}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{12}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.55. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{2}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.56. $x\in\{(2n+1)\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}\bigcup\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 52.57. $x\in\left\{\frac{1}{4}n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.58. $x\in\left\{n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.59. $x\in\left\{\frac{1}{2}\pi+n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{2n\pi-\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{7}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.60. $x\in\{n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\}$; 52.61. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{4}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{3}{4}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{4}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$;

52.62. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{3}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$; 54.$a$. $x=\frac{\pi}{6}$; 54.b. $x=\frac{\pi}{6}$;

55.1. $x\in\left\{2n\pi\pm\frac{1}{6}\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{5}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}\bigcup\left\{\frac{7}{6}\pi+2n\pi\mid n\in\mathbb{Z}\right\}$ y $y=(2n+1)\frac{\pi}{4}$, con$n\in\mathbb{Z}$;

55.2. $x \in \left\{-\frac{3}{4}\pi - n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $y \in \left\{-\frac{1}{4}\pi - n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 55.3. $x \in \left\{\frac{1}{4}\pi + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $y \in \left\{\frac{1}{4}\pi + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$;
55.4. $x \in \left\{\frac{1}{2}\pi + 2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $y \in \{-2n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$; 55.5. $x \in \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{12}\pi + n\pi\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{(-1)^{n+1}\left(\frac{5}{12}\pi + n\pi\right) \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $y \in \left\{(-1)^n \frac{1}{12}\pi + (1 + (-1)^n)\, n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{(-1)^n \frac{5}{12}\pi + (1 + (-1)^n)\, n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 55.6. $x \in \left\{-\frac{1}{2}\pi - \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ y $y \in \left\{-\frac{5}{6}\pi - n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$; 56. ; 57. $A = -\frac{7}{2}$; 58.1. $\operatorname{sen}(40^\circ) = \frac{2}{25}\sqrt{5}\left(1 + \sqrt{6}\right)$;
58.2. $\tan(14^\circ) = \frac{4\sqrt{6} - 6\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{6} + 12\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2}$; 58.3. $\cot(16^\circ) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{6} + 5\right)$; 58.4. $\sec(24^\circ) = \frac{25}{23}$; 58.5. $\cos(62^\circ) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$;
59. Rectangular. Tercer lado $\sqrt{3}x$; 60. Ancho de la calle : $5\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)$, Alturas : $5\sqrt{2}$, 5; 61. Lado : $c = \sqrt{3}$, Ángulos : $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ y $\angle ABC = \angle ACB = \frac{\pi}{4}$; 62. $\frac{100}{3}\sqrt{3}$; 63. Altura del mástil $= 10\left(\sqrt{3} - 1\right)$, Longitud del cable $= 10\left(\sqrt{3} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 2\right)$; 68. $\frac{160}{\tan(\pi/10)}$; 69. Negativa; 70. Disminuye;
71. -3; 72. $\cos(90^\circ + \beta) = -0.2$ y $\operatorname{sen}(180^\circ + \beta) = -0.2$; 73. No; 74. Si $k > 1$ No tiene solución, Si $-1 \leq k \leq 1$ Infinitas soluciones.; 75.*a.* $\frac{31}{180}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$; 75.*b.* $\frac{4}{9}\pi + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$;
75.*c.* $\frac{10\pi}{3} + 2n\pi$, con $n \in \mathbb{Z}$; 76. No existe; 77. No tiene solución; 78. $A = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$; 80. a.;
81. b.; 82. a.; 83. b.; 84. b.; 85. d.; 92.*a.* $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; 92.*b.* 4; 92.*c.* 3; 92.*d.* $\frac{1 - \cos x}{x}$;
93.*a.* 1; 93.*b.* 0; 93.*c.* 0; 93.*d.* $\frac{\operatorname{sen}^2(h\pi)}{h}$; 94.1. Impar; 94.2. Par; 94.3. Impar; 94.4. Impar;
94.5. Par; 94.6. Ninguna; 94.7. Ninguna; 94.8. Ninguna; 94.9. Impar; 94.10. Impar; 95.1. Período = 1;
95.2. Período = $\frac{\pi L}{2}$; 95.3. Período = 2π; 95.4. Período = 2π; 95.5. No es periódica; 95.6. No es periódica;
96.1. $g_1(x) = \operatorname{sen} x$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = x^2$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;
96.2. $g_1(x) = \operatorname{sen} x$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = \cos x$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;
96.3. $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$, $g_3(x) = \cos x$, $f(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;
96.4. $g_1(x) = \tan x$, $g_2(x) = -x$, $g_3(x) = 1 + x$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;
96.5. $g_1(x) = x + 3$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $g_3(x) = -x$, $g_4(x) = 1 + x$, $g_5(x) = \cos x$, $h(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;
96.6. $g_1(x) = x - 5$, $g_2(x) = \sqrt{x}$, $g_3(x) = x - 2$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $g_5(x) = -x$, $g(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;
96.7. $g_1(x) = x^2 - 5x + 6$, $g_2(x) = \sec x$, $g_3(x) = x^6$, $g(x) = g_3(g_2(g_1(x)))$;
96.8. $g_1(x) = \frac{3 - x}{x + 5}$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = -x$, $g_4(x) = 3 + x$, $h(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;
96.9. $g_1(x) = 3x^2$, $g_2(x) = x + 5$, $g_3(x) = \sqrt[3]{x}$, $g_4(x) = \operatorname{sen} x$, $f(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;
96.10. $g_1(x) = x^2 - 2x - 3$, $g_2(x) = \cot x$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = -x$, $g_5(x) = 1 + x$, $g_6(x) = -\sqrt{x}$, $g(x) = g_6(g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x))))))$;
96.11. $g_1(x) = \cos x$, $g_2(x) = 2 - x$, $g_3(x) = \sqrt{x}$, $g_4(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = g_4(g_1(g_3(g_1(g_2(g_1(x))))))$;
96.12. $g_1(x) = \operatorname{sen} x$, $g_2(x) = x^2$, $g_3(x) = \cos x$, $g_4(x) = x^4$, $h(x) = g_4(g_3(g_2(g_1(x))))$;
96.13. $g_1(x) = x^2$, $g_2(x) = \operatorname{sen} x$, $g(x) = g_2(g_1(g_2(g_1(x))))$;
96.14. $g_1(x) = x^2 + 3$, $g_2(x) = \tan x$, $g_3(x) = \sqrt{x}$, $g_4(x) = \csc x$, $g_5(x) = 8 + x$, $g(x) = g_5(g_4(g_3(g_2(g_1(x)))))$;
97.1. Dom $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 97.2. Dom $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 97.3. Dom $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi / n \in \mathbb{N}\}$;
97.4. Dom $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi / n \in \mathbb{N}\}$; 97.5. Dom $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; 97.6. Dom $f : \mathbb{R}$; 97.7. Dom $f : \left[-5, \frac{7}{2}\right)$;
97.8. Dom $f : [2n\pi, (2n+1)\pi] \setminus \left\{(4n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 97.9. Dom $f : \mathbb{R}$; 97.10. Dom $f : \mathbb{R} \setminus \left\{(4n+1)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$;
97.11. Dom $h : (-\infty, -3] \bigcup [-2, \infty) \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 97.12. Dom $f : (-\infty, 0] \setminus \left\{(2n+1)\frac{\pi}{4} / n \in \mathbb{N}, n < 0\right\}$
; 97.13. Dom $f : [0, \infty) \setminus \left\{(4n+3)\frac{\pi}{2} / n \in \mathbb{N}\right\}$; 98. $h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{si} \quad |x| = \frac{\pi}{2} \\ |\tan x| & \text{si} \quad |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$; Dom $h = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$;
99. No se puede componer; 103. $\cos x = \frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\tan x = \frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\cot x = \frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\sec x = \frac{7\sqrt{5}}{15}$, $\csc x = \frac{7}{2}$; 104. a.;

Bibliografía

1. **Baldor J. A.**: "*Geometría plana y del espacio y Trigonometría*". Décima novena Reimpresión. Publicaciones CULTURAL.
2. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
3. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

4. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
5. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
6. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
7. **Zegarra L.**: "*Trigonometríy Geometría Analítica*". http://www.luiszegarra.cl

---

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Matemática I - Guía 10

Funciones inversas.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.10

- Funciones inversas. Función invertible. Propiedades
- Funciones trigonométricas inversas. Operaciones. Propiedades.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 10.1 *: Demuestre que las funciones* $f(x) = x^2$, *con* $x \in [0, \infty)$ *y* $g(x) = \sqrt{x}$, *con* $x \in \text{Dom } g$, *son funciones inversas entre sí.*

Demostración : Es conocido que si f y g son funciones inversas entre sí, entonces

$$f(g(x)) = x \quad \text{para todo } x \in \text{Dom } g = [0, \infty)$$

y

$$g(f(x)) = x \quad \text{para todo } x \geq 0.$$

Así,

$$f(g(x)) = f\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x,$$

ya que, $x \in [0, \infty)$, por otra parte

$$g(f(x)) = g\left(x^2\right) = \sqrt{x^2} = |x| = x,$$

ya que, $x \geq 0$.

Luego, como $f(g(x)) = x$ y $g(f(x)) = x$, concluimos que las funciones f y g son funciones entre sí. ★

Ejemplo 10.2 *: Si* $h(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ *y* $h(f(x)) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, *hallar* $f(x)$.

Solución : Es conocido que si h tiene inversa, entonces $h\left(h^{-1}(\cdot)\right) = h^{-1}(h(\cdot)) = (\cdot)$, buscamos la inversa de h.

$$y = \frac{3x-1}{2x+3} \implies (2x+3)\,y = 3x-1 \implies 2xy+3y = 3x-1 \implies 2xy-3x = -3y-1$$

$$\implies x(2y-3) = -3y-1 \implies x = \frac{3y+1}{3-2y} \implies \boxed{h^{-1}(x) = \frac{3x+1}{3-2x}}$$

luego,

$$h^{-1}(h(f(x))) = h^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) \qquad \implies \qquad f(x) = h^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right),$$

donde,

$$h^{-1}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \frac{3\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)+1}{3-2\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)} = \frac{\dfrac{3x+3}{x^2+1}+1}{3-\dfrac{2x+2}{x^2+1}} = \frac{\dfrac{x^2+3x+4}{x^2+1}}{\dfrac{3x^2-2x+1}{x^2+1}} = \frac{x^2+3x+4}{3x^2-2x+1}$$

así,

$$\boxed{f(x) = \frac{x^2+3x+4}{3x^2-2x+1}.}$$

★

Ejemplo 10.3 *: Determine el dominio de la función*

$$h(x) = \sqrt{4-x^2}\ \text{arcsen}\left(\frac{x}{3-x}\right).$$

Solución : Observemos que h involucra tres funciones que proporcionan condiciones para su definición, a saber

$$\begin{array}{lll} \sqrt{(\cdot)} & \text{tiene sentido si y solo si} & (\cdot) \geq 0 \\ \text{arcsen}\,(\cdot) & \text{tiene sentido si y solo si} & |(\cdot)| \leq 1 \\ \dfrac{1}{(\cdot)} & \text{tiene sentido si y solo si} & (\cdot) \neq 0 \end{array}$$

así, para obtener el dominio de f debemos tener en cuenta que

$$\begin{array}{llll} 1. & \text{la función } \ g(x) = \sqrt{4-x^2} & \text{tiene sentido si y solo si} & 4 - x^2 \geq 0 \\ 2. & \text{la función } \ h(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{x}{3-x}\right) & \text{tiene sentido si y solo si} & \left|\dfrac{x}{3-x}\right| \leq 1 \\ 3. & \text{la función } \ w(x) = \dfrac{x}{3-x} & \text{tiene sentido si y solo si} & 3 - x \neq 0 \end{array}$$

de esto se obtiene que

1. La función $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ tiene sentido si $x \in [-4,4] \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } g = [-4,4]$
2. Para obtener los valores de x para los cuales h tiene sentido, resolvemos

$$\left|\frac{x}{3-x}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq \frac{x}{3-x} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \text{Dom } h = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right].$$

3. Observemos que al resolver la desigualdad anterior, resolvemos indirectamente la condición para la función w.

Por lo que,

$$\text{Dom } f = \text{Dom } g \bigcap \text{Dom } h \bigcap \text{Dom } w = \left[-4, \frac{3}{2}\right] \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\text{Dom } f = \left[-4, \frac{3}{2}\right]}$$

★

Ejemplo 10.4 *: Halle el dominio de la función*

$$f(x) = \sqrt{-x(x-1)^2|x-3|} + \arccos\left(\frac{x-3}{x^2+1}\right).$$

Solución : La función f tiene sentido si

- **Condición** 1 **:** $-x(x-1)^2|x-3| \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \in (-\infty, 0] \bigcup \{1,3\}.$
- **Condición** 2 **:** $\left|\dfrac{x-3}{x^2+1}\right| \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad -1 \leq \dfrac{x-3}{x^2+1} \leq 1.$

  Desigualdad I

$$-1 \leq \frac{x-3}{x^2+1} \Longrightarrow -x^2 - 1 \leq x - 3 \Longrightarrow 0 \leq x^2 + x - 2 \Longrightarrow 0 \leq (x+2)(x-1) \Longrightarrow x \in [1,\infty) \cup (-\infty, -2].$$

  Desigualdad II

$$\frac{x-3}{x^2+1} \leq 1 \Longrightarrow x - 3 \leq x^2 + 1 \Longrightarrow 0 \leq x^2 - x + 4 \Longrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

  Así,

$$x \in [1,\infty) \cup (-\infty, -2].$$

- **Condición** 3 **:** $x^2 + 1 \neq 0 \implies x \in \mathbb{R}$.

Luego,

$$\text{Dom } f : (-\infty, -2] \bigcup \{1, 3\}.$$

★

Ejemplo 10.5 *: Hallar el valor de* $\cos(\arctan x)$.

Solución : Es conocido que

$$\cos(\cdot) = \frac{1}{\sec(\cdot)} \qquad \text{y} \qquad \sec^2(\cdot) = 1 + \tan^2(\cdot),$$

así,

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sec(\arctan x)},$$

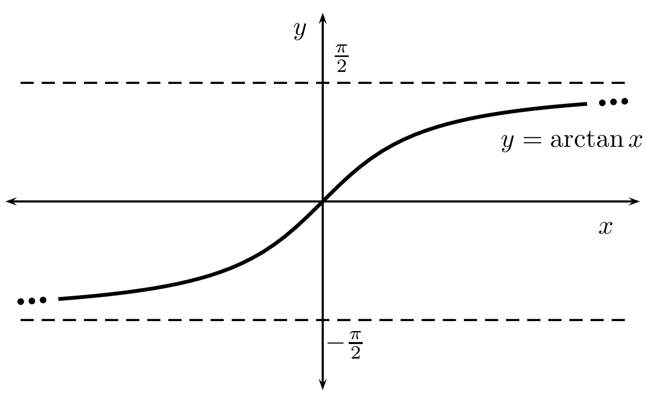
por lo que,

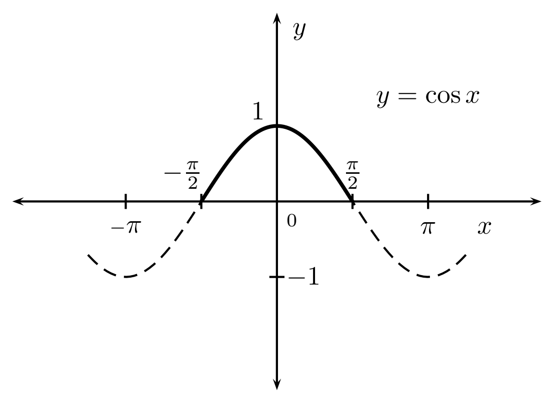
$$\sec^2(\arctan x) = 1 + \tan^2(\arctan x) = 1 + (\tan(\arctan x))^2 = 1 + x^2 \implies \sec^2(\arctan x) = 1 + x^2,$$

de aquí

$$\sec(\arctan x) = \pm\sqrt{1 + x^2} \implies \cos(\arctan x) = \pm\frac{1}{\sqrt{1 + x^2}},$$

como el rango de la función arcotangente es $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y la función coseno es ese intervalo es positiva





entonces,

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

★

Ejercicios

1. Considere las funciones $f(x) = mx + b$, y $g(x) = \dfrac{x - b}{m}$, con $m, b \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, con sus respectivos dominio naturales. Responda **VERDADERO** o **FALSO** la siguiente proposición

   "Las funciones f y g son funciones inversas entre sí."

2. Considere las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, con sus respectivos dominios naturales. Responda **VERDADERO** o **FALSO** la siguiente proposición

   "Las funciones f y g son funciones inversas entre sí."

3. Demuestre que las funciones $f(x) = x^2$ con $x \in [0, \infty)$ y $g(x) = \sqrt{x}$, con $x \in \text{Dom } g$, son funciones inversas entre sí.

4. Demuestre que las funciones $f(x) = x^3$ con $x \in \text{Dom } f$ y $g(x) = \sqrt[3]{x}$, con $x \in \text{Dom } g$, son funciones inversas entre sí.

5. Verifique que la inversa de la función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ es ella misma.

6. Considere la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ con $x \in \text{Dom } f$. Responda **VERDADERO** o **FALSO** la siguiente proposición

"La función inversa de f, es ella misma."

7. Suponga que las funciones f dadas son inyectivas en un intervalo $I \subseteq \text{Dom } f$. Encuentre una fórmula para f^{-1} y su dominio, así como el rango de f.

1. $f(x) = \sqrt{x-5}$	2. $f(x) = x^2 - 2x$	3. $f(x) = \dfrac{3}{x-6}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{x^2+4}$	5. $f(x) = 3 - \sqrt{2x}$	6. $f(x) = \tan\left(\sqrt{2x} - 1\right)$
7. $f(x) = \dfrac{1-x}{2-x}$	8. $f(x) = \dfrac{x+3}{4-x}$	9. $f(x) = \dfrac{3-4x}{3x-2}$
10. $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$	11. $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+5}$	12. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$
13. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	14. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$	15. $f(x) = \sqrt{\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{2-\sqrt[3]{x}}}$.

8. Sea $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ y suponga que $bc - ad \neq 0$.

   (a) Encuentre la fórmula para $y = f^{-1}(x)$.

   (b) ¿Por qué se necesita la condición $bc - ad \neq 0$?

   (c) ¿Qué condición sobre a, b, c y d harán que $f = f^{-1}$?

9. Si $f(2x-1) = 2 - x$, hallar $f(x)$.

10. Si $g(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$ y $g(f(x)) = \dfrac{3x-3}{2x+3}$, hallar $f(x)$.

11. Si $h(x) = \dfrac{x-1}{x}$ y $h(f(x)) = \dfrac{x^2}{x^2+x-1}$, hallar $f(x)$.

12. Si $h(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ y $h(f(x)) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, hallar $f(x)$.

13. Si $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+3}$ y $h(f(x)) = \dfrac{x+1}{x^2+1}$, hallar $h(x)$.

14. Si $f(x) = \dfrac{3-x}{x+2}$ y $g(f(x)) = \dfrac{3x-3}{2x+3}$, hallar $g(x)$.

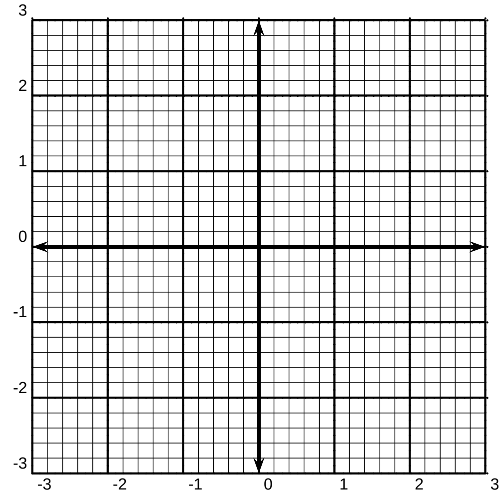
15. Si $f(x) = \dfrac{3-4x}{3x-2}$ y $g(f(x)) = \dfrac{x-3}{x+3}$, hallar $g(x)$.

16. Si $f(x) = \dfrac{3-x^2}{x+5}$ y $g(f(x)) = \dfrac{x}{x+4}$, hallar $g(x)$.

17. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcoseno :** $f(x) = \operatorname{arcsen}(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcoseno $f(x) = \operatorname{arcsen}(x)$; $P(x,y) = (x, \operatorname{arcsen}(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

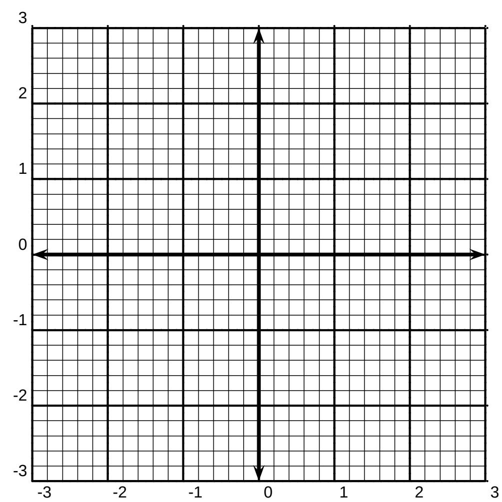
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

18. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcocoseno :** $f(x) = \arccos(x) = \cos^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcocoseno $f(x) = \arccos(x)$; $P(x,y) = (x, \arccos(x))$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

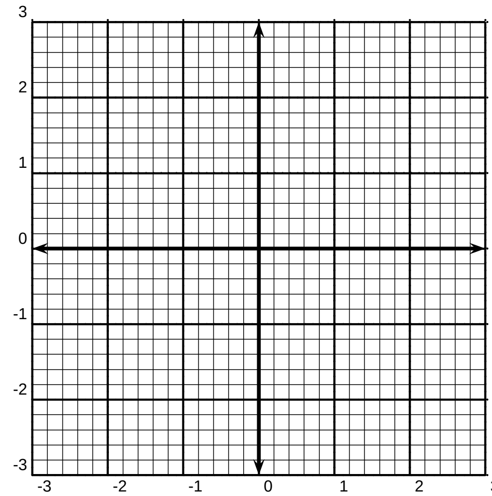
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

19. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcotangente :** $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcotangente $f(x) = \arctan(x)$; $P(x, y) = (x, \arctan(x))$

Dominio : ____ Rango : ____ Inyectiva : ____

Punto(s) de corte: Eje x: ____ Eje y: ____

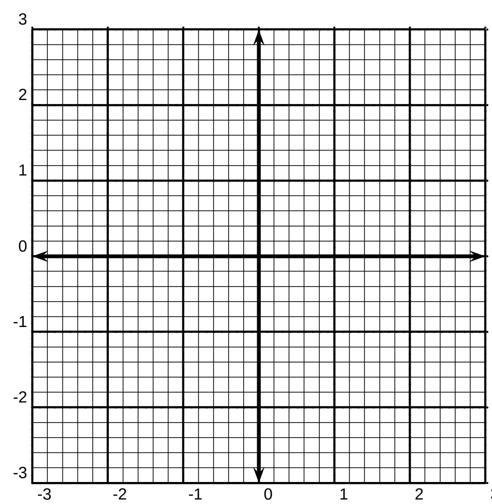
Monotonía : ____ Simetría : ____

Periodicidad : ____

20. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcocosecante :** $f(x) = \csc^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcocosecante $f(x) = \csc^{-1}(x)$; $P(x, y) = \left(x, \csc^{-1}(x)\right)$

Dominio : ____ Rango : ____ Inyectiva : ____

Punto(s) de corte: Eje x: ____ Eje y: ____

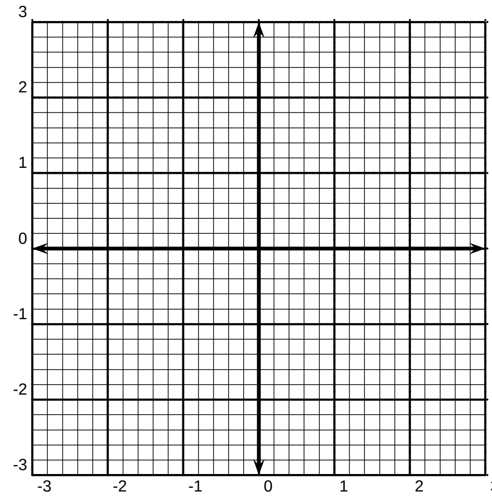
Monotonía : ____ Simetría : ____

Periodicidad : ____

21. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcosecante :** $f(x) = \sec^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcosecante $f(x) = \sec^{-1}(x)$; $P(x, y) = \left(x, \sec^{-1}(x)\right)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

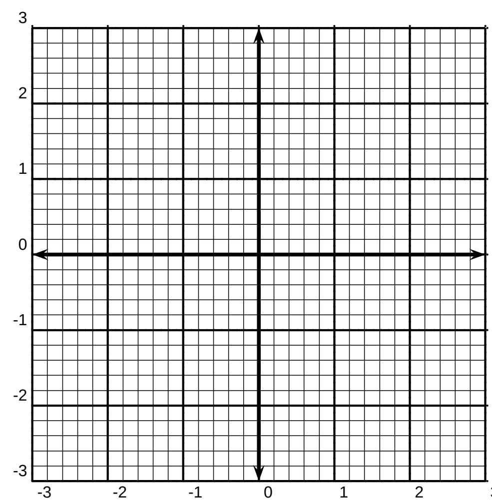
Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

22. Considere la **Función inversa trigonométrica Arcocotangente :** $f(x) = \cot^{-1} x$.

x	$f(x)$
-2	
$-\frac{3}{2}$	
-1	
0	

x	$f(x)$
$\frac{1}{2}$	
1	
$\sqrt{2}$	
$\frac{5}{2}$	



Función inversa trigonométrica Arcoscotangente $f(x) = \cot^{-1}(x)$; $P(x, y) = \left(x, \cos^{-1}(x)\right)$

Dominio : ________ Rango : ________ Inyectiva : ________

Punto(s) de corte: Eje x: ________ Eje y: ________

Monotonía : ________ Simetría : ________

Periodicidad : ________

23. Sin utilizar la calculadora encuentre los siguientes valores

1. $\arctan\left(\sqrt{3}\right)$ 2. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4. $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

5. $\operatorname{arcsen}(2)$ 6. $\operatorname{arcsen}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 7. $\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 8. $\cos\left(2\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$

9. $\operatorname{arcsen}\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)+\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right)$ 10. $\cos\left(\arccos\left(\frac{4}{5}\right)+\operatorname{arcsen}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

24. Hallar los siguientes valores

1. $\tan(\operatorname{arcsen} x)$ 2. $\operatorname{sen}(\arctan x)$ 3. $\cos(\operatorname{arcsen} x)$ 4. $\tan(2\arctan x)$

5. $\cos(2\operatorname{arcsen} x)$ 6. $\sec(\arctan x)$ 7. $\operatorname{sen}(2\operatorname{arcsen} x)$ 8. $\cos(\arctan x)$

25. Hallar f, si se conoce que $g\left(x^3-1\right)=\cos x$ y $(f\circ g)(x)=\operatorname{arcsen}(x-2)$.

26. Dada $f(x)=2x-1$ y $(f\circ g)(x)=-2x^2+3x-1$. Hallar $y=g(x)$.

27. Suponga que las funciones f dadas son inyectivas en un intervalo $I\subseteq \operatorname{Dom} f$. Encuentre una fórmula para f^{-1} y su dominio, así como el rango de f.

1. $f(x)=3-\operatorname{sen}(2x)$ 2. $f(x)=\tan\left(\frac{x}{x-3}\right)$ 3. $f(x)=\operatorname{sen}\left(x^2+x-2\right)$

4. $f(x)=\cos\left(2-\sqrt[3]{x}\right)$ 5. $f(x)=(\operatorname{sen} x-2)^3$ 6. $f(x)=\operatorname{sen}\left(2\sqrt{x^4+2x^2+1}\right)$

7. $f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ 8. $f(x)=\frac{\operatorname{sen} x-2}{2\operatorname{sen} x+3}$ 9. $f(x)=\sqrt{\frac{\operatorname{sen} x-1}{2-\operatorname{sen} x}}$.

28. Determine el dominio de las siguientes funciones

1. $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{1-\operatorname{arcsen} x}$ 2. $f(x)=\frac{1-\operatorname{arcsen} x}{\sqrt{x}}$ 3. $h(x)=\frac{\operatorname{arcsen}\left(8-x^3\right)}{\sqrt[3]{x}-2}$

4. $f(x)=\sqrt{1-\operatorname{arcsen} x}$ 5. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{arcsen} x}}$ 6. $h(x)=\arccos\left(\sqrt{x^2+5x+6}\right)$

7. $h(x)=\sqrt{4-x^2}\ \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{3-x}\right)$ 8. $h(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{x^2-x}{x+3}\right)-\sqrt{\frac{x^2-x}{x+3}}$

9. $f(x)=\sqrt{x}+\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-5}{x^2-x}\right)$ 10. $g(x)=\cot\left(\operatorname{arcsen}\left(x^2-5x+6\right)\right)-\sqrt[4]{\operatorname{arcsen}\left(x^2-2x-3\right)}$

29. Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo un ángulo de $45°$. ¿Bajo que ángulo se verá si nos colocamos al doble de la distancia?

Respuestas: Ejercicios

1. Verdadero; 2. Falso; 6. Falso; 7.1 $f^{-1}(x)=x^2+5$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:[0,\infty)$;
7.2 $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}+1$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:[-1,\infty)$; 7.3 $f^{-1}(x)=\frac{3}{x}+6$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:\mathbb{R}-\{0\}$;
7.4 $f^{-1}(x)=\sqrt{x^3-4}$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:\left[\sqrt[3]{4},\infty\right)$; 7.5 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(3-x)$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:[2,4]$;
7.6 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(\arctan x+1)^2$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:[-\tan(1),\infty)$; 7.7 $f^{-1}(x)=\frac{2x-1}{x-1}$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:\mathbb{R}-\{1\}$;
7.8 $f^{-1}(x)=\frac{4x-3}{x+1}$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:\mathbb{R}-\{-1\}$; 7.9 $f^{-1}(x)=\frac{3+2x}{3x+4}$, $\operatorname{Dom} f^{-1}=\operatorname{Rgo} f:\mathbb{R}-\left\{-\frac{4}{3}\right\}$;

7.10 $f^{-1}(x)=\frac{4x}{1-x}$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}-\{1\}$; 7.11 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\sqrt{12-15x+x^2}-\frac{x}{2}$,

Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\left(-\infty,\frac{15-\sqrt{177}}{2}\right]\cup\left[\frac{15+\sqrt{177}}{2},\infty\right)$; 7.12 $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{4x-4x^2+1}{4x^2}}+\frac{1}{2x}$,

Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\left[\frac{1-\sqrt{2}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right]$; 7.13 $f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x^2}$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}-\{\pm1\}$;

7.14 $f^{-1}(x)=\left(\frac{3x+2}{1-2x}\right)^2$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$; 7.15 $f^{-1}(x)=\left(\frac{2x^2+1}{1+x^2}\right)^3$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}$;

8.a. $f^{-1}(x)=\frac{b-dx}{cx-a}$; 8.$c$. $a=-d$; 9. $f(x)=\frac{3-x}{2}$; 10. $f(x)=\frac{3}{x}$; 11. $f(x)=\frac{x+x^2-1}{x-1}$;

12. $f(x)=\frac{3x+x^2+4}{3x^2-2x+1}$; 13. $h(x)=\frac{12-2x^2-5x}{13x^2-6x+10}$; 14. $g(x)=3\frac{3x-2}{x-9}$; 15. $g(x)=-\frac{7x+9}{11x+15}$;

16. $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-20x+12}-x}{\sqrt{x^2-20x+12}-x+8}$; 23.1 $\frac{1}{3}\pi$; 23.2 $-\frac{1}{3}\pi$; 23.3 $\frac{1}{6}\pi$; 23.4 $\frac{1}{4}\pi$; 23.5 No definida;

23.6 $-\frac{1}{6}\pi$; 23.7 $-\frac{1}{6}\pi$; 23.8 $\frac{5}{9}$; 23.9 $\frac{56}{65}$; 23.10 $-\frac{16}{65}$; 24.1 $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; 24.2 $\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$;

24.3 $\sqrt{1-x^2}$; 24.4 $\frac{2x}{1-x^2}$; 24.5 $1-2x^2$; 24.6 $\sqrt{1+x^2}$; 24.7 $2x\sqrt{1-x^2}$; 24.8 $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

25. $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\arccos^3 x-3\right)$; 26. $g(x)=\frac{3x-2x^2}{2}$; 27.1 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}(3-x)$,

Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:[2,4]$; 27.2 $f^{-1}(x)=\frac{3}{\arctan x-1}+3$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{4}\right\}$;

27.3 $f^{-1}(x)=\sqrt{\operatorname{arcsen} x+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:[-1,1]$; 27.4 $f^{-1}(x)=(2-\arccos x)^3$,

Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:[-1,1]$; 27.5 $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\left(\sqrt[3]{x}+2\right)$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:[-27,-1]$;

27.6 $f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{arcsen} x-1}$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:[-1,1]$; 27.7 $f^{-1}(x)=\frac{1}{1-\operatorname{arcsen} x}-1$,

Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$; 27.8 $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2+3x}{1-2x}\right)$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\left[-3,-\frac{1}{5}\right]$;

27.9 $f^{-1}(x)=\operatorname{arcsen}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\left[-\frac{2}{3},0\right]$; 28.1 Dom $g:[0,1]-\{\operatorname{sen}1\}$;

28.2 Dom $f:(0,1]$; 28.3 Dom $h:\left[\sqrt[3]{7},\sqrt[3]{9}\right]$; 28.4 Dom $f:[-1,\operatorname{sen}1]$; 28.5 Dom $f:[-1,\operatorname{sen}1)$;

28.6 Dom $h:\left[-\frac{5+\sqrt{5}}{2},-3\right]\cup\left[-2,\frac{\sqrt{5}-5}{2}\right]$; 28.7 Dom $h:\left[-2,\frac{3}{2}\right]$; 28.8 Dom $h:[-1,0]\cup[1,3]$;

28.9 Dom $f:\left[\sqrt{5},\infty\right)$; 28.10 Dom $g:\left(3,\sqrt{5}+1\right]$; arcsen $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$, Dom $f^{-1}=$ Rgo $f:\left[-\frac{2}{3},0\right]$;

29. $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$;

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.

Gráficas por traslaciones, reflexiones y contracciones.

Objetivos a cubrir

Código : MAT-1.11

- Gráfica de funciones usando traslaciones, reflexiones, contracciones.
- Formulación de funciones. Dominio admisible.

Ejercicios resueltos

Ejemplo 11.1 *: Determine la gráfica de la función usando traslaciones*

$$g(x) = \frac{8-3x}{x-2}.$$

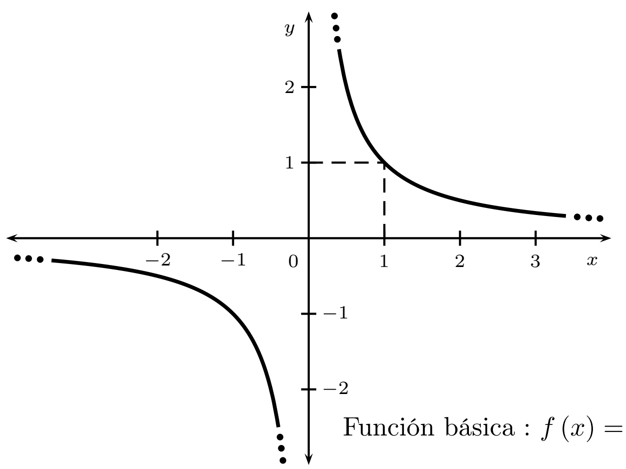
Solución : Observemos que la función g se puede escribir como

$$g(x) = \frac{8-3x}{x-2} = \frac{8-3(x-2+2)}{x-2} = \frac{8-3(x-2)-6}{x-2} = \frac{2-3(x-2)}{x-2} = \frac{2}{x-2} - \frac{3(x-2)}{x-2} = \frac{2}{x-2} - 3,$$

es decir,

$$g(x) = \frac{2}{x-2} - 3,$$

de aquí, se tiene que la función básica asociada a g es la función hipérbola básica $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

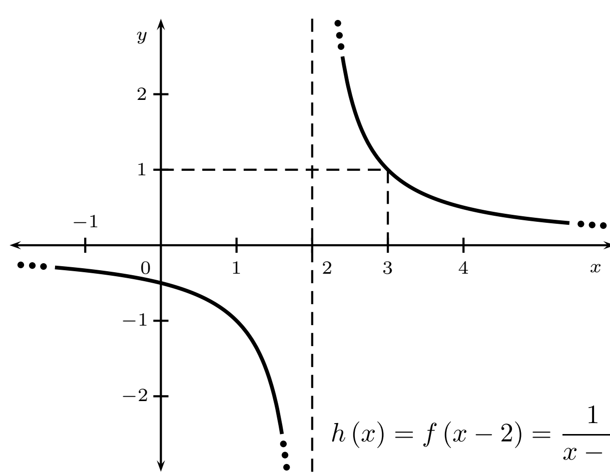


Función básica : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Entonces, las modificaciones que se deben hacer a la gráfica de la función básica son

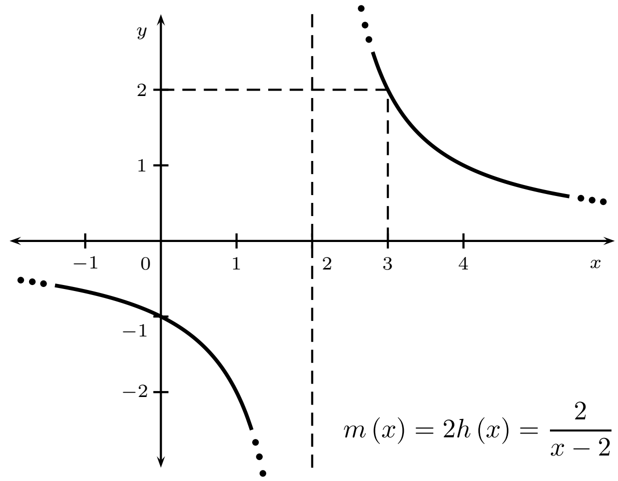
1. Restar dos unidades a la variable dominio.
2. Multiplicar por dos a la variable rango.
3. Restar tres unidades a la variable rango.

1. A continuación a la variable dominio le restamos 2 unidades, lo que significa un movimiento horizontal de la gráfica de la función básica de dos unidades a la derecha (traslación horizontal)



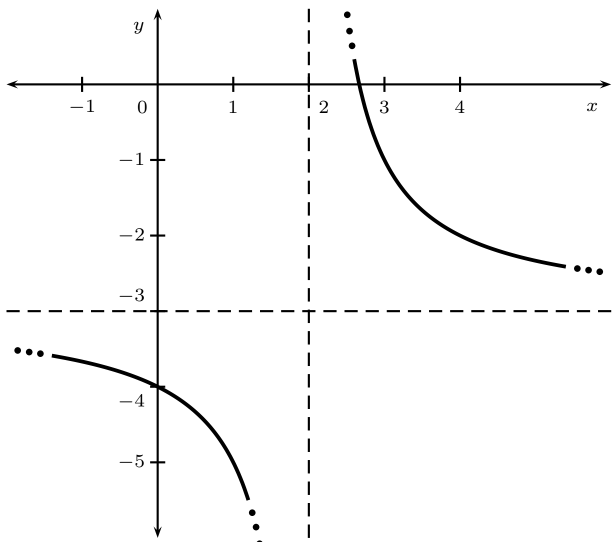
$h(x) = f(x-2) = \dfrac{1}{x-2}$

2. Multiplicamos por 2 la variable rango de la función h y obtenemos



$$m(x) = 2h(x) = \frac{2}{x-2}$$

Por último, restamos 3 unidades a la variable rango de la función m, lo que representa un movimiento vertical de la gráfica de m de tres unidades hacia abajo (traslación vertical)



$$g(x) = m(x) - 3 = \frac{2}{x-2} - 3$$

★

Ejemplo 11.2 *: Considere la función* $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$

1. *Diga si la función* h *es una función inyectiva ó no.*
2. *Halle el intervalo donde* h *es creciente ó decreciente.*
3. *¿La función* h *admite inversa?*
4. *En caso afirmativo, halle una formula para la inversa de* h.
5. *Halle el* $\text{Dom } h^{-1}$ *y* $\text{Rgo } h^{-1}$.
6. *Graficar* h *y* h^{-1}.

Solución : 1. Es conocido que una función f es inyectiva si para todo $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que,

$$x_1 \neq x_2, \qquad \text{se tiene que} \qquad f(x_1) \neq f(x_2)$$

ó equivalentemente

$$f(x_1) = f(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = \frac{2(x+3-3)-5}{x+3} = \frac{2((x+3)-3)}{x+3} = \frac{2(x+3)-6-5}{x+3}$$

$$= \frac{2(x+3)-11}{x+3} = \frac{2(x+3)}{x+3} - \frac{11}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}$$

Sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } f$, tal que, $h(x_1) = h(x_2)$, como

$$h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_1+3} \qquad \text{y} \qquad h(x_1) = 2 - \frac{11}{x_2+3}$$

entonces,

$$h(x_1) = h(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad 2 - \frac{11}{x_1+3} = 2 - \frac{11}{x_2+3} \qquad \overset{\boxed{\text{Sumamos } -2}}{\Longrightarrow} \qquad -\frac{11}{x_1+3} = -\frac{11}{x_2+3}$$

$$\underset{\boxed{\text{Multiplicamos por } -\frac{1}{11}}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{1}{x_1+3} = \frac{1}{x_2+3} \qquad \underset{\boxed{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)}}}{\Longrightarrow} \qquad x_1 + 3 = x_2 + 3 \qquad \underset{\boxed{\text{Sumamos } -3}}{\Longrightarrow} \qquad x_1 = x_2$$

luego

$$h(x_1) = h(x_2) \qquad \Longrightarrow \qquad x_1 = x_2,$$

por lo tanto, h es inyectiva.

2. Es conocido que una función f es **creciente** es un intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que, $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) < f(x_2)$, es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) < f(x_2),$$

mientras que, una función f es **decreciente** es un intervalo I si para todo $x_1, x_2 \in I$, tal que, $x_1 < x_2$ se tiene que $f(x_1) > f(x_2)$, es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad f(x_1) > f(x_2).$$

Observemos que la función h se puede escribir como

$$h(x) = \frac{2x-5}{x+3} = 2 - \frac{11}{x+3}$$

y que $\text{Dom } h = \mathbb{R} - \{-3\}$, sean $x_1, x_2 \in \text{Dom } h$, tal que $x_1 < x_2$

$$x_1 < x_2 \qquad \overset{\boxed{\substack{\text{Sumamos } 3 \\ \text{(la desigualdad se mantiene)}}}}{\Longrightarrow} \qquad x_1 + 3 < x_2 + 3 \qquad \overset{\boxed{\substack{\text{Aplicamos } \frac{1}{(\cdot)} \\ \text{(la desigualdad cambia)}}}}{\Longrightarrow} \qquad \frac{1}{x_1+3} > \frac{1}{x_2+3}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{-11}{x_1+3} > \frac{-11}{x_2+3} \quad \Longrightarrow \quad 2-\frac{11}{x_1+3} < 2-\frac{11}{x_2+3}$$

Multiplicamos por -11
(la desigualdad cambia)

Sumamos 2
(la desigualdad se mantiene)

con lo que,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad 2-\frac{11}{x_1+3} < 2-\frac{11}{x_2+3},$$

es decir,

$$x_1 < x_2 \qquad \Longrightarrow \qquad h(x_1) < h(x_2),$$

por lo tanto, h es una función creciente en todo su dominio.

3. Por la parte 1 tenemos que h es inyectiva, por lo tanto, admite inversa.

4. Para hallar la expresión de h^{-1} despejamos x de $y=\dfrac{2x-5}{x+3}$, puesto que

$$h(x)=\frac{2x-5}{x+3}=2-\frac{11}{x+3},$$

entonces,

$$y=2-\frac{11}{x+3} \Longrightarrow y-2=-\frac{11}{x+3} \Longrightarrow \frac{2-y}{11}=\frac{1}{x+3} \Longrightarrow x+3=\frac{11}{2-y} \Longrightarrow x=\frac{11}{2-y}-3,$$

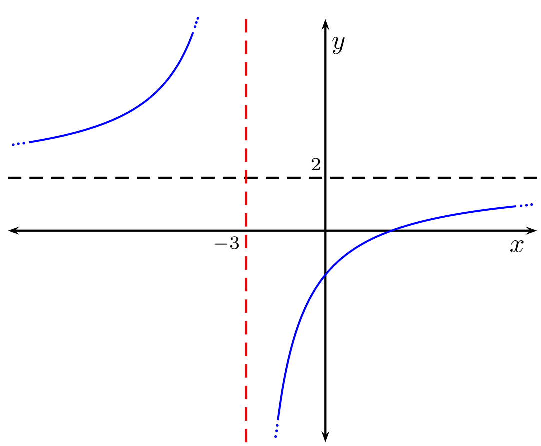
con lo que

$$h^{-1}(x)=\frac{11}{2-x}-3.$$

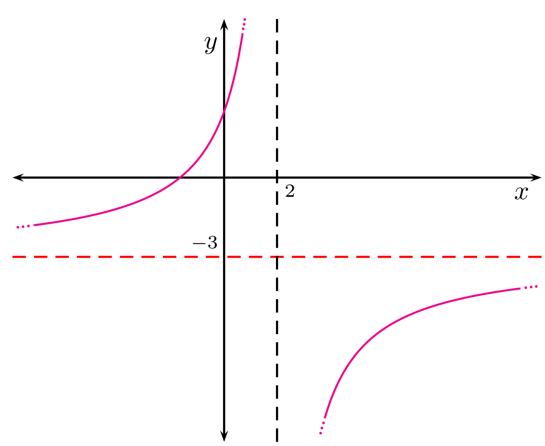
5. Tenemos que h^{-1} tiene sentido para todo x, tal que, $2-x\neq 0 \Longrightarrow x\neq 2$, luego

$$\text{Dom } h^{-1}=\mathbb{R}-\{2\} \qquad \text{y} \qquad \text{Rgo } h^{-1}=\text{Dom } h=\mathbb{R}-\{-3\}.$$

6. Usando traslaciones horizontales y verticales sobre la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$, se tiene

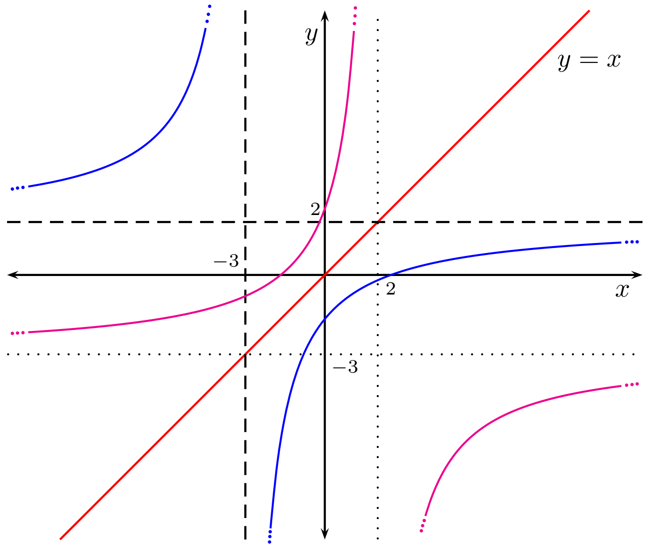


$$h(x)=2-\frac{11}{x+3}$$



$$h^{-1}(x)=\frac{11}{2-x}-3$$

Si graficamos ambas funciones en un mismo sistema coordenado, observamos que la gráfica de la función h^{-1} es el reflejo a través de la función identidad, $y=x$, de la gráfica de la función h.



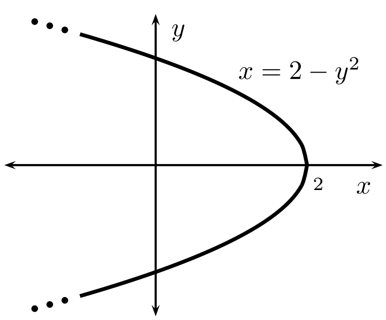
■ $h(x) = 2 - \dfrac{11}{x+3}$ y ■ $h^{-1}(x) = \dfrac{11}{2-x} - 3$

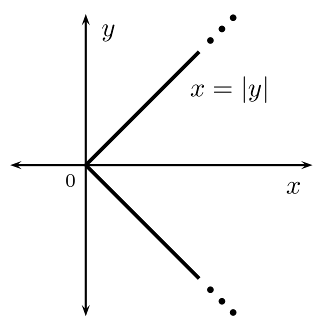
★

Ejemplo 11.3 *: Dibuje la región limitada por* $x = 2 - y^2$ *y* $x = |y|$.

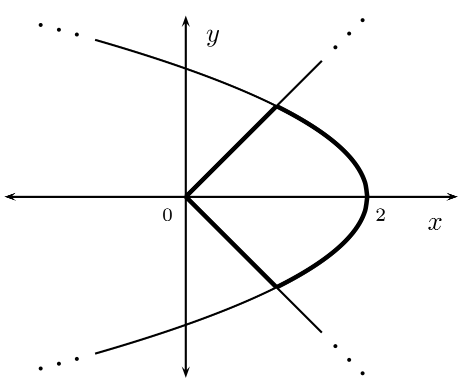
Solución : Observemos que la variable dominio de cada una de las funciones es la variable y, por lo tanto, la variable rango es x.

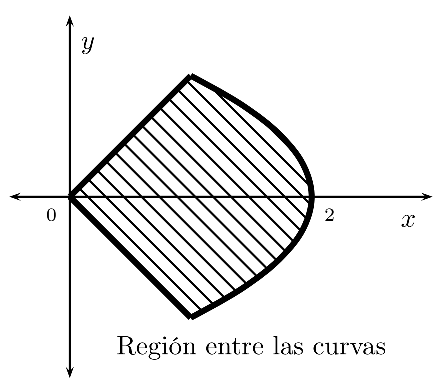
Con respecto a la función $x = 2 - y^2$, es la grafica de la función básica $x = y^2$ reflejada en el eje y y trasladada en el eje x en 2 unidades hacia arriba.





Graficando las dos curvas en un mismo sistema coordenado, observamos la región encerrada por las dos curvas





Región entre las curvas

★

Ejemplo 11.4 *: Represente gráficamente la siguiente región del plano*

$$|x| + |y| \geq 1; \qquad x^2 + y^2 \leq 9.$$

Solución : Consideremos la expresión $|x| + |y| \geq 1$, por definición de valor absoluto se tiene

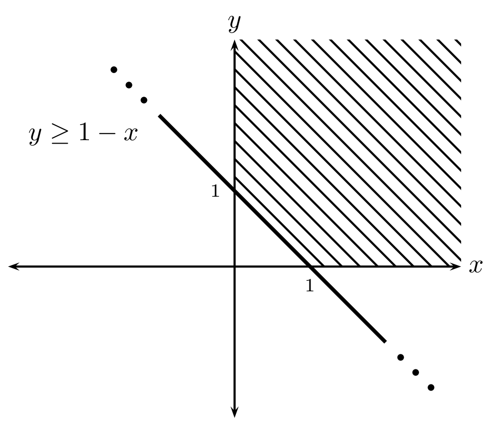
$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad |y| = \begin{cases} y & \text{si } y \geq 0 \\ -y & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

de donde se desprende los siguientes casos

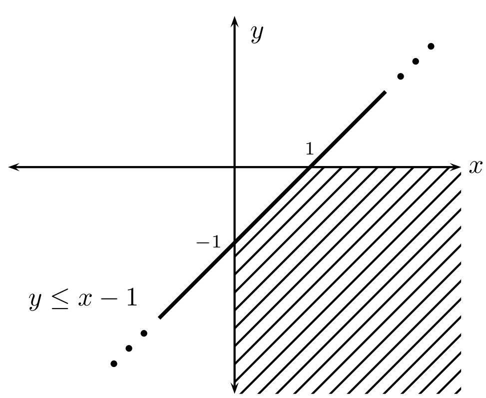
- **Caso I :** Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $x + y \geq 1$, es decir,
$$y \geq 1 - x.$$
- **Caso II :** Si $x \geq 0$ y $y < 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $x - y \geq 1$, es decir,
$$y \leq x - 1.$$
- **Caso III :** Si $x < 0$ y $y \geq 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $-x + y \geq 1$, es decir,
$$y \geq x + 1.$$
- **Caso IV :** Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces la desigualdad $|x| + |y| \geq 1$ nos queda $-x - y \geq 1$, es decir,
$$y \leq -x - 1.$$

Graficamos cada caso

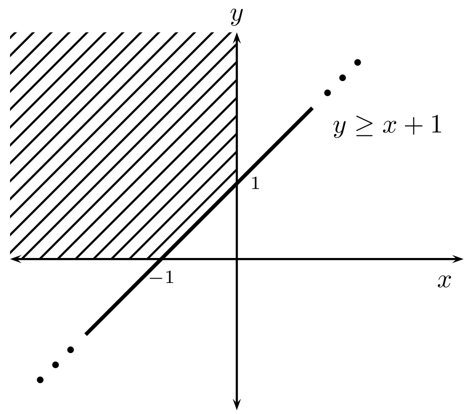
- **Caso I :** Si $x \geq 0$ y $y \geq 0$, entonces $y \geq 1 - x$.



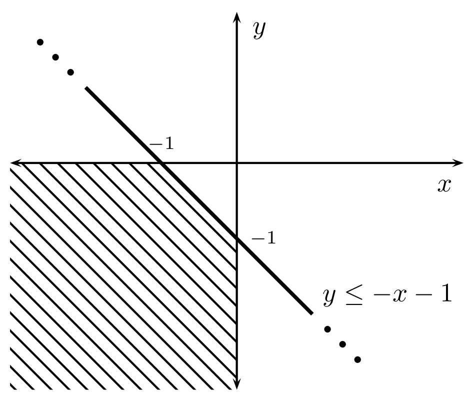
- **Caso II :** Si $x \geq 0$ y $y < 0$, entonces $y \leq x - 1$.



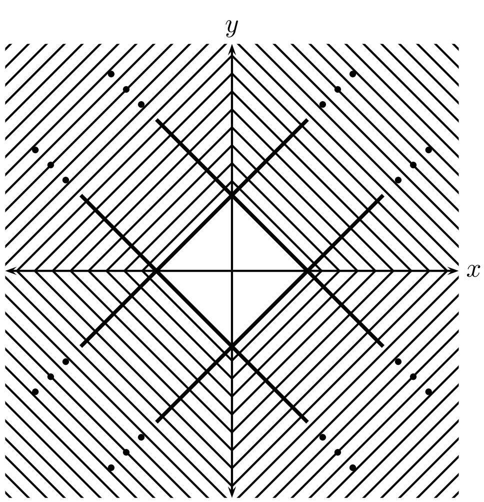
- **Caso III :** Si $x < 0$ y $y \geq 0$, entonces $y \geq x + 1$.



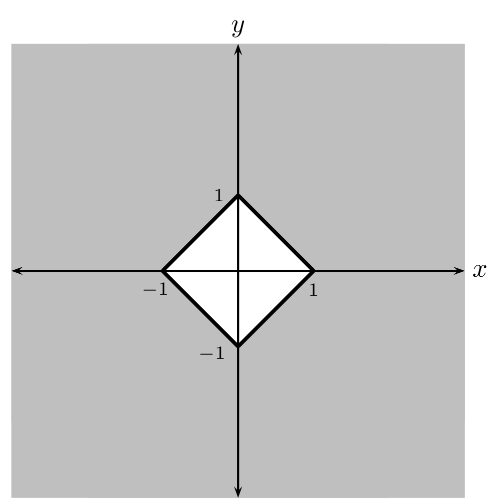
- **Caso IV :** Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces $y \leq -x - 1$.



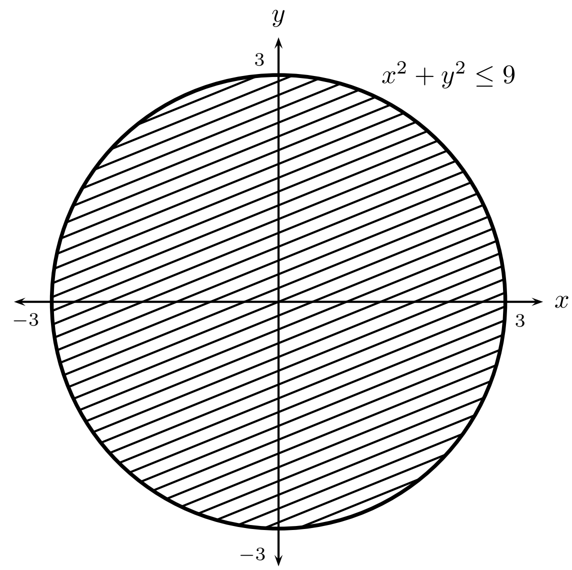
Tenemos la gráfica de la expresión $|x| + |y| \geq 1$



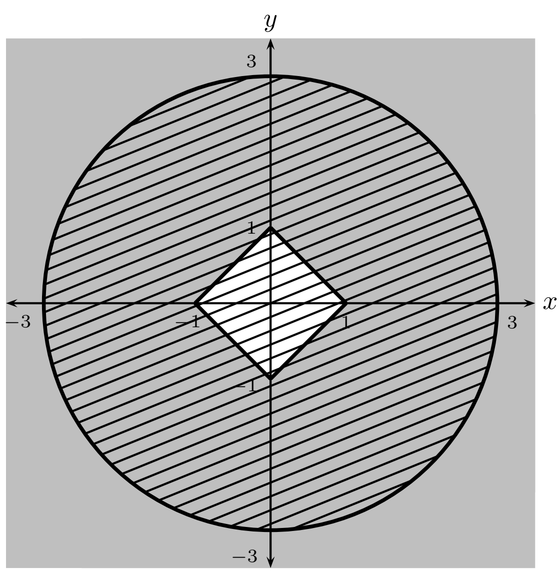
es decir,



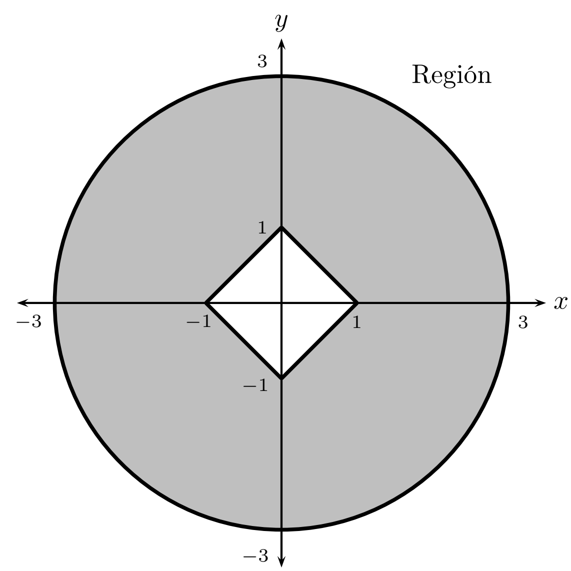
por otro lado, $x^2 + y^2 \leq 9$ representa la parte interna del circulo de centro el origen y radio $r = 3$,



luego, la región buscada es la intersección de ambas regiones



$\Longrightarrow$



★

Ejemplo 11.5 : *Traduzca las siguientes expresiones verbales a expresiones numéricas*

1. *La diferencia de un número par y de un número impar.*
2. *La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis.*
3. *La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien.*
4. *El triple de la suma de un número y diez es igual a doce.*

Solución : 1. Sean

$$x: \quad \text{un número par cualquiera} \qquad\qquad y: \quad \text{un número impar cualquiera}$$

Es conocido que los números pares vienen expresados como $x = 2n$, con $n \in \mathbb{Z}$, mientras que los números impares se expresan como $y = 2m + 1$ ó como $y = 2m - 1$, con $m \in \mathbb{Z}$. Es de hacer notar que n no tiene que ser igual a m.

Luego, la expresión

“La diferencia de un número par y de un número impar”

se escribe matemáticamente como

$$2n - (2m - 1), \qquad \text{con} \qquad n, m \in \mathbb{Z},$$

que es equivalentemente a escribir

$$2k + 1, \qquad \text{donde} \qquad k = n - m \in \mathbb{Z}.$$

2. Sean

$x :$ la edad de Pedro $\qquad$ $y :$ la edad de Luis

Luego, la expresión

“La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis”

se escribe matemáticamente como

$$\frac{x}{5} + 3y.$$

3. Sean

$x :$ la edad de Pedro $\qquad$ $y :$ la edad de Luis

Luego, la expresión

“La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien”

se escribe matemáticamente como

$$x + \frac{y}{2} = 100.$$

4. Sean

$x :$ un número cualquiera

Luego, la expresión

“El triple de la suma de un número y diez es igual a doce”

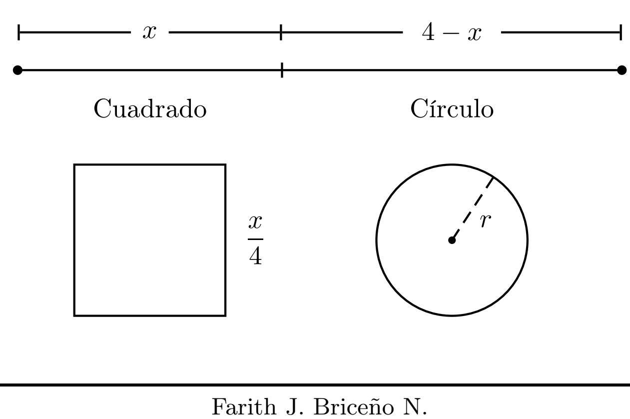
se escribe matemáticamente como

$$3(x + 10) = 12.$$

★

Ejemplo 11.6 *: Se tiene un alambre de 4 m de longitud y se divide en dos trozos para formar un cuadrado y un círculo. Expresar el área total encerrada en ambas figuras en función de x, siendo x el lado del cuadrado. Hallar el dominio donde está definida la función.*

Solución : Del alambre de 4 m debemos formar un cuadrado y un circulo de tal forma que cada lado del cuadrado mida x m.



El área del cuadrado es $A_{\text{cuadrado}} = (\text{lado})^2$, mientras que, el área del circulo es $A_{\text{circulo}} = \pi\,(\text{radio})^2$, por lo tanto,

$$A_{\text{cuadrado}} = \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4},$$

para el área del círculo, deduzcamos el radio del mismo, observemos que el perímetro del círculo es $4-x$, que es la longitud del alambre que tenemos para forma la figura geométrica, puesto que el perímetro del círculo es $P = 2\pi\,(\text{radio})$, entonces,

$$4 - x = 2\pi\,(\text{radio}) \qquad \Longrightarrow \qquad \text{radio} = \frac{4-x}{2\pi},$$

por lo tanto,

$$A_{\text{circulo}} = \pi\left(\frac{4-x}{2\pi}\right)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad A_{\text{circulo}} = \frac{(4-x)^2}{4\pi}.$$

Luego, el área total es

$$A_{\text{total}}(x) = A_{\text{cuadrado}} + A_{\text{circulo}} = \frac{x^2}{4} + \frac{(4-x)^2}{4\pi},$$

cuyo dominio es $\text{Dom}\,A_{\text{total}} = (0,4)$. ★

Ejercicios

1. Determine la gráfica de la función usando traslaciones

1. $g(x) = x^2 - 2$
2. $f(x) = (x-1)^2 + 3$
3. $f(x) = x^2 + x + 1$
4. $h(x) = 2 - x^3$
5. $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$
6. $g(x) = \dfrac{1}{(x+2)^2} + \dfrac{1}{2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2$
8. $f(x) = x^2 - 4x$
9. $g(x) = 1 - \sqrt{x-3}$
10. $h(x) = \dfrac{2x-5}{x+3}$
11. $g(x) = \dfrac{(x+1)^2}{2}$
12. $f(t) = \operatorname{sen} t - 1$
13. $f(x) = x^2 + 4x - 1$
14. $f(x) = 2 + \operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$
15. $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} + 2$
16. $g(x) = \dfrac{1}{x-3} + 2$
17. $h(x) = |x-4| - 3$
18. $h(x) = \dfrac{3}{5}\sqrt{x+2} - 3$
19. $g(x) = |\operatorname{sen} x| - 2$
20. $g(x) = \left|x^2 - 4x\right|$
21. $h(x) = \left|x^2 - x + 1\right|$
22. $g(x) = \dfrac{8-3x}{x-2}$
23. $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x^2-2x+1}$
24. $f(x) = \dfrac{3x^2-12x+13}{x^2-4x+4}$
25. $g(x) = \cos(2x)$
26. $f(x) = \operatorname{sen}(2x-3)$
27. $f(x) = \operatorname{sen}(|x|) + 3$
28. $g(x) = \cos x \operatorname{sen} x$
29. $f(x) = |\cos(x+\pi)|$
30. $f(x) = \left|2\operatorname{sen}(|3x|) - \dfrac{1}{2}\right|$

2. Dibuje la región limitada por las curvas dadas

1. $y = x^2, \quad y = x^4$
2. $y = x^4, \quad y = -x-1, \quad x = -2, \quad x = 0$
3. $y = x, \quad y = x^3$
4. $x + y^2 = 0, \quad x = y^2 + 1, \quad y = 0, \quad y = 3$
5. $y = x^2 - 4x, \quad y = 2x$
6. $x = 3y, \quad x + y = 0, \quad 7x + 3y = 24$
7. $y = x, \quad y = x^2$
8. $y^2 = x, \quad y = x + 5, \quad y = -1, \quad y = 2$
9. $y = x^2, \quad y^2 = x$
10. $y = x^2 + 3, \quad y = x, \quad x = -1, \quad x = 1$
11. $y = \sqrt{x}, \quad y = x/2$
12. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

13. $y = 4x^2, \quad y = x^2 + 3$

14. $y = x^2 + 2, \quad y = 2x + 5, \quad x = 0, \quad x = 6$

15. $y = x^4 - x^2, \quad y = 1 - x^2$

16. $y = 4 - x^2, \quad y = x + 2, \quad x = -3, \quad x = 0$

17. $x + y^2 = 2, \quad x + y = 0$

18. $y = x^2 + 2x + 2, \quad y = x + 4, \quad x = -3, \quad x = 2$

19. $y^2 = x, \quad x - 2y = 3$

20. $y = x^2 + 1, \quad y = 3 - x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$

21. $x = 1 - y^2, \quad x = y^2 - 1$

22. $y = |x|, \quad y = (x+1)^2 - 7, \quad x = -4$

23. $y = 2x - x^2, \quad y = x^3$

24. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/2$

25. $x = 1 - y^4, \quad x = y^3 - y$

26. $y = \cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad x = -\pi/4, \quad x = \pi/4$

27. $y = x^3, \quad x = y^3$

28. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/2$

29. $y = x\sqrt{1 - x^2}, \quad y = x - x^3$

30. $y = \operatorname{sen} x, \quad y = \cos 2x, \quad x = 0, \quad x = \pi/4$

31. $y = x^2 - 4x + 3, \quad y = 0$

32. $y = |x - 1|, \quad y = x^2 - 3, \quad x \geq 0$

33. $y = 4 + 3x - x^2, \quad y = 0$

34. $y = \cos x, \quad y = \operatorname{sen} 2x, \quad x = \pi/2, \quad x = \pi$

35. $y = \sqrt{x - 4}, \quad y = 0, \quad x = 8$

36. $x^2 + 2x + y = 0, \quad x + y + 2 = 0$

37. $x = y^4, \quad x = 2 - y^4$

38. $y = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad y = x^2 - x$

39. $x = 6y - y^2, \quad x = 0$

40. $y = \sqrt{x - 1}, \quad x - 3y + 1 = 0$

3. Represente gráficamente las siguientes regiones del plano

1. $xy \leq 0$
2. $xy > 0$
3. $xy \geq 0$
4. $x > 0; \quad y \geq 0$
5. $x \geq 0; \quad y \leq 0$
6. $x^2 + y^2 \leq 4$
7. $x^2 + y^2 < 4$
8. $x^2 + y^2 \geq 9$
9. $(x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$
10. $y \leq 3 - 2x; \quad xy > 0$
11. $y \leq 3 - 2x; \quad x > 0; \quad y > 0$
12. $|x| + |y| \leq 1$
13. $|x| + |y| < 1$
14. $x^2 + y^2 \leq 9; \quad x^2 + y^2 > 1$
15. $y^2 < x$
16. $y^2 > x$
17. $x^2 + y^2 < 25; \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 \leq 4$
18. $x^2 + y^2 \leq 9; \quad x^2 + y^2 \geq 2; \quad y \geq |x|$
19. $xy \leq 1; \quad xy < -1$
20. $x^2 + y^2 \leq 16; \quad (x+2)^2 + y^2 > 1; \quad (x-2)^2 + y^2 \geq 1$
21. $|x| + |y| \leq 6; \quad x^2 + y^2 > 1$
22. $|x| + |y| \geq 6; \quad x^2 + y^2 \leq 36$
23. $|x| - |y| \geq 0$
24. $|x| - |y| \leq 0$
25. $|x| + |y| > 6; \quad x^2 + y^2 \leq 36$
26. $|x| + |y| > 6; \quad x^2 + y^2 < 36$
27. $|x| + |y| \leq 6; \quad (x+2)^2 + y^2 \geq 1; \quad (x-2)^2 + y^2 > 1$
28. $y^2 > 8x; \quad y^2 + 2(x-4) \leq 0$
29. $xy \leq 1; \quad xy < -1; \quad x^2 + y^2 \leq 4$
30. $0 \leq y \leq \sqrt{x}; \quad (x-3)^2 + y^2 > 1$
31. $x \geq 0; \quad y \geq 0; \quad x < 4; \quad y \leq 4$
32. $x^2 + y^2 \leq 1; \quad y - |x| + 3 \geq 0; \quad y + x^2 \leq 16$

4. Traduzca las siguiente expresiones verbales a expresiones numéricas

1. El triple de un número entero impar.
2. La diferencia de un número entero par y de un número entero impar.
3. La división por tres del doble de un número más su décima parte.
4. La edad de Pedro hace cuatro años.
5. El cuádruplo de la edad de Pedro dentro de ocho años.

6. El quíntuplo de la mitad de la edad de Pedro.
7. La tercera parte de la diferencia de las edades de Pedro y Luis.
8. La mitad de la suma de la edad de Pedro dentro de cinco años y la de Luis hace ocho años.
9. Al sumar doce de un número el resultado es un tercio.
10. La mitad de la edad de Pedro menos el doble de la edad de Luis es cien.
11. La suma del triple de un número y el cuadrado de otro número es ochenta.
12. La quinta parte de la edad de Pedro sumada con el triple de la edad de Luis.
13. El doble de la edad que Luis tendrá dentro de quince años más diez será ochenta.
14. El número de patas de conejos más el número de patas de pollo es cien.
15. La suma de los cuadrados de las mitades de dos números es siete.
16. Un sombrero costó ocho veces más que un pañuelo.
17. Un número más ocho.
18. El quíntuplo de un número más la mitad de otro.
19. Tres menos dos veces un número.
20. El producto de dos y un número divido por nueve.
21. La quinta parte de un número disminuida en once.
22. La resta de dos números consecutivos.
23. La décima parte de un número más la sexta parte de otro.
24. Tres veces la suma de cinco y un número.
25. El doble de la resta de dos números.
26. La división por once de un número menos su octava parte.
27. La edad de Pedro dentro de once años.
28. El triple de la edad de Pedro hace tres años.
29. La mitad de la edad de Pedro.
30. Cinco veces la suma de las edades de Luis y Pedro.
31. La suma de la edad de Pedro hace seis años y la edad de Luis dentro de diez años.
32. Cuatro veces un número es igual a diez.
33. Al restar diez de un número el resultado es quince.
34. La edad de Pedro más la mitad de la edad de Luis es cien.
35. El triple de la suma de un número y diez es igual a doce.
36. La suma de las edades de Pedro hace cinco años y la de Luis dentro de ocho años es ciento cincuenta.
37. La suma de dos número enteros impares consecutivos es nueve.
38. El promedio de tres números.
39. La edad de Pedro hace doce años dividida por ocho, era treinta.
40. La suma de un número y su mitad es treinta.
41. La suma de un número, su quinta parte y su novena parte es trece.
42. El cuadrado de la suma de dos números.
43. La suma de los cuadrados de dos números.
44. Un número entero par más la cuarta parte del número entero consecutivo a este.
45. El quíntuplo del promedio de tres números.

5. Representado la edad actual de Eduardo por x. Expresar cada una de las siguientes frases en términos de la edad actual de Eduardo

(a) La edad de Eduardo dentro de tres años.
(b) La edad de Juana, si su edad es la mitad de la edad de Eduardo.
(c) La edad de Juana dentro de cinco años.
(d) La edad de Juana dentro de cinco años sustraída de la edad de Eduardo dentro de tres años.
(e) La edad de Juana hace tres años.
(f) La edad de Eduardo dentro de seis años sumada a la edad de Juana ocho años antes.
(g) Tres veces la edad de Eduardo dentro de siete años.
(h) Cuatro veces la edad de Juana dos años antes.

6. Representamos por N la edad actual de Bárbara. Exprese el resultado en cada uno de los siguientes casos, usando este número como referencia.
   (a) La edad de Bárbara pasados siete años.
   (b) Su edad dos años antes.
   (c) Cinco veces a su edad siete años después.
   (d) Tres veces su edad dos años antes.
   (e) Su edad seis años después sumada a su edad tres años antes.
   (f) La mitad de la edad actual de Bárbara.
7. Expresar el área A de un cuadrado en función de su lado l. Hallar el dominio de la función.
8. Expresar el área A de un triángulo equilátero en función del lado l. Hallar el dominio de la función.
9. Una recta que pasa por el punto $N(-3,1)$ y forma con los ejes coordenados el triángulo rectángulo AOB. Expresar su área en función de la pendiente de la hipotenusa. Hallar su dominio.
10. Dos postes de 12 y 28 m. de altura distan entre sí 30 m. Se desea unir los extremos superiores de dichos postes, con un cable que esté fijo en un punto único del suelo entre los postes y a una distancia x del poste de menor altura. Exprese la longitud del cable en función de x y halle su dominio.
11. Una página rectangular debe contener 96 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior tienen 3 cm de anchura y los laterales 2 cm. Exprese el área de la página en función de la variable x, siendo x el ancho del área impresa. Hallar el dominio donde está definida la función.
12. Se tiene un alambre de 4 m de longitud y se divide en dos trozos para formar un cuadrado y un círculo. Expresar el área total encerrada en ambas figuras en función de x, siendo x el lado del cuadrado. Hallar el dominio donde está definida la función.
13. En el triángulo rectángulo ABC, con hipotenusa AC igual a 7, expresar la longitud del cateto AB en función de la hipotenusa y el otro cateto y calcular su dominio.
14. En el triángulo rectángulo DEF, rectángulo en E. Si: $DE = a$; $EF = b$ y $DM = x$ (medido sobre el cateto DE); expresar la longitud del segmento MN (paralelo a EF) en función de los datos suministrados. Hallar el dominio de la función.
15. Dado un triángulo isósceles cuyos lados iguales l forman 30° con el lado desigual, hallar el área del triángulo en función de la longitud de los lados iguales. Hallar el dominio.
16. Un ganadero tiene 2000 metros de valla para cercar dos corrales rectangulares adyacentes idénticos. Expresar el área total que pudiera cercarse sólo en función del lado no común x de los corrales. Dominio.
17. Expresar el área A de un triángulo equilátero en función de su altura h.
18. Expresar el área A de una esfera en función de su diámetro.
19. Expresar el perímetro P de un rectángulo de área igual a 10 cm^2 como función de uno de sus lados x.

20. Hallar el volumen V de una esfera en función de su área superficial A.

21. Expresar el volumen V de un cubo en función del área A de su base.

22. Sea ABC un triángulo isósceles de base igual a 6 cm y altura igual a 8 cm y sea M el punto medio de la base AC. Si una recta paralela a la base corta en P y en Q a los lados AB y BC, expresar el área del triángulo PMQ solamente en función de su altura.

23. Si la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 10 cm, expresar el perímetro en función de uno de los ángulos variables.

24. Una recta pasa por el punto $M(3,-1)$ y forma con los ejes coordenados el triángulo rectángulo AOB. Expresar su perímetro en función de la pendiente de la hipotenusa.

25. Expresar el área A de un rectángulo de perímetro constante P, como función de la longitud l de uno de sus lados.

26. Expresar el radio r de un circulo en función de su perímetro P.

27. ¿Cuál es el área, A, de una cara de un cubo en función de su volumen V?

28. Una caja cerrada con base cuadrada, de lado l y altura h tiene un área total de 200 cm^2. Hallar el volumen en función del lado de la base.

29. Expresar V en función de x, siendo V el volumen de una caja sin tapa que se construye a partir de una pieza rectangular de metal de 12 cm $\times$ 15 cm recortando cuadrados iguales, de lado x, de cada esquina de la pieza y doblando hacia arriba los bordes del metal para formar los lados de la caja.

30. Se quiere fabricar envases cilíndricos de 1 litro de capacidad para enlatar jugos y otros productos. Expresar la cantidad de material necesario en función de la altura del recipiente. (No tomar en cuenta los desperdicios que pudieran producirse)

31. Expresar el área A y el perímetro P de un circulo en función del radio r. Hallar A en función de P.

32. Se quiere construir una caja de base cuadrada para contener un volumen de 10 m^3. Expresar el área total de los lados, el fondo y el tope en función de la longitud del lado de la base l. Hallar el dominio.

33. Exprese el volumen V de una esfera en función del radio r y en función de su diámetro d.

34. El ancho a de una caja rectangular es tres veces su longitud l y su altura h es dos veces su largo. Expresar el volumen V de la caja en función de: (a) su longitud; (b) su ancho; (c) su altura.

Respuestas: Ejercicios

4.1. $n \in \mathbb{Z}: \ 3(2n+1)$; 4.2. $n, m \in \mathbb{Z}: \ 2n-(2m+1)$; 4.3. $x \in \mathbb{R}: \ \frac{1}{3}\left(x^2+\frac{x}{10}\right)$;

4.4. x : Edad de Pedro : $x-4$; 4.5. x : Edad de Pedro : $4x+8$; 4.6. x : Edad de Pedro : $5\frac{x}{2}$;

4.7. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $\frac{x-y}{3}$; 4.8. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $\frac{(x+5)+(y-8)}{2}$;

4.9. $x \in \mathbb{R}: \ x+12=\frac{1}{3}$; 4.10. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $\frac{x}{2}-2y=100$; 4.11. $x, y \in \mathbb{R}: \ 3x+y^2=80$;

4.12. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $\frac{x}{5}+3y$; 4.13. y : Edad de Luis : $2(x+15)+10=80$;

4.14. x : Números de patas de conejos, y : Números de patas de pollo : $4x+2x=100$; 4.15. $x, y \in \mathbb{R}: \ \left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=7$;

4.16. x : Costo del sombrero, y : Costo del pañuelo : $x=8y$; 4.17. $x \in \mathbb{R}: \ x+8$; 4.18. $x, y \in \mathbb{R}: \ 5x+\frac{y}{2}$;

4.19. $x \in \mathbb{R}: \ 3-2x$; 4.20. $x \in \mathbb{R}: \ \frac{2x}{9}$; 4.21. $x \in \mathbb{R}: \ \frac{x}{5}-11$; 4.22. $x \in \mathbb{R}: \ x-(x+1)$;

4.23. $x, y \in \mathbb{R}: \ \frac{x}{10}+\frac{y}{6}$; 4.24. $x \in \mathbb{R}: \ 3(x+5)$; 4.25. $x, y \in \mathbb{R}: \ 2(x-y)$; 4.26. $x \in \mathbb{R}: \ \frac{x-\frac{x}{8}}{11}$;

4.27. z : Edad de Pedro : $z-11$; 4.28. y : Edad de Pedro : $3(y-3)$; 4.29. x : Edad de Pedro : $\frac{x}{2}$;

4.30. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $5(x+y)$; 4.31. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $(x-6)+(y+10)$;

4.32. $x \in \mathbb{R}: \ 4x=10$; 4.33. $x \in \mathbb{R}: \ x-10=15$; 4.34. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $x+\frac{y}{2}=100$;

4.35. $x \in \mathbb{R}: \quad 3(x+10) = 12;$ 4.36. x : Edad de Pedro, y : Edad de Luis : $(x-5)+(y+8) = 150;$

4.37. $n \in \mathbb{Z}: \quad (2n+1)+(2n+3) = 9;$ 4.38. $x, y, z \in \mathbb{R}: \quad \frac{x+y+z}{3};$ 4.39. x : Edad de Pedro : $\frac{x-12}{8} = 30;$

4.40. $x \in \mathbb{R}: \quad x + \frac{x}{2} = 30;$ 4.41. $x \in \mathbb{R}: \quad x + \frac{x}{5} + \frac{x}{9} = 13;$ 4.42. $x, y \in \mathbb{R}: \quad (x+y)^2;$ 4.43. $x, y \in \mathbb{R}: \quad x^2 + y^2;$

4.44. $n \in \mathbb{Z}: \quad 2n + \frac{2n+1}{4};$ 4.45. $x, y, z \in \mathbb{R}: \quad 5\left(\frac{x+y+z}{3}\right);$ 5.a. $x+3;$ 5.b. $\frac{x}{2};$ 5.c. $\frac{x}{2}+5;$

5.d. $\frac{x}{2}+5-(x+3);$ 5.e. $\frac{x}{2}-3;$ 5.f. $(x+6)+\left(\frac{x}{2}-8\right);$ 5.g. $3x+7;$ 5.h. $4\left(\frac{x}{2}-2\right);$ 6.a. $N+7;$

6.b. $N-2;$ 6.c. $5N+7;$ 6.d. $3(N-3);$ 6.e. $(N+6)+(N-3);$ 6.f. $\frac{N}{2};$

7. $A(l) = l^2;$ Dom. $A = (0,\infty);$ 8. $A(l) = \frac{\sqrt{3}l^2}{4};$ Dom. $A = (0,\infty);$ 9. $A(m) = -\frac{(3m+1)^2}{2m};$ Dom. $A = (0,\infty);$

10. $F(x) = \sqrt{x^2+144} + \sqrt{x^2-60x+1684};$ Dom. $F = [0,30];$ 11. $A(x) = 120 + 6x + \frac{384}{x};$ Dom. $A = (0,96);$

12. $A(x) = \frac{x^2}{16} + \frac{(4-x)^2}{4\pi};$ Dom. $A = (0,4);$ 13. $L(x) = \sqrt{49-x^2};$ Dom. $L = (0,7);$ 14. $L(x) = \frac{bx}{a};$ Dom. $L = [0,a];$

15. $A(x) = \frac{\sqrt{3}x^2}{4};$ Dom. $A = (0,\infty);$ 16. $A(x) = \frac{2000x-2x^2}{3};$ Dom. $A = (0,1000);$ 17. $A(h) = \frac{\sqrt{3}}{3}h^2;$

18. $A(d) = \pi d^2;$ 19. $P(x) = 2x + \frac{20}{x};$ Dom. $A = \left(0, \sqrt{10}\right);$ 20. $S(V) = \sqrt{\frac{27V^3}{4\pi}};$ 21. $L(A) = A^{2/3};$

22. $A(x) = \frac{24x-3x^2}{8};$ 23. $P(\alpha) = 10(1+\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha);$ 24. $P(m) = \frac{(3m+1)(m+1)(3m+2)}{m};$ 25. $A(l) = l\left(\frac{P}{2}-l\right);$

26. $r(P) = \frac{P}{2\pi};$ 27. $A(V) = V^{2/3};$ 28. $V(l^2) = \left(\sqrt{100+h^2}-h\right)^2 h;$ 29. $V(x) = x(12-2x)(15-2x);$

30. $A(h) = 2\sqrt{\pi h} + \frac{2}{h};$ 31. $A(x) = \frac{P^2}{4\pi};$ 32. $A(l) = 2l^2 + \frac{40}{l};$ Dom. $A = \left(0, \sqrt{10}\right);$

33. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3;$ $V(d) = \frac{\pi d^3}{6};$ 34.a. $V(l) = 6l^3;$ 34.b. $V(a) = \frac{2a^3}{9};$ 34.c. $V(h) = \frac{3h^3}{4};$

Bibliografía

1. **Purcell, E. - Varberg, D. - Rigdon, S.**: "*Cálculo*". Novena Edición. PEARSON Prentice Hall.
2. **Stewart, J.**: "*Cálculo*". Grupo Editorial Iberoamericano.
3. **Thomas, George**: "*Cálculo de una variable*". 12ma edición. Pearson.
4. **Larson - Hostetler - Edwards**, "*Cálculo*". Vol. 1. Mc Graw Hill.
5. **Leithold, Louis**, "*El cálculo con geometría analítica*". Harla S.A.

Este material ha sido revisado recientemente, pero esto no garantiza que esté libre de errores, por esa razón se agradece reportar cualquier error que usted encuentre en este material enviando un mensaje al correo electrónico

farith.math@gmail.com

indicando donde se encuentra(n) dicho(s) error(es). **MUCHAS GRACIAS**.